ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

ATTI
DELL' ACCADEMIA PONTIFICIA
DE' NUOVI LINCEI

PUBBLICATI

CONFORME ALLA DECISIONE ACCADEMICA

del 22 *dicembre* 1850

E COMPILATI DAL SEGRETARIO

TOMO XXXVII - ANNO XXXVII

(1883-1884)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE

Via Lata N° 3.

1884

ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI

ANNO XXXVII.

ELENCO DEI SOCI

DATA DELLA ELEZIONE	SOCI ORDINARI
2 Febbraio 1862.	Azzarelli Prof. Cav. Mattia.
3 Luglio 1847.	Boncompagni Principe D. Baldassarre.
2 Giugno 1867.	Castracane degli Antelminelli, Ab. Conte Francesco.
5 Maggio 1878.	Ciampi P. Felice.
20 Febbraio 1876.	Colapietro Prof. Dott. Domenico.
7 Maggio 1871.	De Rossi Prof. Cav. Michele Stefano.
20 Febbraio 1876.	De Rossi Re Prof. Vincenzo.
18 Giugno 1876.	Descemet Comm. Carlo.
27 Aprile 1873.	Ferrari P. G. Stanislao.
18 Giugno 1876.	Foglini P. Giacomo.
3 Giugno 1866.	Guglielmotti P. Alberto.
20 Febbraio 1876.	Guidi Cav. Filippo.
5 Maggio 1878.	Ladelci Prof. Dott. Francesco.
24 Gennaio 1875.	Lais P. Giuseppe.
5 Maggio 1878.	Lanzi Dott. Matteo.
27 Aprile 1873.	Olivieri Cav. Giuseppe.
7 Maggio 1871.	Provenzali P. Francesco Saverio.
7 Maggio 1871.	Regnani Monsignor Prof. Francesco.
16 Marzo 1879.	Sabatucci Cav. Placido.
15 Gennaio 1882.	Solivetti Dott. Alessandro.
18 Giugno 1876.	Statuti Cav. Prof. Augusto.
20 Febbraio 1876.	Tancioni Prof. Cav. Gaetano.
28 Gennaio 1883.	Tuccimei Prof. Giuseppe.
	SOCI ONORARI
5 Maggio 1878.	Sua Santità LEONE PAPA XIII.
28 Marzo 1883.	S. E. Rma il Card. Gaetano Alimonda, Arcivescovo di Torino.
16 Marzo 1879.	Boncompagni D. Ugo Marchese di Vignola.
5 Maggio 1878.	Ciccolini Monsignore Stefano.
25 Maggio 1848.	Cugnoni Ing. Ignazio.
5 Maggio 1878.	De Rossi Comm. Giovanni Battista.
25 Maggio 1878.	Palomba Cav. Clemente.
16 Dicembre 1883.	Sterbini Comm. Giulio.
5 Maggio 1878.	Vannutelli Monsignore Vincenzo.

Data della elezione	Soci Aggiunti
16 Giugno 1878.	Boncompagni Ludovisi D. Luigi.
5 Maggio 1878.	Bonetti Prof. D. Filippo.
12 Giugno 1881.	Buti Monsignore Prof. Giuseppe.
26 Maggio 1878.	De Courten Ing. Giuseppe Erasmo.
26 Maggio 1878.	Del Drago dei principi, D. Ferdinando.
26 Maggio 1878.	De Rossi Prof. Raffaele.
23 Maggio 1880.	Fonti Marchese Luigi.
26 Maggio 1878.	Giovenale Ing. Giovanni.
5 Maggio 1878.	Gismondi Prof. D. Cesare.
26 Maggio 1878.	Paloni Prof. D. Venanzio.
5 Maggio 1878.	Persiani Prof. Eugenio.
5 Maggio 1878.	Persiani Prof. Odoardo.
12 Giugno 1881.	Santovetti Prof. D. Francesco.
5 Maggio 1878.	Seganti Prof. Alessandro.
26 Maggio 1878.	Zama Prof. Edoardo.
	Soci Corrispondenti italiani
27 Aprile 1873.	Bertelli P. Timoteo, Professore al Collegio alla Querce, Firenze.
11 Maggio 1851.	Betti Comm. Enrico, Professore nella R. Università di Pisa.
12 Giugno 1881.	Bruno Prof. D. Carlo, Mondovì.
23 Aprile 1876.	Cecchi P. Filippo, Direttore dell'Osservatorio Ximeniano, Firenze.
23 Maggio 1880.	De Andreis Ingegnere Angelo, Roma.
2 Maggio 1858.	De Gasperis Comm. Annibale, Professore nella R. Università, Napoli.
27 Aprile 1873.	Denza P. Francesco, Direttore dell'Osservatorio di Moncalieri.
18 Giugno 1876.	De Simoni Cav. Avv. Cornelio, Segretario degli Archivi di Stato, Genova.
23 Maggio 1880.	Donati Biagio, Civitavecchia.
12 Giugno 1881.	Egidi P. Giovanni, Roma.
23 Aprile 1876.	Galli Prof. D. Ignazio, Direttore dell'Osservatorio meteorico municipale, Velletri.
23 Aprile 1876.	Garibaldi Prof. Pietro Maria, Direttore dell'Osservatorio meteorologico, Genova.
28 Gennaio 1883.	Mazzetti Ab. Giuseppe, Modena.
12 Giugno 1881.	Medichini prof. D. Simone, Viterbo.
1 Aprile 1860.	Meneghini Comm. Prof. Giuseppe, Pisa.
16 Dicembre 1883.	Piccinini P. G. Camaldolese.
15 Gennaio 1882.	Ragona prof. Domenico, Modena.

Data della elezione	Soci Corrispondenti italiani
4 Maggio 1849.	Scacchi Prof. Arcangelo, Napoli.
28 Gennaio 1883.	Seghetti Dott. Domenico, Frascati.
23 Aprile 1876.	Seguenza Prof. Cav. Giuseppe, Messina.
23 Aprile 1876.	Serpieri P. Alessandro, professore al Collegio Raffaello, Urbino.
23 Aprile 1877.	Stoppani Prof. D. Antonio, Dirett. del Museo Civico, Milano.
4 Febbraio 1849.	Tardy Comm. Placido, Professore nella R. Università, Genova.
13 Gennaio 1867.	Turazza Cav. Domenico, Professore nella R. Università, Padova.
16 Dicembre 1883.	Venturoli Cav. Dott. Marcellino, Bologna.
1 Aprile 1860.	Villa Antonio, Milano.
	Soci Corrispondenti stranieri
17 Novembre 1850.	Airy G. B. Greenwich.
21 Decembre 1873.	Bertin Emilio, ingegnere delle costruzioni navali, Brest.
8 Aprile 1866.	Bertrand Giuseppe Luigi, Membro dell' Istituto di Francia, Parigi.
17 Marzo 1878.	Breithof Nicola, Professore all' Università di Lovanio.
23 Maggio 1880.	Carnoy prof. Giuseppe, Lovanio.
23 Maggio 1880.	Carnoy prof. Giovanni Battista, Lovanio.
12 Giugno 1881.	Catalan prof. Eugenio, Liége.
12 Giugno 1881.	Certes prof. Adriano, Parigi.
20 Aprile 1884.	D'Abbadie Antonio, Parigi.
4 Marzo 1866.	Dausse Battista, Ingegnere idraulico, Parigi.
16 Febbraio 1879.	De Basterot Conte S.
11 Giugno 1865.	De Caligny marchese Anatolio, Versaille.
10 Giugno 1860.	De Candolle Alfonso, Ginevra.
16 Dicembre 1883.	De Jonquières, Ammiraglio, Parigi.
4 Marzo 1866.	De Saint-Venant, Membro dell'Acc. delle scienze dell'Istituto di Francia, Vendôme.
16 Febbraio 1879.	Di Brazzà Savorgnan Conte Pietro.
10 Luglio 1853.	Du Bois Reymond E., Berlino.
8 Aprile 1866.	Fizeau Armando Ippolito, Membro dell' Acc. delle scienze dell'Istituto di Francia, Parigi.
22 Febbraio 1874.	Gilbert Filippo, Professore nell' Università cattolica di Lovanio.
17 Febbraio 1879.	S. E. Rma Haynald Card. Ludovico, Arcivescovo di Colocza.
17 Novembre 1850.	Henry, Segretario dell'Istituto Smitsoniano di Washington.

Data della elezione	Soci Corrispondenti stranieri
6 Luglio 1873.	Hermite Carlo, Membro dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Francia.
18 Giugno 1876.	Joubert P. Carlo.
4 Marzo 1866.	Le Joli Augusto, Cherbourg.
12 Giugno 1881.	Le Paige Prof. Costantino, Liége.
10 Luglio 1853.	Liais E. Astronomo in Parigi.
10 Luglio 1853.	Malmsten Dott. C. G. professore di matematica nell'Università di Upsal.
20 Aprile 1884.	Meignan Monsignor Guglielmo, Arcivescovo di Tours.
10 Luglio 1853.	Neumann Dott. Professore nell'Università di Könisberg.
18 Giugno 1876.	Pepin P. Teofilo.
28 Gennaio 1883.	Perry P. Stefano Giuseppe, Direttore dell'Osservatorio di Stonyhurst.
20 Aprile 1884.	Renard, R. P. Bruxelles.
10 Luglio 1853.	Roberts G. professore al collegio Monayhan, Dublino.
20 Aprile 1884.	Roig y Torres Prof. Raffaele, Barcellona.
2 Maggio 1858.	Sabine Edoardo, Londra.
20 Gennaio 1884.	Schimd D. Julius, Professore nell'Università di Tubbinga.
10 Giugno 1860.	Soret Luigi, Ginevra.
2 Maggio 1858.	Thomson Guglielmo, Professore nell' Università di Glasgow.
2 Maggio 1858.	Wehlberg Pietro Federico, Stockolm.

Presidente

Conte Ab. Francesco Castracane degli Antelminelli.

Segretario

Cav. Prof. Michele Stefano De Rossi

Vice Segretario

P. Giuseppe Lais.

Comitato Accademico

Conte Ab. F. Castracane. Prof. M. S. de Rossi.
Prof. M. Azzarelli. P. F. S. Provenzali.
P. G. S. Ferrari.

Commissione di censura

Principe D. B. Boncompagni. Prof. A. Statuti.
P. G. S. Ferrari. P. F. S. Provenzali.

Tesoriere

P. G. S. Ferrari.

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE Iª DEL 16 DICEMBRE 1883

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

THEORIE DE LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN UNE SOMME DE CINQ CARRES.

PAR LE P. TH.[le] PEPIN, S. J.

1. Il n'y a pas lieu de démontrer que tout nombre entier peut se mettre sous la forme d'un somme de cinq carrés ou d'un nombre moindre de carrés. Aussi la forme

$$\Omega = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2$$

ne peut manifester aucune propriété particulière aux nombres qu'elle représente. Mais elle offre un problème intéressant, celui de déterminer *à priori* de combien de manières différentes un nombre donné peut être représenté par cette forme. C'est à ce problème que je m'attacherai en premier lieu, pour en donner la solution la plus simple, c'est-à-dire les formules les plus propres à faire connaitre lc nombre cherché. Ce problème une fois résolu, je montrerai comment on peut partager les représentations d'un même nombre m par la forme Ω, en divers groupes jouissant de propriétés particulières, et déterminer *à priori* le nombre des représentations comprises dans chacun de ces groupes. Enfin je m'occuperai de diverses formules d'où l'on peut tirer la solution du premier problème, ainsi que des conséquences intéressantes que l'on peut en déduire, en les comparant entre elles.

Ch. I. *En combien de manières différentes un nombre donné* m *peut être représenté par une somme de cinq carrés.*

2. Pour résoudre ce problème, j'imagine d'abord que l'on veuille calculer effectivement toutes ces représentations. La méthode la plus simple pour y parvenir est de réunir en un même groupe toutes les représentations qui commencent par un même carré, de retrancher ce carré du nombre donné, et de former toutes les représentations de la différence par une somme de quatre carrés. En effet, notre problème revient à celui de résoudre en nombres entiers, positifs, nuls ou négatifs, l'équation

$$(1) \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2.$$

La première indéterminée x peut recevoir toutes les valeurs entières comprises entre $-\sqrt{m}$ et $+\sqrt{m}$. Les solutions dans lesquelles la première indéterminée x présente, au signe près, la même valeur $\pm\mu$ sont évidemment les solutions de l'équation

$$m - \mu^2 = y^2 + z^2 + t^2 + u^2,$$

c'est-à-dire les représentations de la différence $m - \mu^2$ par une somme de quatre carrés. Si μ est différent de zéro, on doit le prendre successivement avec le signe + et avec le signe −, de sorte que le nombre de celles des représentations cherchées, qui commencent par un même carré μ^2, est égal à deux fois le nombre des représentations de $m - \mu^2$ par une somme de quatre carrés. Si au contraire $\mu = 0$, il n'y a pas de signe à considérer; le nombre des solutions de l'équation (1) dans lesquelles $x = 0$, est égal au nombre des représentations de m par une somme de qnatre carrés. Si donc nous représentons par $\mathrm{N}(m, 4)$ le nombre des représentations de m par une somme de quatre carrés, et par $\mathrm{N}(m, 5)$ le nombre des représentations de m par une somme de cinq carrés, on a la relation

$$\text{I.} \qquad \mathrm{N}(m, 5) = \mathrm{N}(m, 4) + 2\mathrm{N}(m-4, 4) + 2\mathrm{N}(m-9, 4) + \ldots$$
$$= \mathrm{N}(m, 4) + 2\sum \mathrm{N}(m-\mu^2, 4), \quad 0 < \mu \leqq \sqrt{m},$$

dans laquelle la somme indiquée par le signe $\sum$ s'applique à toutes les valeurs entières et positives de μ qui ne surpassent pas $\sqrt{m}$. On doit remarquer en outre, si m est un carré, quc l'on a $\mathrm{N}(0, 4) = 1$.

3. Par la dernière formule notre problème se trouve ramené à celui de trouver l'expression de $\mathrm{N}(m, 4)$ pour une valeur quelconque de m. La théorie des fonctions elliptiques a conduit Jacobi à exprimer très simple-

ment ce nombre $N(m, 4)$ au moyen des diviseurs impairs de m; son théorème peut s'énoncer de la manièse suivante :

Le nombre des représentations différentes de m *par une somme de quatre carrés, à racines positives, nulles ou négatives, est égal à huit fois la somme des diviseurs de* m, *si* m *est impair, et à vingt quatre fois la somme des diviseurs impairs de* m, *lorsque* m *est pair.*

Si nous posons $m = 2^l p$, en désignant par p un nombre impair et par l un exposant entier, positif ou nul, le théorème de Jacobi peut s'exprimer par la formule suivante :

$$\text{II.} \qquad N(2^l p, 4) = 8\left(2 + (-1)^{2^l}\right) \zeta_1(p),$$

où nons désignons, d'après Liouville, par $\zeta_1(p)$ la somme des diviseurs du nombre p. Nous l'exprimons d'une manière plus simple encore par la formule

$$\text{II}'. \qquad N(m, 4) = 8\left(2 + (-1)^m\right) X(m),$$

en désignant par $X(m)$, avec M. Kronecker, la somme des diviseurs impairs de m (Journal de Liouville, 2e série, t. V, p. 290). En combinant ces formules avec l'équation I, nous trouvons :

1° Si m est impair, non carré,

$$\text{III.} \quad N(m, 5) = 8\zeta_1(m) + 16 \sum \zeta_1(m - 4\mu^2) + 48 \sum X(m - (2\mu - 1)^2);$$

2° Si m est pair, non carré,

$$\text{IV.} \quad N(m, 5) = 24X(m) + 48 \sum X(m - 4\mu^2) + 16 \sum \zeta_1(m - (2\zeta - 1)^2);$$

3° Si m est un carré, le dernier terme de la formule I est $2N(0, 4) = 2$. Ce terme doit être considéré séparément, parce que la valeur $N(0, 4) = 1$ ne peut pas se déduire de la formule II' en y faisant $m = 0$. En isolant ce terme, on a la formule

$$\text{V.} \quad N(m^2, 4) = 2 + 8\left(2 + (-1)^m\right) X(m^2) + 16 \sum \left(2 + (-1)^{m-n}\right) X(m^2 - n^2).$$

On peut aussi réunir les formules III et IV en la suivante

$$\text{VI.} \quad N(m, 5) = 8\left(2 + (-1)^m\right) X(m) + 16 \sum \left(2 + (-1)^{m-n}\right) X(m - n^2).$$

Dans toutes ces formules, les sommes indiquées par $\sum$ doivent s'arrêter aussitôt que la différence $m - n^2$ devient nulle ou négative.

4. Il est facile de vérifier ces formules dans les cas les plus simples. Soit $m = 1$. Ce nombre étant un carré on doit appliquer la formule V, d'où l'on déduit $N(1, 5) = 2 + 8 = 10$, ce qui est exact ; car dans l'équation

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2,$$

on peut égaler successivement à $+1$ et à -1 chacune des cinq indéterminées, les quatre autres étant nulles; on trouve ainsi dix solutions.

Soit $m = 2$. La formule IV donne $N(2, 5) = 24 + 16 = 40$. En effet, le nombre 2 présente dix décompositions en cinq carrés à racines nulles, ou positives, savoir quatre commençant par 1^2, trois commençant par $0 + 1^2$, deux commençant par $0 + 0 + 1^2$, enfin une seule commençant par trois carrés nuls. A raison du double signe que l'on peut attribuer aux racines des deux carrés différents de zéro, chacune de ces décompositions correspond à quatre représentations, ce qui fait en tout 40 représentations.

Soit $m = 3$. La formule III donne $N(3, 5) = 8 \times 4 + 48 = 80$. En effet toutes les décompositions du nombre 3 en cinq carrés sont composées de deux carrés nuls et de trois carrés égaux à 1. Le nombre des permutations distinctes de ces cinq carrés est $\dfrac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \times 1 \,.\, 2} = 10$. Chacune de ces dix décompositions correspond à huit représentations, ce qui fait en tout 80 représentations du nombre 3 par une somme de cinq carrés.

5. Pour donner une démonstration purement arithmétique des formules précédentes, nous emploirons des considérations analogues à celles dont Jacobi et Dirichlet ont fait usage pour établir que le nombre des décompositions du quadruple d'un nombre impair en quatre carrés impairs, à racines positives, est égal à la somme des diviseurs de ce nombre impair.

Soit m un nombre entier et positif, pair ou impair, que nous décomposons de toutes les manières possibles en deux facteurs Dd, l'un impair, d, et l'autre pair ou impair en même temps que m. Nous nous proposons de déterminer le nombre $N(m, 4)$ des solutions de l'équation

$$(1) \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

en nombres entiers, positifs, négatifs ou nuls. Nous distinguerons d'abord les solutions dans lesquelles l'une des deux sommes $x^2 + y^2$, $z^2 + t^2$ est nulle. Le nombre de ces solutions est évidemment le double de celui des représentations du nombre m par une somme de deux carrés. Dans les autres solutions de l'équation (1), aucune des deux sommes $x^2 + y^2$, $z^2 + t^2$ n'étant nulle, nous pouvons désigner par m' la première et l'autre par m'', m' et m'' étant deux nombres entiers et positifs. Réunissons dans un même groupe toutes les solutions dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est égale à un même nombre positif m'. On obtient évidemment toutes

ces représentations en combinant chacune des représentations de m' par une somme de deux carrés à racines positives, nulles ou négatives, avec chacune des représentations semblables de $m - m'$. Si donc nous désignons par $N(m, 2)$ le nombre des représentations d'un nombre entier quelconque m par la forme quadratique $u^2 + v^2$, le nombre des solutions de l'équation (1), dans lesquelles la somme des denx premiers carrés est égale à m', est exprimée par le produit $N(m', 2) . N(m'', 2)$.

Si donc après avoir posé de toutes les manières possibles

$$(a) \qquad m = m' + m'',$$

en désignant par m', m'' deux nombres entiers et positifs, nous formons pour chacune des solutions de cette équation le produit $N(m', 2) . N(m'', 2)$ et que nous ajoutions tous ces résultats, nous obtenons évidemment le nombre des solutions de l'équation (1), dans lesquelles aucune des deux somme $x^2 + y^2$, $z^2 + t^2$ ne s'évanouit. Le nombre de toutes les solutions sera donc exprimé par la formule

$$(b) \qquad N(m, 4) = 2N(m, 2) + \sum N(m', 2)\, N(m'', 2).$$

6. La théorie des formes quadratiques donne le moyen de trouver toutes les représentations d'un nombre donné par une somme de denx carrés. Elle apprend en même temps que, si l'on désigne par d les diviseurs impairs du nombre m, le nombre des solutions de l'équation

$$(c) \qquad m = x^2 + y^2$$

et exprimé par la formule

$$N(m, 2) = 4 \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

c'est-à-dire qu'il est égal à quatre fois l'excès du nombre des diviseurs $4l + 1$ de m sur le nombre des diviseurs $4l + 3$. Dans toutes les représentations d'un nombre par une somme de carrés, les racines des carrés peuvent être prises avec le signe + 1 et avec le signe −; deux représentations doivent être considérées comme distinctes, alors même qu'elles sont formées des mêmes carrés, lorsqu'elles diffèrent entre elles soit par l'ordre des carrés, soit par les signes des racines.

De même si l'on désigne d'une manière indéfinie, par a les diviseurs impairs de m' et par e ceux de m'', on a

$$(d) \qquad N(m', 2) = 4 \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}}, \quad N(m'', 2) = 4 \sum (-1)^{\frac{e-1}{2}},$$

et la formule (b) du n° précédent devient

$$\text{(B)} \qquad N(m, 4) = 8 \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} + 16 \sum (-1)^{\frac{a-e}{2}}.$$

La première sommation se rapporte aux diverses solutions de l'équation $m = Dd$, et la deuxième, à celles de l'équation

$$\text{(2)} \qquad m = Aa + Ee,$$

en nombres entiers et positifs A, E, a, e dont les deux derniers a, e sont supposés impairs.

En effectuant le produit des deux formules (d), on trouve

$$N(m', 2)\ N(m'', 2) = 16 \sum (-1)^{\frac{a+e}{2}-1}$$

mais, les deux nombres a, e étant impairs, on a

$$a + e - 2 \equiv a - e \pmod{4},$$

$$\frac{a+e}{2} - 1 \equiv \frac{a-e}{2} \pmod{2}.$$

7. Pour évaluer la dernière partie de la formule (B), nous observerons que, en vertu de la dernière congruence, on a

$$(-1)^{\frac{a+e}{2}} = -(-1)^{\frac{a-e}{2}}, \quad (-1)^{\frac{a-e}{2}} - (-1)^{\frac{a+e}{2}} = 2(-1)^{\frac{a-e}{2}},$$

de sorte que l'équation (B) peut être remplacée par la suivante

$$\text{(3)} \qquad N(m, 4) = 8 \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} + 8 \sum (-1)^{\frac{a-e}{2}} - 8 \sum (-1)^{\frac{a+e}{2}}.$$

On voit immédiatement dans cette formule qu'un grand nombre de termes doivent se détruire deux à deux, et qu'ainsi cette formule est susceptible de simplification. Considérons la somme

$$S = \sum (-1)^{\frac{a-e}{2}}$$

et cherchons d'abord la somme des termes qui correspondent à l'hypothèse $a = e$. Tous ces termes sont égaux à 1, et leur nombre est celui des solutions de l'équation

$$\text{(4)} \qquad m = Dd = a(A + E).$$

Le nombre a étant impair, on doit l'égaler successivement à tous les diviseurs impairs de m, puis compter le nombre des solutions de l'équation (4) qui correspondent à une même valeur de a, et réunir tous ces nombres en une même somme pour obtenir le nombre cherché. Soit $a = d$. Le nom-

bre des solutions de l'équation (1) qui correspondent à cette valeur de a est le même que celui des solutions de l'équation

$$D = A + E,$$

c'est-à-dire D − 1, puisque A peut recevoir toutes les valeurs entières et positives, inférieures à D. Posons $D = 2^\alpha \delta$, en désignant par δ un nombre impair. Le nombre trouvé est $2^\alpha \delta - 1$, et la somme de tous les nombres semblables, qui correspondent à tous les diviseurs impairs de m, est

$$2^\alpha X(m) - X_0(m),$$

$X(m)$ désignant la somme des diviseurs impairs de m, et $X_0(m)$, le nombre de ces diviseurs. On a donc, en exprimant par 2^α la plus haute puissance de 2 qni divise m,

$$S = 2^\alpha X(m) - X_0(m) + \sum{}' (-1)^{\frac{a-e}{2}},$$

$\sum{}'$ étant une somme restreinte, dont les termes correspondent à celles des solutions de l'équation (2) dans lesquelles a et e sont inégaux. Mais nous pouvons remplacer cette somme par une autre, que nons limiterons par la condition $a > e$.

En effet, à toute solution A, E, a, e de l'équation (2) il en correspond une autre A', E', a', e' liée à la première par les relations

$$\text{(A)} \qquad A' = E, \quad E' = A, \quad a' = e, \quad e' = a,$$

d'où l'on déduit $a' - e' = -(a - e)$. Les termes de $\sum{}'$ qui correspondent à ces deux solutions sont égaux, et nous pouvons exprimer leur somme par le double de celui où se trouve vérifiée la condition $a > e$. La somme S peut donc s'exprimer par la formule

$$\text{(6)} \qquad S = 2^\alpha X(m) - X_0(m) + 2 \sum{}_1 (-1)^{\frac{a-e}{2}},$$

où les éléments de la somme $\sum_1$ correspondent à celles des solutions de l'équation (2) qui vérifient la condition $a > e$.

8. De même dans la somme $S' = \sum (-1)^{\frac{a+e}{2}}$ nous distinguerons les termes qui correspondent à l'hypothèse A = E. L'équation (2) devient alors

$$m = A(a + e),$$

et l'on conclut de cette formule que l'hypothèse A = E n'est possible que dans le cas où m est pair, et que A doit être diviseur de m. Soit donc $m = 2^\alpha d\delta$, d et δ désignant deux nombres impairs. On a

$$\text{(6)} \qquad A = 2^i d, \quad a + e = 2^{\alpha - i}\delta, \quad 0 \leq i < \alpha$$

Le nombre i est inférieur à α, puisque le somme $a+e$ est paire; mais il peut prendre toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots \alpha-1$ inférieures à α. Lorsque $i=\alpha-1$ les formules (6) deviennent

$$A = 2^{\alpha-1} d, \quad a+e = 2\delta$$

Tous les termes correspondants de S' sont égaux à $(-1)^{\delta} = -1$; leur nombre est egal à δ et leur somme à $-\delta$. Au contraire, lorsque i est $< \alpha-1$ l'exposant $\alpha-i$ est au moins égal à 2, de sorte que les termes correspondants de S' sont tous égaux à $+1$, et leur somme est égale au nombre des solutions de l'équation

$$a+e = 2^{\alpha-i}\delta$$

en nombres impairs et positifs a, e; ce nombre est $2^{\alpha-i-1}\delta$. La somme des termes de S' qui correspondent à une même valeur de δ, dans l'hypothèse $A=E$, est donc

$$-\delta+\delta\,(2+2^2+2^3+\ldots+2^{\alpha-1}) = \delta\,(2^{\alpha}-3).$$

On obtiendra la somme de tous les termes de S' qui correspondent à l'hypothèse $A=E$, en faisant la somme des expressions semblables à la précédente, relatives à tous les diviseurs impairs de m. Cette somme est égale à

$$(2^{\alpha}-3)\int\delta = (2^{\alpha}-3)\,X(m),$$

quand m est pair, et elle s'évanouit quand m est impair.

9. Les autres termes de la somme S' peuvent se grouper deux à deux au moyen des relations (A) du n.º 7. Les deux termes de chàque groupe sont égaux, puisque l'on a $a'+e'=a+e$. Nous exprimerons leur somme par le double de celui des deux termes qui vérifie la condition $A>E$, ce qui a lieu nécessairement pour l'un deux, puisque l'on a $A'-E' = -(A-E)$. On a donc

$$S' = (2^{\alpha}-3)\,X(m) + 2\sum\nolimits_2 (-1)^{\frac{a'+e'}{2}}, \quad \text{ou} \quad S' = 2\sum\nolimits_2 (-1)^{\frac{a'+e'}{2}},$$

suivant que m est pair ou impair, en désignant par $\sum_2$ une somme restreinte dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation

$$(2') \quad m = 2^{\alpha} d\,\delta = A'a' + E'e'$$

qui vérifient la condition $A' > E'$. On peut réunir les deux expressions de S' en une seule, savoir

$$(7). \quad S' = (2^{\alpha}-(-1)^m-2)\,X(m) + 2\sum\nolimits_2 (-1)^{\frac{a'+e'}{2}}, \quad A' > E'.$$

On déduit des formules (1), (5) et (7),

$$(8)\quad S - S' = (2 + (-1)^m)\,X(m) - X(m) + 2\sum\nolimits_1 (-1)^{\frac{a-e}{2}} - 2\sum\nolimits_2 (-1)^{\frac{a+e}{2}},$$

$$(9)\quad N(m, 4) = 8\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} + 8\,(2 + (-1)^m)\,X(m) - 8\,X_0(m) + 16\,(S_1 - S_2)$$

en posant, pour abréger,

$$S_1 = \sum\nolimits_1 (-1)^{\frac{a-e}{2}},\quad S_2 = \sum\nolimits_2 (-1)^{\frac{a'+e'}{2}};$$

les éléments de la Somme S_1 correspondent à celles des solutions de l'équation (2), qui vérifient la condition $a > e$, tandis que ceux de la somme S_2 supposent $A' > E'$.

10. Nous allons démontrer que tous les termes de S_1 sont égaux, un à un, à des termes de S_2, de sorte que l'on peut poser $S_2 = S_1 + R$ en désignant par R une somme de termes que nous définirons plus loin. Pour cela, nous ferons correspondre à chaque solution de l'équation (3), vérifiant la condition $a > e$, une solution de l'équation (2'), satisfaisant à l'inégalité $A' - E' > 0$, en posant

$$(\alpha)\qquad A' - E' = A + E,\quad a' + e' = a - e.$$

On reconnaît que cela est toujours possible, en écrivant les équations (2) et (2') de la manière suivante

$$m = (a - e)\;A + (A + E)\,e,$$
$$m = (a' + e')\;E' + (A' + E')\,a',$$

et en faisant la substitution (α) dans la deuxième formule, ce qui donne

$$m = (a - e)\;E' + (A + E)\;a'.$$

La comparaison de ce résultat avec la première des deux formules précédentes montre que l'on a

$$E' = A + \theta\,(A + E),\quad a' = e - \theta\,(a - e),$$

θ désignant un nombre entier. La combinaison de ces équations avec les formules (α) donne le système suivant:

I.

$$a' + e' = a - e,\quad a > e,$$
$$a' = e - \theta\,(a - e),\quad e' = (\theta + 1)\,(a - e) - e,$$
$$A' = A + (\theta + 1)\,(A + E),\quad E' = A + \theta\,(A + E).$$

Le nombre θ se trouve déterminé par la double condition $a' > 0$, $e' > 0$, d'où l'on déduit

$$\theta < \frac{e}{a-e} < \theta + 1.$$

On ne peut satisfaire à ces inégalités qu'en prenant pour valeur de θ la partie entière du quotient $e:(a-e)$. D'ailleurs ce quotient n'est jamais entier, puisque $a-e$ est pair, tandis que e est impair. La partie entière de ce quotient vérifie donc les deux inégalités précédentes, sans qu'aucune d'elles se change en égalité. Le nombre θ étant nul ou positif, les nombres A', E' sont positifs et ils satisfont à la condition $A'-E' > 0$. Les nombres a', e' sont impairs et positifs, de sorte que la solution A', E', a', e' déterminée par le système I, satisfait à toutes les conditions supposées dans la somme $\sum_2 (-1)^{\frac{a'+e'}{2}}$.

11. Ainsi, à toute solution de l'équation (2), remplissant la condition $a>e$, les formules I font correspondre une solution de l'équation (3'), et une seule, vérifiant l'inégalité $A'-E' > 0$. Il nous reste à démontrer que la même solution de l'équation (2') ne peut pas correspondre en vertu des formules I, à deux solutions de l'équation (2).

D'abord, il est évident que cela ne peut pas avoir lieu pour une même valeur de θ, puisque les équations I ne déterminent qu'un seul système de valeurs des nombres A, E, a, e pour un même système de valeurs des cinq quantités θ, A', E', a', e'. Or le nombre θ se trouve complètement déterminé par les deux nombres A', E'. En effet, si l'on résout les deux dernières équations du système I par rapport aux deux nombres A, E, on trouve

$$A = E' - \theta(A'-E'), \quad E = (\theta+1)(A'-E') - E',$$

et, comme les deux nombres A et E sont positifs, le nombre θ doit vérifier les deux inégalités

$$\theta < \frac{E'}{A'-E'} < \theta + 1,$$

qui le déterminent complètement. Par conséquent le système unique de valeurs de A', E', a', e' que les formules I déterminent en fonction d'une solution de l'équation (2), ne peut correspondre qu'à une seule solution de cette équation. Tous les éléments de la somme $S_1 = \sum(-1)^{\frac{a-e}{2}}$ correspon-

dent ainsi un à un, à des éléments différents de la somme S_2, et comme les éléments correspondants des deux sommes sont égaux, à cause de la relation $a' + e' = a - e$, nous pouvons écrire

$$S_2 - S_1 = \sum\nolimits_3 (-1)^{\frac{a'+e'}{2}}$$

en désignant par $\sum_3$ une somme de termes qui correspondent à celles des solutions de l'équation (2'), qui ne sont liées par les formules I, à aucune solution de l'équation (2).

12. Pour déterminer ces solutions de l'équation (2'), résolvons le système I relativement aux nombres A, E, a, e. Nous trouvons ainsi

II.

$$A = E' - \theta (A' - E'), \quad E = (\theta + 1)(A' - E') - E',$$

$$a = a' + (\theta + 1)(a' + e'), \quad e = a' + \theta (a' + e').$$

Pour que les deux nombres A, E soient positifs, sans qu'aucun d'eux s'évanouisse, il est nécessaire qua le nombre θ vérifie les inégalités

$$\theta < \frac{E'}{A' - E'} < \theta + 1,$$

sans qu'aucune d'elles se change en égalité. Lorsque le quotient $E' : (A'-E')$ n'est pas entier, on vérifie cette condition en égalant θ à la partie entière de ce quotient. Mais si ce quotient $E' : (A'-E')$ est entier, il est impossible qu'il soit compris entre deux nombres entiers consécutifs, θ, $\theta + 1$. Les solutions de l'équation (2') où le nombre E' est divisible par $A' - E'$ sont donc les seules qui ne correspondent, en vertu des formules I, à aucune solution de l'équation (2) vérifiant la condition $a > e$, $A > 0$, $E > 0$.

Les termes de Σ_3 sont donc déterminés par les solutions de l'équation (2') qui vérifient la condition $E' = k(A' - E')$, où l'on désigne per k un nombre entier et positif. Les deux nombres k, $k + 1$ étant premiers entre eux, on déduit de la formule $kA' = (k + 1) E'$, en désignant par μ un nombre entier,

$$E' = k\mu, \quad A' = (k + 1)\mu;$$

en substituant ces expressions dans l'équation (3'), on trouve

$$m = \mu (k(a' + e') + a') = 2^\alpha d\delta.$$

Comme le facteur $k(a'+e')+a'$ est impair, le quotient $m:\mu$ doit être impair; d'ailleurs il peut être égal à un diviseur impair quelconque de m, excepté 1, parce qne le nombre $k(a'+e')+a'$ est au moins égal à 3. L'équation (2') se décompose donc de la manière suivante

$$\mu = 2^\alpha d, \quad k(a'+e') + a' = \delta, \quad \delta > 1.$$

Pour chaque valeur de δ supérieure à 1, on résoud l'équation

$$k(a'+e')+a' = \delta$$

en nombres entiers et positifs a', e', k, dont les deux premiers sont impairs, en égalant successivement $a'+e'$ aux nombres pairs $2, 4, 6, \ldots \delta-1$, inférieurs à δ, en divisant δ par $a'+e'$, puis en égalant k au quotient et a' au reste de cette division.

Puisque pour un même diviseur δ de m, impair et > 1, $a'+e'$ prend successivement les valeurs $2, 4, 6, \ldots \delta-1$, la somme des termes correspondants de Σ_3 est

$$-1+1-1+\ldots+(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}.$$

Cette somme se réduit à 0 quand le dernier terme est positif, et à -1 dans le cas contraire. On peut donc l'exprimer par la formule

$$\tfrac{1}{2}\left((-1)^{\frac{\delta-1}{2}}-1\right).$$

La somme cherchée Σ_3 s'obtient en ajoutant toutes les expressions semblables à celle-ci, relatives à tous les diviseurs impairs de m, excepté 1. On peut étendre cette sommation à la valeur exceptée, $\delta = 1$, puisque l'expression correspondante s'évanouit. On trouve ainsi

$$2\Sigma_3(-1)^{\frac{a'+e'}{2}} = \Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} - X_0(m);$$

$$2(S_1 - S_2) = -2\Sigma_2(-1)^{\frac{a'+e'}{2}} = X_0(m) - \Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}.$$

En substituant cette dernière expression dans la formule (9) du n.° 8, on trouve la formule cherchée

$$\text{II.} \qquad N(m,4) = 8\left[2+(-1)^m\right]X(m),$$

où l'on désigne par $X(m)$ la somme des diviseurs impairs de m.

La combinaison de cette formule avec l'équation I (n° 3) donne les formules énumérées précédemment (n° 3) pour déterminer, dans tous les cas possibles, le nombre des représentations d'un nombre donné m par une somme de cinq carrés. Nous verrons plus loin que le même problème peut se résoudre par d'autres formules; mais ces formules ne peuvent s'obtenir que par des considérations différentes de celles que nous venons d'employer.

Ch. II. *Reeherches ultérieures sur l'équation*

$$(\Omega) \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2.$$

13. Parmi les représentations d'un nombre donné m par une somme de cinq carrés, on peut distinguer celles qui jouissent de certaines propriétés, celles, par exemple, qui commencent par un carré impair, par un carré pair, ou encore celles dont deux carrés consécutifs sont égaux. Pour trouver les nombres de ces diverses représentations, nous emprunterons à la théorie des fonctions elliptiques les séries

$$\theta_1(q) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots\ldots = \Sigma\, q^{x^2}$$

$$\theta(q) = 1 - 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots\ldots = \Sigma\,(-1)^x q^{x^2},$$

$$\eta_1(q) = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \ldots\ldots = \Sigma\, q^{\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2}$$

dans lesquelles la variable x parcourt toute la série des nombres entiers, de $-\infty$ à $+\infty$. Ces fonctions vérifient la relation

$$(1) \qquad 4\frac{qd\eta_1}{\eta_1 dq} - 4\frac{qd\theta}{\theta dq} = \theta_1^4,$$

d'où l'on peut déduire la formule II du n° précédent, en y substituant les derivées logarithmiques des fonctions η_1, θ exprimées en produits de facteurs, savoir

$$4\frac{q\,d\eta_1}{\eta_1\,dq} = 1 + 8\sum\frac{2n\,q^{2n}}{1+q^{2n}} - 4\sum\frac{2n\,q^{2n}}{1-q^{2n}},$$

$$4\frac{qd\theta}{\theta dq} = -8\sum\frac{(2n-1)\,q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} - 4\sum\frac{2n\,q^{2n}}{1-q^{2n}}.$$

On trouve ainsi

$$\theta_1^4 = 1 + 8\,\Sigma\,\frac{2nq^{2n}}{1+q^{2n}} + 8\,\Sigma\,\frac{(2n-1)q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}.$$

Le coefficient de q^m dans le premier membre de cette formule est égal au nombre N $(m, 4)$ des représentations du nombre m par une somme de quatre carrés; le cofficient de la même puissance de q, dans le second membre, est égal à huit fois la somme des diviseurs de m, quand m est impair, et à vingt-quatre fois la somme des diviseurs impairs de m, quand m est pair, de sorte qu'il est exprimé dans tous les cas par la formule

$$8\left[2 + (-1)^m\right] \mathrm{X}\,(m)$$

Il suffit d'égaler entre eux les coefficients de q^m dans les deux membres de l'équation (2) pour obtenir la formule II du n° précédent.

14. Sans nous arrêter à cette application, multiplions les deux membres de l'équation (1) par θ, ce qui donne

$$(3) \qquad \theta\theta_1^4 = \theta\,.\,4\,\frac{q\,d\eta}{\eta_1 dq} - 4q\,\frac{d\theta}{dq}.$$

Or on a

$$\theta\theta_1^4 = \sum (-1)^x\, q^{x^2+y^2+z^2+t^2+u^2}\,;$$

le coefficient de q^m dans ce produit est égal à l'excès du nombre des représentations de m par une somme de cinq carrés, dont le premier carré est pair, sur le nombre de celles où le premier carré est impair. En désignant ces deux nombres par N$'(m, 5)$, N$''(m, 5)$, on a

$$\theta\theta_1^4 = 1 + \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[\mathrm{N}'(m, 5) - \mathrm{N}''(m, 5)\right] q^m$$

Cherchons de même le développement du produit

$$\theta\,.\,4\,\frac{q\,d\eta}{\eta_1 dq} = \theta + 8\theta \sum \left(\frac{2nq^{2n}}{1+q^{2n}} - \frac{nq^{2n}}{1-q}\right)$$

ordonné suivant les puissances entières de q. Le terme θ ne renferme qne des puissances dont les exposants sont des carrés; nous en ferons abstraction en bornant notre reeherche actuelle au cas où le nombre m est non-carré. Or on a

$$\sum \left(\frac{2n\,q^{2n}}{1+q^{2n}} - \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right) = \sum n\,(1 - 3q^{2n})\,(q^{2n} + q^{6n} + \ldots + q^{4kn+2n} + \ldots).$$

Comme le groupe de termes mis en évidence ne contient que des puissances paires de q, il en est de même pour la somme désignée par $\sum$. De plus nous ne devons chercher les termes en q^{2M} que dans les groupes de termes où le nombre n est diviseur de M, pair ou impair, le coefficient de q^{2M} dans le groupe qui correspond à un diviseur n de M est égal à ce nombre n lui-même, de sorte que le coefficient de q^{2M} dans le second membre de la formule précédente est ζ_1 (M).

Au contraire, lorsque M est pair, le coefficient de q^{2M} est négatif. Soit $M = 2^\alpha \mu$, en désignant par μ un nombre impair. Pour chaque diviseur δ de μ, il correspond des termes en q^{2M} aux valeurs

$$\delta,\ 2\delta, \ldots 2^{\alpha-1}\delta,\ 2^\alpha\delta \text{ de } n$$

ayant pour coefficients respectifs

$$-3\delta,\ -6\delta,\ -12\delta, \ldots -3.\,2^{\alpha-1}\delta,\ +2^\alpha\delta.$$

La somme de ces coefficients est

$$-3\delta\,(1+2+4+\ldots+2^{\alpha-1}) + 2^\alpha\delta = (3-2^{\alpha+1})\,\delta;$$

par conséquent le coefficient de q^{2M} est $(3-2^{\alpha+1})\sum\delta = (3-2^{\alpha+1})\,X\,(M)$. Comme cette formule se réduit à $X\,(M) = \zeta_1\,(M)$, quand M est impair, ce qui réduit α à zéro, elle est applicable dans tous les cas. On a donc

$$\sum\left(\frac{2nq^{2n}}{1+q^{2n}} - \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right) = \sum\,(3-2^{\alpha+1})\,X\,(2^\alpha\mu)\;q^\lambda,\ \lambda = 2^{\alpha+1}\mu.$$

Si donc le nombre m est non-carré, les termes en q^m, dans le second membre de l'équation (3), proviennent uniquement du produit

$$\text{(A)}\quad 8\sum\,(-1)^x\,q^{x^2} \times \sum\,(3-2^{\alpha+1})\;\zeta_1\,(\mu)\;q^\lambda,\ \lambda = 2^{\alpha+1}\mu.$$

Or les termes en q^m, dans ce produit, correspondent aux solutions de l'équation

$$(4)\qquad m = x^2 + 2^{\alpha+1}\,\mu$$

en nombres entiers x, μ, dont le premier peut être positif, nul ou négatif, tandis que le second, μ, doit être impair et positif, l'exposant α étant positif ou nul.

15. Lorsque m est impair, l'équation (4) ne peut être vérifiée que par

des valeurs impaires de x. Si l'on réunit les termes égaux qui correspondent à des valeurs de x égales et de signes contraires, on trouve

$$-16 \sum (3 - 2^{\alpha+1}) \zeta_1 (\mu)$$

comme coefficient de q^m, en désignant par $\sum$ uue somme qui correspond aux solutions de l'équation

$$(5) \qquad m = (2k-1)^2 + 2^{\alpha+1} \mu$$

en nombres entiers et positifs k, μ, dont le second, μ, doit être impair.

Ainsi lorsque m est impair et non-carré, en égalant entre eux les coefficients de q^m dans les deux membres de l'équation (3), on trouve

$$(6) \qquad N'(m, 5) - N''(m, 5) = 16 \sum (2^{\alpha+1} - 3) \zeta_1 (\mu),$$

la sommation indiquée par Σ s'étendant à toutes les valeurs impaires et positives de μ qui vérifient l'équation (5).

1° Soit $m = 4l + 3$. Le nombre α est toujours nul ; on a

$$(7) \qquad N''(m, 5) - N'(m, 5) = 16 \Sigma \zeta_1 (\mu) = 16 \Sigma \zeta_1 \left(\frac{m - (2k-1)^2}{2}\right);$$

2° Quand $m = 8l + 5$, $\alpha = 1$. Dans ce cas la formule devient

$$(8) \qquad N'(m, 5)) - N''(m, 5) = 16 \Sigma \zeta_1 \left(\frac{m - (2k-1)^2}{4}\right).$$

3° Si $m = 8l + 1$, le nombre α est égal ou supérieur à 2. La différence $N'(m, 5) - N''(m, 5)$ est toujours positive, on la calcule au moyen de la formule (6) combinée avec l'équation (5) d'où l'on déduit les systèmes des valeurs de α et de μ auxquelles correspondent les termes de la somme Σ.

16. En combinant ces formules avec celles du n° 3, qui déterminent la somme $N'(m, 5) + N''(m, 5) = N(m, 5)$, on obtient chacun des deux nombres $N'(m, 5)$, $N''(m, 5)$.

Soit, par exemple, $m = 3$. La formule (7) donne

$$N''(3, 5) - N'(3, 5) = 17.$$

Nous avons trouvé par la formule III du n° 1

$$N'(3, 5) + N''(3, 5) = N(3, 5) = 80.$$

On a donc $N''(3, 5) = 48$, $N'(3, 5) = 32$; c'est-à-dire que les représentations du nombre 3 par une somme de 5 carrés se partagent en deux groupes, dont le premier renferme 48 représentations commençant par un carré impair et le second, 32 représentations commençant par un carré pair. Ce résultat est facile à vérifier. Parmi les décompositions du nombre 3 en cinq carrés, quatre seulement commencent par un carré pair, savoir

$$0 + 0 + 1 + 1 + 1; \quad 0 + 1 + 0 + 1 + 1,$$

$$0 + 1 + 1 + 0 + 1, \quad 0 + 1 + 1 + 1 + 0.$$

A chacune de ces décompositions correspondent huit représentations, ce qui fait en tout trente deux représentations commençant par un carré pair.

17. On peut déduire directement des formules du n° 3 les nombres $N'(m, 5)$, $N''(m, 5)$, en déterminant leur rapport. La comparaison des deux expressions ainsi obtenues pour l'un de ces nombres conduit à des relations remarquables. Soit $m = 4l + 3$. Toutes les représentations de m par une somme de cinq carrés présentent trois carrés impairs et deux carrés pairs. On peut prévoir dès lors que le nombre des représentations qui commencent par un carré impair, est au nombre de celles qui commencent par un carré pair dans le rapport de 3 à 2. C'est ce qui se trouve vérifié dans l'exemple précédent, où $m = 3$; on a effectivement $48 : 32 = 3 : 2$; de plus le nombre 48 des représentations qui commencent par un carré impair est les $\frac{3}{5}$es du nombre total des représentations.

On démontre d'une manière générale la relation

$$N''(4l + 3, 5) = \tfrac{3}{5}\, N(4l + 3, 5),$$

en comparant le nombre total de permutations des cinq carrés, trois impairs et deux pairs, avec le nombre de celles qui commencent par un carré impair. En supposant d'abord les cinq carrés inégaux, le nombre total des permutations est $1 . 2 . 3 . 4 . 5$; le nombre de celles qui commencent par un carré désigné est $1 . 2 . 3 . 4$; le nombre de celles qui commenceut par l'un quelconque des trois carrés impairs est le triple du dernier nombre; le rapport du premier nombre au dernier est donc $\frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5}{1 . 2 . 3 . 4 . 3} = \frac{5}{3}$. Ce rapport reste le même quand on suppose que deux carrés deviennent égaux, parce que chacun des deux nombres comparés est réduit à sa moitié. Ce rapport ne change pas non plus lorsqu'on suppose que les trois carrés im-

pairs deviennent égaux, parce que chacun de ses deux termes est divisé par $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. On a donc

$$N''(4l+3,5) = \tfrac{2}{5} N(4l+3,5), \quad N'(4l+3,6) = \tfrac{3}{5} N(4l+3,5),$$

et par conséquent

$$N(4l+3,5) = 5\left(N''(4l+3,5) - N'(4l+3,5)\right) = 80 \sum \zeta_1 \left(\frac{4l+3-(2\mu-1)^2}{2}\right).$$

La sommation indiquée par le signe Σ s'étend à toutes les valeurs entières et positives de μ, qui donnent à l'expression

$$\frac{4l+3-(2\mu-1)^2}{2}$$

une valeur entière et positive. En comparant la nouvelle expression du nombre $N(4l+3,5)$ avec la formule III du n° 3, et remarquant que, dans l'hypothèse actuelle, $m = 4l+3$, on a $X(m-(2\mu-1)^2) = \zeta_1\left(\frac{m-(2\mu-1)^2}{2}\right)$, on obtient la formule remarquable

$$(9) \quad \zeta_1(4l+3) + 2\sum \zeta_1(4l+3-4\mu^2) = 4\sum \zeta_1\left(\frac{4l+3-(2\mu-1)^2}{2}\right).$$

Cette formule est un cas particulier d'une formule donnée par Liouville à la fin de son septième article sur quelques *Formules générales, utiles dans la théorie des nombres.*

18. Revenons à notre problème du n° 14, afin de le résoudre dans le cas où m désigne un nombre pair. Comme α ne peut être négatif, l'équation (4) n'admet que des valeurs paires de x. On a donc $(-1)^x = 1$. En réunissant les termes égaux du produit (A), qui correspondent à des valeurs de x égales et de signes contraires, et mettant à part le terme qui correspond à une valeur nulle de x, on trouve que le coefficient de q^m, dans le produit (A), est

$$8(3-2^i)\zeta_1(p) + 16\sum(3-2^{\alpha+1})\zeta_1(\mu),$$

les éléments de la somme désignée par Σ étant relatifs aux solutions de l'équation

$$m = 2^i p = 4x^2 + 2^{\alpha+1}\mu$$

en nombres entiers et positifs x, μ, dont le second doit être impair, aussi

bien que p. Lorsque le nombre m n'est pas un carré, le coefficient de q^m dans le second membre de l'équation (3) se réduit à l'expression précédente; en l'égalant à celui de la même puissance de q dans le premier membre, et en posant $m = 2^i p$, on trouve,

$$(10) \qquad N'(m, 5) - N''(m, 5) = 8(3 - 2^i)\,\zeta_1(p) + 16 \sum (3 - 2^{\alpha+1})\,\zeta_1(\mu)$$

$$m = 2^i p = 4x^2 + 2^{\alpha+1}\mu.$$

Quand m est simplement pair, $i = 1$, de sorte que l'exposant α est nul, et l'on a $\mu = p - 2x^2$. La formule précédente devient

$$(11) \qquad N'(2p, 5) - N''(2p, 5) = 8\zeta_1(p) + 16 \sum \zeta_1(p - 2x^2),$$

la somme désignée par Σ s'étendant aux valeurs entières et positives de x, qui satisfont à la condition $p - 2x^2 > 0$; cette somme s'évanouit quand $p = 1$.

19. Nous pouvons obtenir directement les nombres $N'(2p, 5)$, $N''(2p, 5)$ au moyen des formules du n.º 3, en déterminant le rapport de ces deux nombres. Toute représentation d'un nombre $2p = 4l + 2$ par une somme de cinq carrés renferme deux carrés impairs et trois carrés pairs. Le rapport du nombre total des représentation au nombre $N'(2p, 5)$ de celles qui commencent par l'un des trois carrés pairs est $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{5}{3}$. On le démontre par un raisonnement tout semblable à eelui que nous avons fait pour démontrer la relation

$$N(4l + 3, 5) = \tfrac{5}{3} N''(4l + 3, 5);$$

il suffit d'y échanger entre eux les mots *carrés pairs* et *carrés impairs*. On a donc

$$N(2p, 5) = 5\,(N'(2p, 5) - N''(2p, 5)),$$

et par conséquent

$$N(2p, 5) = 40\,\zeta_1(p) + 80 \sum \zeta_1(p - 2x^2), \quad p - 2x^2 > 0,\ x > 0.$$

En comparant ce résultat avec la formule IV du n.º 3, après y avoir substitué $m = 2p$, $X(m) = \zeta_1(p)$, $X(m - 4\mu^2) = \zeta_1(p - 2x^2)$, on trouve, après réduction,

$$(12) \qquad \zeta_1(p) + 2\sum \zeta_1(p - 2x^2) = \sum \zeta_1(2p - (2\mu - 1)^2).$$

Cette formule, ainsi que celle qui termine le n° précédent, peut servir à manifester certaines propriétés des nombres premiers relativement aux formes quadratiques dont ils sont susceptibles.

20. Les formules relatives à la duplication des fonctions elliptiques conduisent à des théorèmes curieux sur l'équation

$$(\Omega) \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2,$$

Prenons par exemple les deux formules

$$\theta_1(q)^2 = \theta_1(q^2)^2 + \eta_1(q^2)^2,$$

$$\theta(q)^2 = \theta_1(q^2)^2 - \eta_1(q^2)^2,$$

d'où l'on déduit

$$\theta(q)^2\,\theta_1(q)^2 = \theta_1(q^2)^4 - \eta_1(q^2)^4 = \theta(q^2)^4,$$

$$\theta(q)^2\,\theta_1(q)^3 = \theta_1(q)\,\theta(q^2)^4.$$

La dernière formule donne la relation

$$(1) \qquad \sum (-1)^{x+y}\, q^{x^2+y^2+z^2+t^2+u^2} = (-1)^{y+z+t+u}\, q^{x^2+2(y^2+z^2+t^2+u^2)}$$

Dans le premier membre, le coefficient de q^m est égal à l'excès du nombre des solutions de l'équation (Ω) dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est paire, sur le nombre des celles où cette même somme est impaire. Dans le second membre les termes en q^m correspondent aux diverses solutions de l'équation

$$(a) \qquad m = x^2 + 2A,$$

en nombres entiers, positifs ou nuls, et pour chacune de ces solutions, à toutes les représentations du nombre A par une somme de quatre carrés, ainsi qu'aux deux signes dont le nombre x peut être affecté.

Afin de n'avoir pas à considérer le cas où le nombre A s'évanouit, nous supposons m non-carré, de sorte que le nombre A sera toujours entier et positif. La somme des termes en q^m qui correspondent dans le second membre de la formule (1) à une même valeur de A est égal à

$$16\,(1 + 2(-1)^A)\,X(A)\,q^m,$$

si le nombre x est différent de zéro, et à la moitié de cette expression

quand $x = 0$. Le coefficient de q^m dans le second membre de l'équation (1) est donc exprimé par la formule

$$8\left(1 + 2(-1)^{\frac{m}{2}}\right) X(m) + 16 \sum \left(1 + 2(-1)^{A}\right) X(A),$$

quand m est pair, et par la formule

$$16 \sum \left(1 + 2(-1)^{A}\right) X(A)$$

lorsque m est impair. Dans les deux cas, la somme désignée par Σ correspond aux solutions de l'équation (a) en nombres entiers et positifs.

21. Le coefficient de q^m dans le premier membre de l'équation (1) peut s'exprimer par la différence $P(m) - Q(m)$, pourvu qu'on désigne par $P(m)$ le nombre des représentations de m par la somme de cinq carrés, dont les deux premiers forment une somme paire, et par $Q(m)$ le nombre de celles où la somme des deux premiers carrés est un nombre impair. On a donc

$$(2) \qquad P(m) - Q(m) = 8\left[1 + 2(-1)^{\frac{m}{2}}\right] X(m) + 16 \sum \left(1 + 2(-1)^{A}\right) X(A),$$

lorsque le nombre m est pair, et

$$(2) \qquad P(m) - Q(m) = 16 \sum \left(1 + 2(-1)^{A}\right) X(A), \quad A = \frac{m - x^2}{2} > 0,$$

dans le cas contraire. On a donc

1° Si $m = 4l + 1$, non-carré,

$$(4) \qquad P(4l + 1) - Q(4l + 1) = 48 \sum X\left(m - (2\mu - 1^2)\right);$$

2° Si $m = 4l + 3$.

$$(5) \qquad Q(4l + 3) - P(4l + 3) = 16 \sum X\left(m - (2\mu - 1)^2\right).$$

Quand m est pair, on ne peut satisfaire à l'équation (a) qu'en donnant à x des valeurs paires. On a donc $A = \frac{m}{2} - 2k^2$, de sorte que A est pair ou impair, suivant que m est multiple de 4, ou non. Donc

3° si $m = 4l$, non carré, on a

$$(6) \qquad P(4l) - Q(4l) = 24\,X(l) + 48 \sum X(l - k^2),$$

4° Si $m = 4l + 2$,

$$(8) \qquad Q(4l + 2) - P(4l + 2) = 8\,\zeta_1(2l + 1) + 16 \sum \zeta_1(2l + 1 - 2k^2).$$

22. En combinant les formules précédentes avec celles du n° 3, qui déterminent la somme $P(m) + Q(m) = N(m, 5)$, on obtient les expressions des deux nombres $P(m)$, $Q(m)$ dans les cas où m n'est pas un carré. Soit, par exemple, $m = 6$. La formule (7) donne

$$Q(6) - P(6) = 8\zeta_1(3) + 16\,\zeta_1(1) = 48;$$

la formule IV du n° 3 donne

$$Q(6) + P(6) = N(6, 5) = 240.$$

On a donc $P(6) = 96$, $Q(6) = 144$. Ainsi, parmi les représentations du nombre 6 par une somme de cinq carrés, il y en a 96 dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est un nombre pair. Le rapport du nombre de ces réprésentations au nombre total 240 est 2: 5. On peut démontrer que ce résultat s'applique à tous les nombres de la forme $4l + 2$, et déduire de là une nouvelle expression du nombre $N(4l + 2, 5)$.

En effet, toute représentation d'un nombre $4l + 2$ par une somme de cinq carrés est composée de deux carrés impairs et de 3 carrés pairs. Le rapport cherché ne changeant pas lorsqu'on suppose que les deux carrés pairs sont égaux, ainsi que les trois carrés impairs, nous le déterminerons dans cette hypothèse. Le nombre total des permutations distinctes est $\dfrac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2.3} = 10$. Le nombre des permutations, dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est paire, est égal à 4. Le rapport des deux nombres est $4 : 10 = 2 : 5$. On a donc

$$P(4l + 2) = \tfrac{2}{5} N(4l + 2, 5), \quad Q(4l + 2 = \tfrac{3}{5} N(4l + 2, 5),$$

$$N(4l + 2, 5) = 5\,(Q(4l + 2) - P(4l + 2) = 40\zeta_1(2l + 1) + 80 \sum \zeta_1(2l + 1 - 2k^2).$$

D'ailleurs, on déduit de la formule (IV) du n° 3,

$$N(4l + 2, 5) = 24\,\zeta_1(2l + 1) + 48 \sum \zeta_1(2l + 1 - 2k^2) + 16 \sum \zeta_1(4l + 2 - (2\mu - 1)^2).$$

En comparant ces deux résultats, on obtient la relation

$$(8) \qquad \zeta_1(2l+1) + 2\sum \zeta_1(2l+1-2k^2) = \sum \zeta_1(4l+2-(2\mu-1)^2).$$

De même, lorsque $m = 4l+3$, toute représentation du nombre m par une somme de cinq carrés se compose de deux carrés pairs et de trois carrés impairs. Un raisonnement semblable au précédent montre que le rapport du nombre des permutations dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est un nombre pair, au nombre total est $4:10 = 2:5$. On a donc

$$N(4l+3, 5) = 5(Q(4l+3) - P(4l+3)) = 80\sum \zeta_1\left(\frac{4l+3-(2\mu-1)^2}{2}\right).$$

La comparaison de cette expression du nombre $N(4l+3.5)$ avec celle que l'on déduit de la formule III du n° 3, donne la formule déjà obtenue à la fin du n° 17

$$(9) \qquad \zeta_1(4l+3) + 8\sum \zeta_1(4l+3-4\mu^2) = 4\sum \zeta_1\left(\frac{4l+3-(2\mu-1)^2}{2}\right).$$

23. Parmi les représentations dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est un nombre pair, et dont le nombre est exprimé par $P(m, 5)$, les unes commencent par deux carrés impairs et les autres par deux carrés pairs. On peut se proposer de trouver les nombres respectifs des représentations renfermées dans ces deux groupes. Comme nous connaissons déjà la somme $P(m, 5)$ de ces deux nombres, il suffit d'en trouver la différence. Or c'est à quoi l'on parvient au moyen de la formule

$$\theta(q)\ \theta_1(q) = \theta(q^2)^2$$

empruntée à la théorie des fonctions elliptiques. En la multipliant par $\theta_1(q)^3$ on obtient

$$\theta(q)\ \theta_1(q)^4 = \theta(q^2)^2\ \theta_1(q)^3,$$

et par conséquent

$$\sum (-1)^x\ q^{x^2+y^2+z^2+t^2+u^2} = \sum (-1)^{r+s}\ q^{2r^2+2s^2+z^2+t^2+u^2}.$$

Le coefficient de q^m dans le premier membre est (n° 17) l'excès du nombre des solutions de l'équation (Ω) qui commencent par un carré pair, sur le nombre de celles qui commencent par un carré impair, c'est-à-dire

$N'(m, 5) - N''(m, 5)$. Le coefficient de la même puissance de q dans le second membre se détermine au moyen de l'équation

$$(b) \qquad m = 2r^2 + 2s^2 + z^2 + t^2 + u^2;$$

si l'on désigne par $A(m)$ le nombre des solutions de cette équation, pour lesquelles la somme $r+s$ est un nombre pair, et par $B(m)$ le nombre de celles dans lesquelles cette même somme est impaire, le coefficient cherché de q^m est $A(m) - B(m)$, de sorte que l'on a

$$(c) \qquad N'(m, 5) - N''(m, 5) = A(m) - B(m).$$

Le premier membre de cette formule est déterminé par les formules 6, 7, 8, 10 et 11 des nos 15 et 18. Nous connaissons donc la différence des deux nombres $A(m)$, $B(m)$. Or ces deux nombres sont respectivement égaux aux nombres cherchés. En effet, à toute solution de l'équation (Ω) dans laquelle la somme des deux premiers carrés est un nombre pair, il en correspond une de l'équation (b) et une seule, par les formules

$$r = \frac{x+y}{2}, \quad s = \frac{x-y}{2},$$

les trois autres nombres z, t, u ayant les mêmes valeurs dans les deux solutions correspondantes. Puisque la somme $r+s$, est égale à x, elle est paire ou impaire suivant que les deux nombres x et y sont eux-mêmes pairs ou impairs. Le nombre $A(m)$ des solutions de l'équation (b) pour lesquelles la somme $r+s$ est paire est donc égal au nombre des solutions de l'équation (Ω) dans lesquelles les deux premiers carrés sont pairs, et le nombre $B(m)$ est égal à celui des solutions de cette dernière équation, dans lesquelles les deux premiers carrés sont impairs, On a donc

$$A(m) + B(m) = P(m, 5)$$

$$A(m) - B(m) = N'(m, 5) - N''(m, 5).$$

On obtient donc les deux nombres cherchés $A(m)$, $B(m)$, en combinant ces deux formules avec celles des n° 15, 18, 21, dans tous les cas où m est non-carré.

21. Cherchons encore le nombre des solutions de l'équation (Ω) dans

lesquelles deux carrés consécutifs et désignés sont égaux. Ce nombre s'exprime simplement au moyen du nombre des solutions de l'équation

$$\text{(A)} \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2.$$

En effet, le premier des deux carrés consécutifs égaux peut occuper le premier, le second, le troisième ou le quatrième rang. Arrêtons nous à ce dernier cas. Le nombre des solutions de l'équation (Ω) dans lesquelles les deux derniers carrés sont égaux est égal à deux fois le nombre des solutions de l'équation (A); car en écrivant $2t^2$ au lieu de $t^2 + u^2$ on suppose non seulement $t^2 = u^2$, mais encore $t = u$; pour une même valeur commune de t^2 et de u^2, la forme $t^2 + u^2$ donne quatre représentations, tandis que la forme $2t^2$ n'en donne que deux.

De même, le nombre des solutions de l'équation (Ω) dans lesquelles les deux premiers carrés sont égaux, est égal à deux fois le nombre des solutions de l'équation $m = 2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Or il est évident que ce dernier nombre est égal à celui des solutions de l'équation (A). Il en est de même pour les deux autres positions des deux carrés égaux. Si donc la position des deux carrés égaux est désignée, le nombre des solutions de l'équation (Ω) dans lesquelles deux carrés désignés sont égaux est égal à deux fois le nombre des solutions de l'équation (A). Lorsque la position des deux carrés consécutifs égaux n'est pas désignée, le nombre cherché serait égal à 8 fois le nombre des solutions de l'équation (A), si les solutions où trois carrés consécutifs sont égaux ne venaient pas troubler notre calcul. C'est pourquoi nous nous bornerons a chercher le nombre des solutions de l'équation (Ω) dans lesquelles les deux derniers carrés sont égaux.

21. Pour le déterminer, nous emprunterons à la théorie des fonctions elliptiques les formules suivantes:

$$(a) \qquad \left(\frac{2K}{\pi}\right)\frac{1}{\operatorname{Sn}\frac{2Kx}{\pi}} = \frac{1}{\sin x} + 4\sum\frac{q^{2n-1}\sin(2n-1)x}{1-q^{2n-1}},$$

$$(b) \qquad \frac{d\left(\operatorname{Sn}\frac{2Kx}{\pi}\right)}{dx} = \frac{2K}{\pi}\operatorname{Cn}\frac{2Kx}{\pi}\,dn\,\frac{2Kx}{\pi},$$

$$(c) \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \theta_1 = \sum q^{x^2},$$

$$(d) \qquad Sn\,\frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}} = \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta^2+\theta_1^2}},\ \theta^2+\theta_1^2 = 2\theta_1\,(q^2)^2,$$

$$Cn\,\frac{K}{2} = \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2+\theta_1^2}};\quad dn\,\frac{K}{2} = \sqrt{k'} = \frac{\theta}{\theta_1},$$

les fonctions $\theta(q)$, $\theta_1(q)$, que nous désignons ici par θ, θ_1, sont celles mêmes que nous avons employées précédemment.

Lorsqu'on différentie la formule (a) en ayant égard à la formule (b), on trouve

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{Cn\,\frac{2Kx}{\pi}\;dn\,\frac{2Kx}{\pi}}{\left(Sn\,\frac{2Kx}{\pi}\right)^2} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} - 4\sum \frac{(2n-1)\,q^{2n-1}\,\mathrm{Cos}(2n-1)x}{1-q^{n-1}}$$

Puis faisant $x = \frac{\pi}{4}$ et substituant, d'une part, les valeurs de $Sn\,\frac{K}{2}$. $Cn\,\frac{K}{2}$, $dn\,\frac{K}{2}$ données par les formules (d), d'autre part, l'expression

$$\mathrm{Cos}\,(2n-1)\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1)^{\frac{(2n-1)^2-1}{8}} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{2}},$$

on trouve, après réduction,

$$(1) \qquad \theta\,(q)^2\,\theta_1\,(q)\,\theta_1\,(q^2) = 1 - 2\sum \frac{(2n-1)\,q^{2n-1}\,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1-q^{2n-1}},$$

ou encore, en changeant q en $-q$ et ayant égard à la relation $\theta(-q) = \theta_1(q)$,

$$(1') \qquad \theta\,(q)\,\theta_1\,(q)^2\,\theta_1\,(q^2) = 1 + 2\sum \frac{(2n-1)\,q^{2n-1}\,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1+q^{2n-1}}.$$

On peut poser

$$\theta\,(q) = \sum\,(-1)^x\,q^{x^2},\ \theta_1\,(q)^2 = \sum q^{y^2+z^2},\ \theta_1\,(q^2) = \sum q^{2t^2}$$

en donnant aux variables x, y, z, t toutes les valeurs entières, de $-\infty$ à $+\infty$. Le premier membre de l'équation (1') est

$$\sum\,(-1)^x\,q^{x^2+y^2+z^2+2t^2}.$$

Le coefficient de q^m dans cette somme est égal à l'excès du nombre des solutions de l'équation

$$\text{(A)} \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2,$$

dans lesquelles le premier carré est pair, sur le nombre de celles où ce carré est impair. Désignant par N (m) le nombre des solutions de l'équation (A), par N' (m) le nombre de celles où le premier carré est pair, et par N'' (m) le nombre de celles où ce carré est impair, on a

$$(2) \qquad \sum (N'(m) - N''(m))\, q^m = 1 + 2 \sum \frac{(2n-1)(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{2n-1}}{1 + q^{2n-1}}.$$

Le nombre m varie de 0 à ∞, tandis que n varie de 1 à ∞; on doit remarquer, relativement à la valeur $m = 0$, que l'on a $N(0) = N'(0) = 1$ et $N''(0) = 0$.

26. La somme qui figure au second membre de l'équation (2) peut s'écrire

$$\sum (2n-1)(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^{2n-1} - q^{2(2n-1)} + q^{3(2n-1)} - \ldots - (-1)^\mu q^{\mu(2n-1)} + \ldots).$$

Pour obtenir le coefficient de q^m, nous poserons $m = 2^i p$, en désignant par p un nombre impair et par i, un exposant entier, positif ou nul. A chaque diviseur impair, $2n-1$, de m correspond un terme

$$-(2n-1)(-1)^{\frac{(2n-1)^2-1}{8}} (-1)^m q^m,$$

de sorte qu'en posant $2n - 1 = \delta$, on trouve que le coefficient cherché est exprimé par la formule

$$-(-1)^m \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} \delta;$$

la somme précédente, ordonnée par rapport aux puissances croissantes de q s'écrira

$$-\sum (-1)^m \left(\sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} \delta\right) q^m, \quad m = 2^i d\delta.$$

L'équation (2) deviendra donc

$$\sum [N'(m) - N''(m)]\, q^m = 1 - 2 \sum (-1)^m \left(\sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} \delta\right) q^m$$

Or on a

$$(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} = 1 \text{ ou } (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} = -1,$$

suivant que le nombre δ est de la forme $8l \pm 1$ ou de la forme $8l \pm 3$. Si donc nous désignons par a les diviseurs $8l \pm 1$ de m et par b ses diviseurs $8l \pm 3$, le coefficient de q^m dans le second membre de la formule (2) est $-2(-1)^m [\Sigma a - \Sigma b]$, de sorte que l'on a

$$(3) \qquad N'(m) - N''(m) = 2(-1)^m \left[\sum b - \sum a\right].$$

27. Dans le cas particulier où le nombre m est de l'une des deux formes $8l \pm 1$, il est facile de déterminer le rapport des deux nombres $N'(m)$, $N''(m)$ et d'obtenir la valeur de chacun d'eux, ainsi que celle de leur somme $N(m)$. Chaque décomposition d'un nombre $8l \pm 1$ en la somme de trois carrés plus le double d'un carré, présente, parmi les trois premiers carrés, deux carrés pairs et un carré impair; quant au carré multiplié par 2, il est pair quand $m = 8l + 1$ et impair dans le cas contraire. En effet, puisque le nombre m est impair, l'équation (A) exige que l'un des trois nombres x, y, z soit impair ou qu'ils le soient tous trois. Or si on les suppose tous trois impairs, on a $m \equiv 3 + 2t^2 \pmod{8}$, de sorte que le nombre m est de la forme $8l + 3$ ou $8l + 5$, suivant que t est pair ou impair.

Comme pour chaque valeur de t le nombre des décompositions de $m - 2t^2$ en trois carrés, qui commencent par un carré pair est double du nombre de celles qui commencent par un carré impair, le rapport des deux nombres $N'(m)$, $N''(m)$ est celui de 2 à 1. On a donc

$$N'(8l \mp 1) = 2N''(8l \mp 1) = \tfrac{2}{3} N(8l \pm 1).$$

En substituant ces expression dans la formule (3) on trouve

$$(4) \qquad N(8l \pm 1) = 6 \sum a - 6 \sum b = 6 \sum \left(\frac{2}{\delta}\right) \delta.$$

Ce résultat peut s'énoncer de la manière suivante :

Le nombre des solutions de l'équation

$$m = 8l \pm 1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

en nombres entiers, positifs, nuls ou négatifs, est égal à six fois l'excès de la somme des diviseurs $8k \pm 1$ *de* m, *sur la somme des diviseurs* $8k \pm 3$.

28. On vérifie aisément ce théorème en prenant des valeurs particulières de m. Pour $m = 7$ on a $\Sigma a = 7 + 1 = 8$, $\Sigma b = 0$. Donc $N(7) = 48$. En effet, les représentations du nombre 7 par la forme considérée correspondent à la même valeur de $t^2 = 1$, et aux diverses décompositions du nombre 5 en une somme de 3 carrés. Or, abstraction faite de l'ordre des carrés, ces décompositions se réduiseut à une seule, savoir $(0 + 1 + 4)$. Ces trois carrés offrent six premutations, lesquelles combinées avec les huit combinaisons de signes des racines des trois carrés différents de zéro, donnent $6 \times 8 = 48$ solutions de l'équation (A).

Pour $m = 9$ on a $\Sigma a = 9 + 1 = 10$, $\Sigma b = 3$; par conséquent, la formule (4) donne $N(9) = 6 \times 7 = 42$. Effectivement, les représentations du nombre 9 par la forme considérée correspondent aux trois décompositions suivantes

$$3^2 + 0 + 0 + 2 \times 0, \quad 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2 \times 0, \quad 1^2 + 0 + 0 + 2 \times 2^2,$$

et à celles qu'on en déduit par les permutations différentes des trois premiers carrés. En tenant compte du nombre des permutations différentes des trois premiers carrés et du double signe de la racine de chacun des carrés différents de zéro, la première décomposition donne six solutions, la deuxième en donne 24 et la troisième 12, ce qui fait 42 solutions de l'équation (A).

De même les représentations de 17 par la forme (A) correspondent aux quatre décompositions suivantes

$$1^2 + 2^2 + 2^2 + 2 \times 2^2, \quad 1^2 + 4^2 + 0 + 2 \times 0,$$

$$3^2 + 0 + 0 + 2 \times 2^2, \quad 3^2 + 2^2 + 2^2 + 2 \times 0.$$

La premiere donne $3 \times 16 = 48$ représentations, la deuxième en donne $6 \times 4 = 24$, la troisième, $3 \times 4 = 12$, et la dernière, $3 \times 8 = 24$, ce qui fait en tout 108 représentations, ainsi qu'on le déduit de la formule (4).

Ch. IV. *Expressions diverses du nombre* N$(m, 5)$.

29. Puisque l'on peut poser indifféremment

$$\theta_1(q) = \sum q^{x^2} = \sum q^{y^2} = \sum q^{z^2} = \sum q^{u^2} = \sum q^{t^2},$$

pourvu que l'on fasse parcourir aux variables x, y, z, t, u toute la série des valeurs entières, de $-\infty$ à $+\infty$, la cinquième puissance de $\theta_1(q)$ est égale à $\Sigma\, q^{x^2+y^2+z^2+t^2+u^2}$. Si l'on ordonne cette somme par rapport aux puissances croissantes de q, le coefficient de q^m est égal au nombre des solutions de l'équation

$$(\Omega) \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2$$

en nombres entiers, positifs, nuls ou négatifs. En désignant ce nombre par $N(m, 5)$, on a

$$(1) \qquad \theta_1(q)^5 = 1 + N(1, 5)\, q + N(2, 5)\, q^2 + N(3, 5)\, q^3 + \ldots.$$

On voit de même que l'on a

$$(2) \qquad \theta_1(q)^4 = 1 + N(1, 4)\, q + N(2, 4)\, q^2 + N(3, 4)\, q^3 + \ldots.$$

En multipliant cette équation membre à membre, avec la formule

$$(3) \qquad \theta_1(q) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots.,$$

on trouve

$$1 + N(1, 5)\, q + N(2, 5)\, q^2 + \ldots + N(m, 5)\, q^m + \ldots =$$

$$(1 + 2q + 2q^4 + \ldots + 2q^{n^2} + \ldots)(1 + N(1, 4)\, q + N(2, 5)\, q^2 + \ldots + N(m, 4)\, q^m + \ldots).$$

Il suffit d'égaler entre eux les coefficients de q^m dans les deux membres de cette équation, pour obtenir la formule

$$(4) \quad N(m, 5) = N(m, 4) + 2N(m - 1, 4) + 2N(m - 2^2, 4) + \ldots + 2N(m - \mu^2, 4) + \ldots$$

dont nous avons fait usage au commencent de ce Mémoire.

30. Cette formule fait dépendre $N(m, 5)$ d'une autre fonction numérique $N(m, 4)$, dont nous avons trouvé l'expression au moyen des diviseurs de m. On peut obtenir une autre formule homogène par rapport à la fonction $N(x, 5)$, à l'aide de laquelle les valeurs de cette fonction se calculent de proche en proche. Pour cela prenons les dérivées des deux membres de la formule (1) et multiplions le résultat par q. Nous trouvons

$$5\frac{q\, d\theta_1}{\theta_1\, dq} = \frac{N(1, 5)\, q + 2\, N(2, 5)\, q^2 + \ldots + m\, N(m, 5)\, q^m + \ldots}{1 + N(1, 5)\, q + N(2, q)\, q^2 + \ldots + N(m, 5)\, q^m + \ldots}.$$

D'ailleurs on déduit de la formule (2)

$$\frac{5q\, d\theta_1}{\theta_1\, dq} = 10\, \frac{q + 4\, q^4 + 9q^9 + \ldots + n^2\, q^{n^2} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + \ldots + 2q^{n^2} + \ldots}.$$

En comparant ces résultats, on obtient l'identité

$$(1 + 2q + 2q^4 + \ldots + 2q^{n^2} + \ldots)\,(\mathrm{N}\,(1, 5)\, q + \mathrm{N}\,(2, 5)\, q^2 + \ldots + \mathrm{N}\,(m, 5)\, q^m + \ldots) =$$

$$10\,(q + 4q^4 + 9q^9 + \ldots + n^2\, q^{n^2} + \ldots)\,(1 + \mathrm{N}(1, 5)\, q + \mathrm{N}\,(2, 5)\, q^2 + \ldots + \mathrm{N}(m, 5)\, q^m + \ldots),$$

d'où l'on déduit la relation

$$m\mathrm{N}\,(m, 5) + 2\,(m-1)\,\mathrm{N}(m-1, 5) + 2\,(m-4)\,\mathrm{N}(m-4, 5) + \ldots + 2\,(m-n^2)\,\mathrm{N}(m-n^2, 5) + \ldots$$

$$= 10\,\mathrm{N}(m-1, 5) + 10.4\,\mathrm{N}(m-4, 5) + \ldots + 10n^2\,\mathrm{N}(m-n^2, 5) + \ldots,$$

ou bien, en réduisant,

$$(5)\quad m\mathrm{N}(m, 5) = 2(6-m)\,\mathrm{N}(m-1, 5) + 2(24-m)\,\mathrm{N}(m-4, 5) + \ldots + 2(6n^2-m)\,\mathrm{N}(m-n^2, 5) + \ldots.$$

En partant de la valeur $\mathrm{N}\,(0, 5) = 1$, on déduit successivement de cette formule

$$\mathrm{N}\,(1, 5) = 10,\quad \mathrm{N}\,(2, 5) = 40,\quad \mathrm{N}\,(3, 5) = 80,\quad \mathrm{N}\,(4, 5) = 90,\quad \text{etc.}$$

Cette formule a l'inconvénient de renfermer quelques termes négatifs aussitôt que le nombre m est supérieur à 6. Elle est néanmoins remarquable en ce qu'elle ne fait dépendre le nombre cherché $\mathrm{N}\,(m, 5)$ d'aucune autre fonction numérique. D'ailleurs le nombre des termes à calculer ne surpasse jamais la racine carrée du nombre m, parce que la somme indiquée dans le second membre s'arrête aussitôt que la différence $m - n^2$ devient négative.

31. On parvient aussi à des résultats intéressants au moyen des formules (1) et (2), en prenant les dérivées des deux membres de la première formule et en substituant dans le résultat le développement de θ_1^4 donné par la formule (2). On trouve ainsi

$$5\theta_1^4\, q\, \frac{d\theta_1}{dq} = \mathrm{N}\,(1, 5)\, q + 2\mathrm{N}\,(2, 5)\, q^2 + \ldots + m\, \mathrm{N}\,(m, 5)\, q^m + \ldots =$$

$$10\,(q + 4q^4 + 9\, q^9 + \ldots + n^2 q^{n^2} + \ldots)\,(1 + \mathrm{N}\,(1, 4)\, q + \mathrm{N}(2, 4)\, q^2 + \ldots + m\, \mathrm{N}(m, 4)\, q^m + \ldots);$$

puis, en égalant entre eux les coefficients de q^m dans les deux membres de cette identité, on obtient

$$(6)\quad mN(m, 5) = 10\,N(m-1, 4) + 40\,N(m-4, 4) + \ldots + 10n^2\,N(m-n^2, 4) + \ldots$$
$$= 10\sum n^2\,N(m-n^2, 4),\quad n = 1, 2, \ldots \leqq \sqrt{m}.$$

Lorsqu'on substitue dans cette formule l'expression de $N(m-n^2, 4)$ déduite de l'équation II du n° 12, en ayant soin de considérer séparément le cas où m est un carré, on trouve

1° lorsque m est un carré a^2, et en isolant le terme $a^2N(0, 4) = a^2$,

$$(7)\quad a^2N(a^2, 5) = 10\,a^2 + 80\sum(2+(-1)^{a-n})\,n^2X(a^2-n^2),\quad 0<n<a.$$

2° lorsque m est non-carré,

$$(8)\quad mN(m, 5) = 80\sum(2+(-1)^{m-n})\,n^2X(m-n^2),\quad 0<n<\sqrt{m}.$$

32. La comparaison des équations (7) et (8) avec les formules du n° 3 donne des résultats remarquables. En substituant dans l'équation (8) l'expression de $N(m, 5)$ déduite de la formule VI, et en divisant le résultat par 8, on trouve, pour m non-carré

$$(9)\quad m(2+(-1)^m)\,X(m) + 2m\sum(2+(-1)^{m-n})\,X(m-n^2) = 10\sum(2+(-1)^{m-n})n^2X(m-n^2).$$

On déduit de cette formule

1° pour m impair et non-carré,

$$(10)\quad m\zeta_1(m) = 2\sum(2+(-1)^{m-n})\,(5n^2-m)\,X(m-n^2);$$

2° pour m pair et non-carré,

$$(11)\quad 2mX(m) = 2\sum(2+(-1)^{m-n})\,(5n^2-m)\,X(m-n^2).$$

De même, lorsque m est carré, les deux formules (8) et V donnent

$$(12)\quad [2+(-1)^m]m^2X(m^2)+2m^2\sum(2+(-1)^{m-n})X(m^2-n^2)=m^2+10\sum(2+(-1)^{m-n})n^2X(m^2-n^2).$$

Suivant que m est impair ou pair, on déduit de là,

1° pour un carré impair m^2,

$$(13)\quad m^2\zeta_1(m^2) = m^2 + 2\sum(2+(-1)^{m-n})\,(5n^2-m^2)\,X(m^2-n^2),\quad 0<n<m;$$

2° pour un carré pair m^2,

$$(14) \qquad 3m^2 X(m^2) = m^2 + 2\sum (2 + (-1)^n)(5n^2 - m^2) X(m^2 - n^2).$$

33. Les formules que nous venons d'obtenir, aussi bien que celles du n° 22, conduisent à des théorèmes remarquables de la théorie des nombres. On déduit d'abord immédiatement des formules (10) et (13) que la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs d'un nombre impair m est un nombre pair, si m est non-carré et un nombre impair, si m est carré. A l'aide de cette remarque on déduit immédiatement de la formule (10), qu'un nombre premier $4l+1$ est toujours décomposable en une somme de deux carrés. En effet, on déduit de cette formule, suivant le module 4.

$$2 \equiv 2\sum (20\mu^2 - m)\,\zeta_1(m - 4\mu^2) \quad (\text{mod. } 4).$$

$$1 \equiv \sum (20\mu^2 - m)\,\zeta_1(m - 4\mu^2) \quad (\text{mod. } 2).$$

On conclut de là que le nombre des termes impairs de la dernière formule doit être impair; par conséquent parmi les différences

$$m - 4,\ m - 36, \ldots\ m - 4\mu^2$$

qui figurent dans le second membre, il y en a un nombre impair qui se réduisent à des carrés impairs. Par conséquent *tout nombre premier $4l+1$ est un nombre impair de fois, et par conséquent au moins une fois, la somme de deux carrés.*

34. Quand m est un nombre premier $8l+3$, on a $m\,\zeta_1(m) \equiv 4$ (mod. 8), et l'on déduit de la formule (10)

$$2 \equiv \sum (2 + (-1)^{m-n})(5n^2 - m) X(m - n^2) \quad (\text{mod. } 4).$$

Cette congruence exige que, parmi les termes du second membre, il y en ait un nombre impair de la forme $4l+2$, ou un nombre impairement pair de la forme $4l+1$. Or cette dernière hypothèse est inadmissible; car le produit $(5n^2 - m) X(m - n^2)$ ne peut être impair qu'autant que les deux facteurs sont impairs; il faut pour cela que le nombre n soit pair et que la différence $m - n^2$ soit un carré, ce qui est impossible, puisque cette différence est de la forme $4l+3$. Il est donc nécessaire que parmi les produits $(5n^2 - m) X(m - n^2)$ il y en ait un nombre impair de la forme $4l+2$, ce qui exige que l'un des facteurs soit impair et l'autre impairement pair. Si n est impair, le facteur $5n^2 - m$ est de la forme $4l+2$, ainsi que la

différence $m - n^2$; on a donc $m - n^2 = 2p$, $X(m - n^2) = \zeta_1(p)$, en désignant par p un nombre impair. Or pour que $X(m - n^2) = \zeta_1(p)$ soit un nombre impair, il faut que p soit un carré. Dans ce cas le nombre m est de la forme

$$m = n^2 + 2K^2.$$

Si n est pair, il faut que $X(m - n^2) = \zeta_1(m - n^2)$ soit de la forme $4l + 2$, ce qui exige que $m - n^2$ soit le produit d'une puissance impaire d'un nombre premier p de la forme $4l + 1$, multipliée par un carré. En effet, le nombre $m - n^2$ ne peut être un carré, puisqu'il est de la forme $4l + 3$. Il doit donc renfermer un nombre premier p à une puissance impaire. Posons donc

$$m - n^2 = p^{2i+1} q,$$

en désignant par i un nombre entier, positif ou nul, et par q un nombre premier avec p. On aura $\zeta_1(m - n^2) = \zeta_1(p^{2i+1})\,\zeta_1(q)$. Or

$$\zeta_1(p^{2i+1}) = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{2i+1} = \frac{p^{2i+2} - 1}{p^2 - 1}(p + 1).$$

Ce facteur est nécessairement pair. Pour qu'il soit de la forme $4l + 2$, il faut d'abord que p soit de la forme $4l + 1$. De plus il faut que le quotient $(p^{2(i+1)} - 1) : (p^2 - 1)$ soit impair, ce qui exige que $i + 1$ soit impair et par conséquent i pair. Enfin pour que le facteur $\zeta_1(q)$ soit impair, il faut que q soit un carré y^2. On a donc

$$m = n^2 + p^{4l+1} y^2.$$

Mais n étant pair et m étant de la forme $8l + 3$, cette équation est impossible. Le nombre n doit donc être impair, et par conséquent le nombre m doit être un nombre impair de fois de la forme $n^2 + 2k^2$. Donc

Tout nombre premier $8l + 3$ est un nombre impair de fois et, par conséquent, au moins une fois de la forme

$$n^2 + 2k^2.$$

Ces exemples suffisent pour montrer que les formules du n° 32, ainsi que les formules analogues, qui terminent les n°s 17 et 19, peuvent être ajoutées utilement à celles que M. Bouniakowski et Liouville ont employées dans des questions analogues à celles que nous venons de résoudre.

35. La série elliptique $\theta_1(q) = \Sigma\, q^{x^2}$ fournit encore une autre expression du nombre N $(m, 5)$, à laquelle on peut faire subir de nombreuses transformations. On a, en effet, $\theta_1^5 = \theta_1^3 . \theta_1^2 = \Sigma q^{x^2+y^2+z^2} \times q^{t^2+u^2}$.

D'ailleurs en représentant par N $(m, 2)$, N $(m, 3)$ les nombres des repré sentations de m par une somme de deux, de trois carrés, on a

$$\sum q^{x^2+y^2} = 1 + \mathrm{N}(1, 2)\, q + \mathrm{N}(2, 2)\, q^2 + \mathrm{N}(3, 2)\, q^3 + \ldots,$$

$$\sum q^{s^2+t^2+u^2} = 1 + \mathrm{N}(1, 3)\, q + \mathrm{N}(2, 3)\, q^2 + \mathrm{N}(3, 3)\, q^3 + \ldots;$$

la formule précédente devient donc

$$1 + \mathrm{N}(1, 5)\, q + \mathrm{N}(2, 5)\, q^2 + \mathrm{N}(3, 5)\, q^3 + \ldots =$$

$$(1 + \mathrm{N}(1, 2)\, q + \mathrm{N}(2, 2)\, q^2 + \ldots)\,(1 + \mathrm{N}(1, 3)\, q + \mathrm{N}(2, 3)\, q^2 + \ldots.).$$

En égalant entre eux les coefficients de q^m dans les deux membres de cette équation, on obtient la relation

$$(15) \qquad \mathrm{N}(m, 5) = \mathrm{N}(m, 2) + \mathrm{N}(m, 3) + \sum \mathrm{N}(m', 2)\, \mathrm{N}(m'', 3),$$

où les éléments de la somme Σ correspondent aux diverses solutions de l'équation

$$m = m' + m''$$

en nombres entiers positifs m', m''. Du reste on parvient directement à la formule (15) en réunissant dans un même groupe celles des solutions de l'équation (Ω) dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est égale à un même nombre m', et en ajoutant les nombres qui expriment combien il y a de solutions de l'équation (Ω) comprises dans chaque groupe.

36. Nous avons déjà vu que le nombre N $(m, 2)$ est exprimé par la formule

$$\mathrm{N}(m, 2) = 4 \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}}, \quad m = \mathrm{D}d,$$

dans laquelle on doit égaler d successivement à tous les diviseurs impairs du nombre m. Quant au nombre N $(m, 3)$, il peut s'exprimer de diverses manières. Lorsque m n'est divisible par aucun carré, les représentations de ce nombre par la forme ternaire $x^2 + y^2 + z^2$ sont nécessairement des représentations propres, c'est-à-dire que les trois carrés n'ont pas de divi-

seur commun. Dans ce cas on déduit du théorème de Gauss que le nombre des représentations de m par la somme de trois carrés est égal à 12 fois le nombee des classes de formes quadratiques, proprement primitives, de déterminant $-m$, si m est de la forme $4l+1$, sans se réduire a 1; et à 8 fois ce nombre de classes, si $m = 8k+3$.

Or d'après Dirichlet le nombre des classes proprement primitives de déterminant $-m$ est exprimé par la formule

$$h = 2\sum\left(\frac{\mu}{m}\right), \quad \left(0 < \mu < \frac{m}{4}\right),$$

ou par la formule

$$h = \sum\left(\frac{\mu}{m}\right), \quad \left(0 < \mu < \frac{m}{2}\right),$$

suivant que m est de la forme $4l+1$ ou de la forme $4l+3$.

On a donc, en combinant le théorème de Gauss avec celui de Dirichlet, les deux formules citées par Eisenstein dans une note sur la représentation d'un nombre par 5 carrés (*Journal de Crelle*, t. 35, p. 268, an. 1847), savoir

$$m \equiv 1 \pmod{4}, \quad \varphi(m) = \mathrm{N}(m, 3) = 24\sum\left(\frac{\mu}{m}\right), \quad \left(0 < \mu < \frac{m}{4}\right)$$

$$m \equiv 3 \pmod{8}, \quad \varphi(m) = \mathrm{N}(m, 3) = 8\sum\left(\frac{\mu}{m}\right), \quad \left(0 < \mu < \frac{m}{2}\right).$$

Mais le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant $-m$ peut s'exprimer, d'après l'analyse même de Dirichlet, de bien d'autres manières, soit par des séries, soit par des expressions finies. Prenons par exemple le cas où $m \equiv 3 \pmod{8}$. Le nombre h des classes proprement primitives de déterminant $-m$ est exprimé, non seulement par la formule citée ci-dessus, mais encore par les suivantes:

$$h = \frac{-1}{m}\sum\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu = \frac{-1}{m^2}\sum\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu^2 = \ldots$$

dans lesquelles le nombre μ prend toutes les valeurs entières et positives, premières avec m et inférieures à m. En combinant ces formules avec le théorème de Gauss, on a

$$m \equiv 3 \pmod{8}, \quad \varphi(m) = \mathrm{N}(m, 3) = \frac{-8}{m}\sum\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu = \frac{-8}{m^2}\sum\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu^2 = \ldots$$

On voit par là que les formules dans lesquelles figure la fonction numérique N $(m, 3)$ sont susceptibles d'un grand nombre de transformations.

37. J'ajouterai une autre remarque relativement à la formule (15). On peut l'écrire plus simplement

$$\mathrm{N}(m, 5) = \sum \mathrm{N}(m', 2).\ \mathrm{N}(m'', 3),$$

en admettant que les éléments de la somme Σ correspondent à toutes les solutions de l'équation

$$m = m' + m''$$

en nombres entiers, positifs ou nuls. On peut même, lorsque m est impair, astreindre l'un des deux nombres m', m'' à être toujours impair et, conséquemment, toujours positif. Il suffit pour cela d'exprimer le nombre de toutes les solutions de l'équation (Ω), au moyen du nombre de celles dans lesquelles la somme des trois derniers carrés est impaire. Ce problème doit se résoudre de diverses manières, suivant que m est de la forme $4l+1$ ou de la forme $4l+3$. Je me bornerai à ce dernier cas. L'équation

$$(\Omega) \qquad m = 4l + 3 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2$$

exige que trois carrés soient impairs et les deux autres, pairs. Or si nous désignons par N' $(m, 5)$ le nombre des solutions de l'équation (Ω) dans lesquelles les trois derniers carrés sont impairs, il existe un rapport simple entre ce nombre et celui de toutes les solutions. Pour trouver ce rapport, considérons d'abord toutes les représentations qui correspondent à un même système de cinq carrés. Désignons par A le nombre de toutes ces représentations, et par A', le nombre de celles où les trois derniers carrés sont impairs. Le rapport A: A' ne dépend pas des combinaisons des signes des racines, puisque ces combinaisons sont les mêmes dans les deux systèmes. Il ne dépend par conséquent que du rapport qui existe entre le nombre des permutations distinctes des cinq carrés, et le nombre des permutations où les trois derniers carrés sont impairs. Supposons d'abord les cinq carrés inégaux. Le nombre de leurs permutations dans le système A est 1.2.3.4.5; le nombre des permutations admissibles dans le système A' est $1.2 \times 1.2.3$, c'est-à-dire qu'il est égal au produit des six permutations des trois derniers carrés multipliées par les deux permutations des deux carrés pairs. On a donc A: A'=10. Or ce rapport reste le même dans tous les cas, parce que si deux carrés deviennent égaux, chacun des deux nombres de permutations est divisé par 2; et si les trois carrés impair deviennent égaux, chacun des deux

nombres A, A′ est divisé par 6. On a donc dans tous les cas $A = 10A'$ et par conséquent $\Sigma A = 10 \Sigma A'$, c'est-à-dire

$$N(m, 5) = 10 N'(m, 5).$$

Or le nombre $N'(m, 5)$ vérifie la formule

$$N'(m, 5) = \sum N(m', 2)\, N(8k + 3, 3),$$

dans laquelle la somme Σ s'étend à toutes les solutions de l'équatiou

$$(a) \qquad m = 4l + 3 = m' + 8k + 3$$

en nombres entiers m', k positifs ou nuls. On a donc

$$(16) \qquad N(4l + 3, 5) = 10 \sum N(m', 2).\ N(8k + 3, 3).$$

Soit $m = 3$. L'équation (a) n'admet qu'une seule solution, $m' = 0$, $k = 0$. D'ailleurs on a $N(0, 2) = 1$, $N(3, 3) = 8$. On déduit donc de la formule (16)

$$N(3, 3) = 10 \times 8 = 80.$$

28. Eisenstein, dans la note citée plus haut (n° 36), exprime le nombre $N(m, 5)$, qu'il désigne par $\psi(m)$, au moyen de formules remarquables, par leur élégance, sinon par la simplicité des calculs qu'elles exigent. Mais ces formules sont soumises à une restriction qui en limite beaucoup l'emploi; elles ne sont applicables qu'aux nombres impairs, sans diviseur carré. Elles ont de plus l'inconvénient d'exiger beaucoup de calculs inutiles, puisqu'elles renferment autant de termes négatifs que de termes positifs. Enfin le symbole $\left(\frac{\mu}{m}\right)$ dont ces formules dépendent, n'est pas aussi facile à calculer qu'à écrire. Pour nous borner, considérons le cas où $m = 8l + 1 > 1$. On a

$$\psi(8l + 1) = N(8l + 1, 5) = -80 \sum \left(\frac{\mu}{m}\right) \mu, \ (\mu = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m - 1)).$$

Pour de petites valeurs de m, cette formule est assez commode. Ainsi pour $m = 17$ on a

$$\psi(17) = -80\,[1 + 2 + 4 + 8 - 3 - 5 - 6 - 7] = 480.$$

Mais si le nombre m est grand, la formation d'un tableau des résidus quadratiques de m, inférieurs à $\frac{1}{2} m$ ne peut se faire qu'au moyen d'un long calcul. Par exemple, si $m = 201$, la formule précédente renferme 100 termes cinquante termes positifs et 50 termes négatifs. Tandis que la formule III donne le même résultat au moyen de 15 termes seulement. Ce nombre peut même être réduit de moitié, lorsqu'on emploie les formules du n° 17.

NOTE. — La méthode employée précédemment, n° 17, conduit à des formules remarquables lorsqu'on l'applique au cas où le nombre donné est un carré impair. Prenons d'abord un nombre m de la forme $8l + 1$. Si l'on considère toutes les représentations du nombre m par la forme

$$(\Omega) \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2$$

dans lesquelles les cinq carrés présentent les mêmes valeurs, à l'ordre près, de sorte qu'elles ne diffèrent entre elles que par l'ordre des carrés ou par les signes des racines, le nombre de celles qui commencent par un carré impair est au nombre total dans le rapport de 1 à 5; car, sans changer ni les signes des racines, ni l'ordre relatif des quatre carrés pairs, on peut donner cinq places différentes au carré impair. Si donc nous désignons comme précédemment, par $N(m, 5)$ le nombre des solutions de l'équation (Ω), par $N'(m, 5)$ le nombre de celles qui commencent par un carré pair et par $N''(m, 5)$ le nombre de celles qui commencent par un carré impair, on a

$$N(m, 5) = 5\,N''(m, 5), \quad N'(m, 5) + N''(m, 5) = N(m, 5);$$

$$N'(m, 5) = 4N''(m, 5), \quad N(m, 5) = \frac{5}{4} N'(m, 5).$$

Le nombre des solutions qui commencent par le carré $(2\mu - 1)^2$ est évidemment égal à deux fois le nombre des représentations de la différence $m - (2\mu - 1)^2$ par une somme de quatre carrés. Or ce dernier nombre est égal à 24 fois la somme des diviseurs impairs de $m - (2\mu - 1)^2$, à moins que ce nombre ne se réduise a zéro. Dans ce cas en effet, le nombre des représentations qui commencent par $m = n^2$ se réduit à deux. On a donc, en supposant $m = 8l + 1$,

$$(a). \qquad N''(m, 5) = 24\,\Sigma\,X\,(m - (2\mu - 1)^2),$$

ou

$$(b). \qquad N''(m, 5) = 2 + 24\,\Sigma\,X\,(m - (2\mu - 1)^2), \quad 0 < 2\mu - 1 < \sqrt{m},$$

suivant que m est non carré ou carré.

De même on peut grouper ensemble les solutions qui commencent par un même carré pair $4\mu^2$; leur nombre est égal à celui des représentations de m par une somme de quatre carrés, si $\mu = 0$, et à deux fois le nombre des représentations semblables de la différence $m - 4\mu^2$, si μ est différent de zéro. D'ailleurs le nombre des représentations de $m - 4\mu^2$ par une somme de quatre carrés est égal à huit fois la somme des diviseurs de $m - 4\mu^2$. On a donc

$$(c) \qquad N'(m, 5) = 8\,\zeta_1(m) + 16\,\Sigma\,\zeta_1(m - 4\mu^2), \quad 0 < \mu < \frac{\sqrt{m}}{2}.$$

En combinant cette formule avec la relation $N(m, 5) = \frac{5}{4} N'(m, 5)$, on trouve

$$(1) \qquad N(8l + 1, 5) = 10\,[\,\zeta_1(8l + 1) + 2\zeta_1(8l - 3) + 2\zeta_1(8l - 15) + \ldots].$$

Si m est un carré impair n^2, on a

$$(2) \qquad N(8l + 1, 5) = 10\,[\zeta_1(n^2) + 2\zeta_1(n^2 - 4) + 2\zeta_1(n^2 - 16) + \ldots].$$

La substitution des expressions (a), (b), (c) dans la formule

$$N'(m, 5) = 4\,N''(m, 5)$$

donne, en supposant toujours $m = 8l + 1$, la relation

$$(3) \qquad \zeta_1(m) + 2\,\Sigma\,\zeta_1(m - 4\mu^2) = 12\,\Sigma\,X\,(m - (2\mu - 1)^2),$$

si m est non-carré, et la relation

$$(4) \qquad \zeta_1(n^2) + 3\,\Sigma\,\zeta_1(n^2 - 4\mu^2) = 1 + 12\,\Sigma\,X\,(n^2 - (2\mu - 1)^2),$$

si m est un carré impair n^2.

Le premier membre de cette formule peut se transformer de la manière suivante. On a $n^2 - 4\mu^2 = (n - 2\mu)(n + 2\mu)$, et si l'on pose

$$n - 2\mu = m', \quad n + 2\mu = m'',$$

les deux nombres m', m'' sont impairs et vérifient l'équation

$$(5) \qquad 2n = m' + m''$$

On a évidemment

$$\zeta_1(n^2) = \zeta_1(nn) \text{ et } 2\zeta_1(n^2 - 4\mu^2) = \zeta_1(m'\,m'') + \zeta_1(m''\,m'),$$

de sorte que l'on peut poser

$$\zeta_1(n^2) + 2\zeta_1(n^2-1) + 2\zeta_1(n^2-16) + \ldots = \Sigma\, \zeta_1(m'\,m'')$$

en étendant la somme désignée par Σ à toutes les solutions de l'équation (5) en nombres impairs et positifs m', m''. On a donc

$$(6) \qquad N(n^2, 5) = 10\, \Sigma\, \zeta_1(m'\,m'').$$

Tant que les deux nombres m', m'' sont premiers entre eux, la fonction ζ_1 vérifie la relation $\zeta_1(m'\,m'') = \zeta_1(m')\,\zeta_1(m'')$. Mais cela n'aplus lieu lorsque m' et m'' ont un diviseur commun. Considérons d'abord le cas où le nombre n est premier. Dans ce cas, toutes les solutions de l'équation (5) sont formées de deux nombres premiers entre eux, excepté la solution unique $m' = m'' = n$. On a donc

$$\zeta_1(m'\,m'') = \zeta_1(m')\,\zeta_1(m'')$$

excepté lorsque $m' = m'' = n$; dans ce dernier cas on a

$$\zeta_1(nn) = \zeta_1(n)\,\zeta_1(n) - n.$$

On a donc

$$\Sigma\, \zeta_1(m'\,m'') = \Sigma\, \zeta_1(m')\,\zeta_1(m'') - n.$$

Or d'après une formule connue, relative à la décomposition d'un nombre en une somme de huit carrés impairs, on a

$$(A) \quad \Sigma\, \zeta_1(m'\,m'') = \zeta_1(1)\,\zeta_1(2n-1) + \zeta_1(3)\,\zeta_1(2n-3) + \ldots + \zeta_1(2n-1)\,\zeta_1(1) = \zeta_3(n),$$

en désignant par $\zeta_3(n)$ la somme de cubes des diviseurs de n. On a donc

$$(7) \qquad \Sigma\, \zeta_1(m'\,m'') = n^3 - n + 1, \quad N(n^2, 5) = 10\,(n^3 - n + 1).$$

Soit $n = p^2$, le carré d'un nombre premier impair. Les solutions de l'équation (5) sont formées de nombres premiers entre eux, à l'exception de celles qui sont divisibles par p et qui correspondent à l'équation

$$(8) \qquad 2p = \mu' + \mu'', \quad m' = \mu' p, \quad m'' = \mu'' p.$$

Si donc l'on désigne par m_1', m_1'' les solutions de l'équation $2p^2 = m' + m''$ en nombres impairs et premiers entre eux, on a

$$\Sigma\, \zeta_1(m'\,m'') = \Sigma\, \zeta_1(m_1'\,m_1'') + \Sigma\, \zeta_1(p^2\,\mu'\,\mu'')$$

Dailleurs, toutes les solutions du dernier groupe, vérifient la relation

$$(9) \qquad \zeta_1(p\mu' . p\mu'') = \zeta_1(p\mu')\,\zeta_1(p\mu'') - p\,\zeta_1(\mu')\,\zeta_1(\mu'').$$

En effet, lorsque μ' et μ'' sont premiers entre eux, ils sont aussi premiers avec p, de sorte que l'on a

$$\zeta_1(p\mu'\,p\mu'') = (1 + p + p^2)\,\zeta_1(\mu')\,\zeta_1(\mu''), \quad \zeta_1(p\mu')\,\zeta_1(p\mu'') = (1 + 2p + p^2)\,\zeta_1(\mu')\,\zeta_1(\mu'')$$

$$\zeta_1(p\mu' . p\mu'') = \zeta_1(p\mu')\,\zeta_1(p\mu'') - p\,\zeta_1(\mu')\,\zeta_1(\mu'').$$

Lorsque $\mu' = \mu'' = p$, on a $\zeta_1(p\mu' . p\mu'') = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4$, $\zeta_1(p\mu')\,\zeta_1(p\mu'') = (1 + p + p^2)^2$, de sorte que la formule (9) se trouve encore vérifiée. On a donc

$$\Sigma\, \zeta_1(m'm'') = \Sigma\, \zeta_1(m')\,\zeta_1(m'') - p\,\Sigma\, \zeta_1(\mu')\,\zeta_1(\mu'').$$

Or d'après la formule (A) on a

$$\Sigma\, \zeta_1(m')\,\zeta_1(m'' = \zeta_3(p^2) = 1 + p^3 + p^6, \quad \Sigma\, \zeta_1(\mu')\,\zeta_1(\mu'') = 1 + p^3;$$

notre formule devient donc

$$\Sigma\, \zeta_1(m'm'') = 1 + p^3 + p^6 - p\,(1 + p^3) = [(1 + p^3)\,(p^3 - p) + 1].$$

$$(10) \qquad N(p^4, 5) = 10\,[(1 + p^3)\,(p^3 - p) + 1] = 10\,\frac{(p^9 - 1) - p\,(p^6 - 1)}{p^3 - 1}.$$

Les formules (7) et (10) ont été trouvées par M. Stiltjes et publiées dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, de 31 décembre 1883. Elles ont été généralisées et démontrées par M. Gurwitz dans les *Comptes rendus* du 25 février 1884.

MÉMOIRE SUR QUELQUES DÉCOMPOSITIONS EN CARRÉS;

PAR EUGÈNE CATALAN.

AVANT-PROPOS

Le savant Prince Boncompagni m'a fait l'honneur de présenter, à l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei*, le petit Mémoire suivant, qui va paraître dans les *Atti* de cette illustre Compagnie, et qui complète la Note *Sur quelques décompositions en carrés*, publiée, il y a deux ans, dans le même Recueil.

Parmi les questions traitées dans mon nouveau travail, je crois pouvoir signaler, à l'attention des Géomètres, celles dont voici la rapide énumération.

Trouver un nombre N, *égal à la somme de* n *carrés, et dont le carré soit une somme de* 2n *carrés* ;

Toute puissance entière, d'une somme de trois carrés, est une somme de trois carrés ;

Interprétation géométrique du théorème précedent ;

Décomposition, en deux carrés, de $(x^2+y^2)\,(x^4+y^4)\,(x^8+y^8)\ldots$

a, b *étant des nombres entiers, la quantité*

$$\frac{1}{2a}\left[(a+\sqrt{a^2+b^2})^{2n-1}+(-a+\sqrt{a^2+b^2})^{2n-1}\right]$$

est la somme de deux carrés et la somme de trois carres ;

x, y *étant deux nombres entiers, premiers entre eux,*

$$x^{4n}-x^{4n-2}\,y^2+x^{4n-4}\,x^4-\ldots+y^{4n}$$

est la somme de deux carrés et la somme de trois carrés ;

Soit, conformément au théorème de Gauss,

$$4\,\frac{z^{2p}+1}{z^2+1}=Y_1^2-pZ_1^2.$$

Le polynome Y_1^2 *est la somme de quatre carrés et la somme de cinq carrés* ;

A partir de $n=3$, *chaque valeur entière de* x, *satisfaisant à l'équation*

$$(a^2+1)\,x^2=y^2+1,$$

est la somme de trois carrés ;
a, b *étant des nombres entiers, la quantité*

$$\left[\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2a}\right]^{2n}+\left[\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2a}\right]^{2n}$$

est la somme de quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux ;

La somme des puissances $4n$, *de deux nombres entiers, inégaux, est une somme de quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux ;*

Chaque valeur entière de x, *satisfaisant à l'équation*

$$(a^2+b^2)\,x^2=y^2+1,$$

est la somme de quatre carrés $(a>1,\ b>1)$;

Chaque valeur entière de y, *satisfaisant à l'équation*

$$(a^2+1)\,x^2=y^2-1$$

est la somme de trois carrés $(y>1)$;

p *étant un nombre premier, de la forme* $4\mu+1$, *décomposer*

$$x^{2p-2}+x^{2p-4}+\ldots+x^2+1$$

en deux facteurs du degré $p-1$, *de deux manières différentes ;*

Trouver toutes les solutions entières de $x^2+y^2=u^2+v^2+w^2$;

Trouver un carré qui soit, simultanément, la somme de deux carrés, la somme de trois carrés, la somme de n *carrés ;*

Soit s *le nombre des puissances de* 2 *ayant* $a+b$ *pour somme. La fraction*

$$\frac{1.2.3\ldots 2a\times 1.2.3\ldots 2b}{2^s.1.2.3\ldots a\times 1.2.3\ldots b\times \overline{1.2.3\ldots a+b}}$$

est réductible à un nombre impair ;

Soit s *le nombre des puissances de* 2 *ayant* n *pour somme:* 4^{2n-s} *est la somme de* 4^n *carrés impairs.*

Liége, 15 février 1884.

I.

Quelques identités.

1. n *étant un nombre entier, on a*

$$\left.\begin{aligned}(x^{4n+2}+y^{4n+2})^2 &= (x^{4n+2}-2x^{4n}y^2+2x^{4n-2}y^4-\ldots\ldots+2x^2y^{4n}-y^{4n+2})^2\\ &+4\,(x^{4n+1}y-x^{4n-1}y^3+\ldots-x^3y^{4n-1}+xy^{4n+1})^2.\end{aligned}\right\}\ (A)$$

Multiplions, de part et d'autre, par $(x^2+y^2)^2$.

1° Dans le second membre, le produit du premier polynôme entre parenthèses, par x^2+y^2, est

$$(x^{4n+2}-y^{4n+2})\ (x^2+y^2)-2\ (x^{4n+2}y^2-x^2y^{4n+2})$$

$$=x^{4n+4}-x^{4n+2}y^2+x^2y^{4n+2}-y^{4n+4}=(x^{4n+2}+y^{4n+2})\ (x^2-y^2).$$

2° Le produit du second polynôme entre parenthèses, par x^2+y^2, est

$$x^{4n+3}y+xy^{4n+3}=xy\ (x^{4n+2}+y^{4n+2}).$$

3° L'égalité à vérifier se réduit donc à

$$(x^{4n+2}+y^{4n+2})^2\ (x^2+y^2)^2=(x^{4n+2}+y^{4n+2})^2\ (x^2-y^2)^2+4x^2y^2\ (x^{4n+2}+y^{4n+2})^2;$$

ou, plus simplement, à la relation évidente :

$$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2.$$

2. *Remarque.* D'après (A), *le carré de* $x^{4n+2}+y^{4n+2}$, *égal à*

$$(x^{4n+2}-y^{4n+2})^2+(2x^{2n+1}y^{2n+1})^2,$$

est décomposable, d'une seconde manière, en une somme de deux carrés.

3. *Exemple.* Soient $n=3$, $x=3$, $y=1$. La décomposition rappelée, qui a servi tout-à-l'heure, est

$$(3^{14}+1)^2=(3^{14}-1)^2+(2.\ 3^7)^2,$$

ou

$$4\ 782\ 970^2=4\ 782\ 968^2+4\ 374^2.$$

Par l'identité (A) :

$$4\,782\,970^2 = (3^{14} - 2.\,3^{12} + 2.\,3^{10} - 2.\,3^8 + 2.\,3^6 - 2.\,3^4 + 2.\,3^2 - 1)^2$$
$$+ 4\,(3^{13} - 3^{11} + 3^9 - 3^7 + 3^5 - 3^3 + 3)^2$$
$$= \left(4\,782\,968 - 18\,\frac{3^{12} - 1}{10}\right)^2 + 36.\left(\frac{3^{14} + 1}{10}\right)^2$$
$$= (4\,782\,968 - 956\,592)^2 + 36.\,478\,297^2\,;$$

ou enfin

$$4\,782\,970^2 = 3\,826\,376^2 + 2\,869\,782^2 \quad (*).$$

4. *Suite*. Si l'on égale les deux expressions de $(x^{4n+2} + y^{4n+2})^2$, et que l'on fasse, pour abréger :

$$A = x^{4n+2} - 2x^{4n}\,y^2 + 2\,x^{4n-2}\,y^4 - \ldots + 2x^2\,y^{4n} - y^{4n+2},$$
$$B = x^{4n+1}\,y - x^{4n-1}\,y^3 + \ldots - x^3\,y^{4n-1} + xy^{4n+1},$$

on trouve

$$(A + x^{4n+2} - y^{4n-2})\,(A - x^{4n+2} + y^{4n+2}) = 4\,(x^{2n+1}\,y^{2n+1} + B)\,(x^{2n+1}\,y^{2n+1} - B),$$

ou

$$[x^{4n+2} - 2^{4n}\,y^2 + \ldots + x^2\,y^{4n} - y^{4n+2}]\,[- x^{4n}y^2 + x^{4n-2}\,y^4 - \ldots + x^2\,y^{4n}]$$
$$= [x^{2n+1}\,y^{2n+1} + x^{4n+1}\,y - x^{4n-1}\,y^3 + \ldots - x^3\,y^{4n-1} + xy^{4n+1}]$$
$$\times [x^{2n+1}\,y^{2n+1} - x^{4n+1}\,y + x^{4n-1}\,y^3 - \ldots - xy^{4n+1}].$$

Maintenant, il faut distinguer deux cas.

1° Si n est *pair*, le terme du *milieu*, dans B, est $x^{2n+1}y^{2n+1}$. Donc le second membre de la dernière égalité devient

$$[x^{4n+1}\,y - x^{4n-1}y^3 + \ldots - x^{2n+3}\,y^{2n-1} + 2x^{2n+1}\,y^{2n+1} - x^{2n-1}\,y^{2n+3} + \ldots + xy^{4n+1}]$$
$$\times [- x^{4n+1}y + x^{4n-1}\,y^3 + \ldots + x^{2n+3}\,y^{2n-1} + x^{2n-1}\,y^{2n+3} - \ldots - xy^{4n+1}].$$

2° Lorsque n est *impair*, le terme du milieu est $- x^{2n+1}y^{2n+1}$; et le produit considéré se change en

$$[x^{4n+1}y - x^{4n-1}\,y^3 + \ldots + x^{2n+3}\,y^{2n-1} + x^{2n-1}\,y^{2n+3} - \ldots + xy^{4n+1}]$$
$$\times [- x^{4n+1}y + x^{4n-1}\,y^3 - \ldots - x^{2n+3}y^{2n-1} + 2x^{2n+1}y^{2n+1} - x^{2n-1}y^{2n+3} + \ldots - xy^{4n+1}].$$

(*) Pour vérifier ce résultat, il suffit de l'écrire ainsi :

$$3\,826\,376^2 = 7\,652\,752\,.\,1\,913\,188,$$

et de supprimer le facteur 8^2. On trouve

$$478\,297^2 = 478\,297\,.\,478\,297.$$

Par suite, en supprimant un facteur commun, et changeant les signes, on a ces deux identités :

$$\left.\begin{array}{l}[x^{4n+2} - x^{4n} y^2 + \ldots + x^2 y^{4n} - y^{4n+2}]\ [x^{4n-2} - x^{4n-4} y^2 + \ldots - y^{4n-2}] = \\ {[x^{4n} - x^{4n-2} y^2 - \ldots - x^{2n+2} y^{2n-2} + 2x^{2n} y^{2n} - x^{2n-2} y^{2n+2} + \ldots + y^{4n}]} \\ \times [x^{4n} - x^{4n-2} y^2 + \ldots - x^{2n+2} y^{2n-2} - x^{2n-2} y^{2n+2} + \ldots + y^{4n}], \text{(n } pair\text{)}\end{array}\right\} \text{(B)}$$

$$\left.\begin{array}{l}[x^{4n+2} - x^{4n} y^2 + \ldots + x^2 y^{4n} - y^{4n+2}]\ [x^{4n-2} - x^{4n-4} y^2 + \ldots - y^{4n-2}] = \\ {[x^{4n} - x^{4n-2} y^2 + \ldots + x^{2n+2} y^{2n-2} + x^{2n-2} y^{2n+2} - \ldots + y^{4n}]} \\ \times [x^{4n} - x^{4n-2} y^2 + \ldots + x^{2n+2} y^{2n-2} - 2x^{2n} y^{2n} + x^{2n-2} y^{2n+2} - \ldots + y^{4n}]. \text{(n } impair\text{)}\end{array}\right\} \text{(C).}$$

5. *Exemple*. Soient $n = 3$, $y = 1$. L'identité (C) se réduit à

$$(x^{14} - x^{12} + x^{10} - x^8 + x^6 - x^4 + x^2 - 1)\ (x^{10} - x^8 + x^6 - x^4 + x^2 - 1) =$$
$$(x^{12} - x^{10} + x^8 + x^4 - x^2 + 1)\ (x^{12} - x^{10} + x^8 - 2x^6 + x^4 - x^2 + 1);$$

ou à

$$(x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)\ (x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) =$$
$$(x^6 - x^5 + x^4 + x^2 - x + 1)\ (x^6 - x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1);$$

par le changement de x^2 en x. (*)

6. *Autres identités*. Rappelons, en passant, l'identité connue :

$$x^{4n} - x^{4n-2} y^2 + \ldots - x^2 y^{4n-2} + y^{4n} =$$
$$[x^{2n} - x^{2n-2} y^2 + \ldots \pm x^2 y^{2n-2} \mp y^{2n}]^2 + [x^{2n-1} y - x^{2n-3} y^3 + \ldots \mp x^3 y^{2n-3} \pm x y^{2n-1}]^2\}. \text{(D)}$$

Si l'on y change y^2 en $-y^2$, et que l'on transpose le carré *négatif*, on obtient celle-ci :

$$\left.\begin{array}{r}[x^{2n} + x^{2n-2} y^2 + \ldots + x^2 y^{2n-2} + y^{2n}]^2 = (x^{2n})^2 + (x^{2n-1} y)^2 + \ldots + (x y^{2n-1})^2 + (y^{2n})^2 \\ + [xy\,(x^{2n-2} + x^{2n-4} y^2 + \ldots + x^2 y^{2n-4} + y^{2n-2})]^2;\end{array}\right\} \text{(E)}$$

laquelle donne une infinité de solutions de ce problème d'Arithmétique :

Trouver un nombre N, *égal à la somme de* n *carrés* (**), *et dont le carré soit une somme de* 2n *carrés*.

(*) Les résultats précédents sont applicables à l'*équation binôme*; mais je n'insiste pas sur ce point, trop différent du sujet principal

(**) n remplace $n + 1$.

Si, par exemple, $n = 3$, on peut prendre $N = 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = 85$. En effet,

$$85^2 = (2^6)^2 + (2^5)^2 + (2^4)^2 + (2^3)^2 + (2^2)^2 + (2)^2 + 1^2 + [2(2^4 + 2^2 + 1)]^2,$$

ou

$$7\,225 = 64^2 + 32^2 + 16^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 + 42^2$$

$$= 4\,096 + 1\,024 + 256 + 64 + 16 + 4 + 1 + 1\,764.$$

7. Remarque. L'identité (D) peut être ainsi énoncée:

Si l'on considère les progressions

$$1 - x^2 + x^4 - \ldots \pm x^{2n}, \quad x - x^3 + x^5 - \ldots \mp x^{2n-1},$$

$$1 - x^2 + x^4 - \ldots + x^{4n},$$

la troisième est égale au carré de la première, augmenté du carré de la deuxième (*).

8. *Autres identités*:

$$\left.\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2)^3 = x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4 + x^2(x^2+y^2)^2 + x^2(y^2+z^2)^2 + y^2(y^2+z^2)^2 \\ + y^2(z^2+x^2)^2 + z^2(z^2+x^2)^2 + z^2(x^2+y^2)^2,\end{aligned}\right\} (F)$$

$$\left.\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2)^3 = x^2z^4 + y^2x^4 + z^2y^4 + x^2(y^2+z^2)^2 + x^2(z^2+x^2)^2 + y^2(z^2+x^2)^2 \\ + y^2(x^2+y^2)^2 + z^2(x^2+y^2)^2 + z^2(y^2+z^2)^2.\end{aligned}\right\} (G)$$

1° Le second membre de (F), ordonné suivant les puissances de z, est

$$x^2y^4 + x^2(x^2+y^2)^2 + x^2y^4 + y^6 + x^4y^2$$

$$+ [x^4 + 2x^2y^2 + 2y^4 + 2x^2y^2 + x^4 + (x^2+y^2)^2]\, z^2$$

$$+ [y^2 + x^2 + y^2 + y^2 + 2x^2]\, z^4 + z^6$$

$$= (x^2+y^2)^3 + 3(x^2+y^2)^2 z^2 + 3(x^2+y^2) z^4 + z^6 = (x^2+y^2+z^2)^3.$$

2° L'égalité (G) se déduit de (F), par un changement de lettres qui n'altère pas $x^2 + y^2 + z^2$; donc elle est démontrée aussi.

9. *Remarque*. D'après ces identités: 1° *Le cube de la somme de trois carrés*

(*) Le mot *somme*, qui devrait être énoncé trois fois, est sous-entendu.

est une somme de neuf carrés ; 2° généralement, *la décomposition peut être effectuée de deux manières* (*).

Exemple :

$$(1^2+2^2+3^2)^3 = 9^2+2^2+12^2+10^2+15^2+39^2+13^2+10^2+20^2$$
$$= 4^2+18^2+3^2+30^2+20^2+5^2+15^2+26^2+13^2,$$

ou

$$2\,744 = 81+4+144+100+225+1\,521+169+100+400$$
$$= 16+324+9+900+400+25+225+676+169.$$

II.

Décompositions de $(x^2+y^2+z^2)^n$.

10. Lemme. *Si un nombre est une somme de trois carrés, son carré est également une somme de trois carrés.*

Cette proposition résulte, on le sait, de l'identité

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = (2xz)^2+(2yz)^2+(x^2+y^2-z^2)^2 \quad (^{**}).$$

11. Théorème. *Le cube d'une somme de trois carrés est une somme de trois carrés.* (***)

Dans l'identité connue:

$$\left.\begin{array}{r}(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)= \\ (ab'-ba')^2+(bc'+cb')^2+(ca'+ac')^2+(aa'+bb'-cc')^2,\end{array}\right\} \quad (2)$$

supposons :

$$a=x,\ b=y,\ c=z,\ a'=2xz,\ b'=2yz,\ c'=z^2-x^2-y^2.$$

En vertu de la relation (1), et à cause de $ab'-ba'=0$, nous aurons

$$(x^2+y^2+z^2)^3 = [y(3z^2-x^2-y^2)]^2+[x(3z^2-x^2-y^2)]^2+[z(z^2-3x^2-3y^2)]^2; \quad (H)$$

(*) Il est clair que, si les nombres donnés ne sont pas tous inégaux, les deux décompositions se réduisent à une. En particulier,

$$(1+1+1)^3 = 4+4+4+4+4+4+1+1+1.$$

(**) *Nouvelles Annales*, 1874, p. 111; *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1876, p. 196; etc. Afin que le dernier carré ne soit pas nul, on peut supposer $x \gtreqless y \gtreqless z$.

(***) Ce théorème, que nous croyons nouveau, généralise plusieurs propriétés connues. Voir la Note *Sur quelques décompositions en carrés*.

et, par une permutation tournante :

$$(x^2+y^2+z^2)^3 = [z(3x^2-y^2-z^2)]^2 + [y(3x^2-y^2-z^2)]^2 + [x(x^2-3y^2-3z^2)]^2, \quad (H')$$

$$(x^2+y^2+z^2)^3 = [x(3y^2-z^2-x^2)]^2 + [z(3y^2-z^2-x^2)]^2 + [y(y^2-3z^2-3x^2)]^2. \quad (H'')$$

12. Remarque. *Dans aucune des décompositions* (H), (H'), (H''), *les trois carrés ne peuvent se réduire à deux.*

Considérons, par exemple, la décomposition (H), et supposons, successivement, $x^2+y^2=3z^2$, $z^2=3(x^2+y^2)$.

1° $x^2+y^2=3z^2$. Les nombres x, y, z doivent être supposés *premiers entre eux*. De là résulte, d'après la dernière égalité, que x et y sont *premiers avec* 3. Ainsi:

$$x = \mathfrak{M}.\,3 \pm 1, \; y = \mathfrak{M}.\,3 \pm 1;$$

puis

$$x^2+y^2 = \mathfrak{M}.\,3 + 2.$$

Donc l'hypothèse est inadmissible.

2° $z^2=3(x^2+y^2)$. Cette égalité se réduit à $3z'^2 = x^2+y^2$: on retombe sur le premier cas.

12. Lemme. *Si* $(x^2+y^2+z^2)^n$ *a la forme* $X^2+Y^2+Z^2$, $(x^2+y^2+z^2)^{n+1}$ *a cette même forme* (*).

Soit

$$(x^2+y^2+z^2)^n = X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2; \quad (3)$$

et, par conséquent (2),

$$(x^2+y^2+z^2)^{n+1} =$$

$$(X_n y - Y_n x)^2 + (X_n z + Z_n x)^2 + (Y_n z + Z_n y)^2 + (Z_n z - X_n x - Y_n y)^2. \quad (**)$$

Supposons, ce qui a lieu pour $n=2$ et pour $n=3$:

$$X_n y - Y_n x = 0. \quad (4)$$

Alors,

$$(x^2+y^2+z^2)^{n+1} = X_{n+1}^2 + Y_{n+1}^2 + Z_{n+1}^2;$$

avec les valeurs :

$$X_{n+1} = X_n z + Z_n x, \; Y_{n+1} = Y_n z + Z_n y, \; Z_{n+1} = Z_n z - X_n x - Y_n y. \quad (5)$$

(*) Généralisation d'une propriété démontrée dans la Note citée.
(**) On verra, tout-à-l'heure, pourquoi ce trinôme a été changé de signe.

D'après ces formules,

$$X_{n+1}y - Y_{n+1}x = z\,(X_n y - Y_n x) = 0.$$

Si donc l'hypothèse (4) est vérifiée pour une certaine valeur de n, elle subsiste pour la valeur suivante. Nous venons de rappeler qu'elle a lieu pour $n = 3$; donc elle est générale, et le Lemme est démontré. En conséquence:

13. THÉORÈME. *Toute puissance, entière et positive, d'une somme de trois carrés, est une somme de trois carrés.*

14. *Application.* Si l'on prend, comme valeurs initiales:

$$X_1 = x, \quad Y_1 = y, \quad Z_1 = z,$$
$$X_2 = 2xz,\ Y_2 = 2yz,\ Z_2 = z^2 - x^2 - y^2,$$

on trouve, au moyen des formules (5):

$$X_3 = (3z^2 - x^2 - y^2)x,\ Y_3 = (3z^2 - x^2 - y^2)y,\ Z_3 = (z^2 - 3x^2 - 3y^2)z;$$

$$X_4 = 4\,(z^2 - x^2 - y^2)xz,\ Y_4 = 4\,(z^2 - x^2 - y^2)yz,\ Z_4 = z^4 - 6\,(x^2 + y^2)z^2 + (x^2 + y^2)^2;$$

$$X_5 = \left[5z^4 - 10\,(x^2 + y^2)\,z^2 + (x^2 + y^2)^2\right]x,\ Y_5 = \left[5z^4 - 10\,(x^2 + y^2)z^2 + (x^2 + y^2)^2\right]y,$$

$$Z_5 = \left[z^4 - 10\,(x^2 + y^2)\,z^2 + 5\,(x^2 + y^2)^2\right]z; \qquad (*)$$

etc.

En particulier:

$$(2^2 + 3^2 + 4^2)^2 = 29^2 = 16^2 + 24^2 + 3^2,\ 29^3 = 70^2 + 105^2 + 92^2,$$

$$29^4 = 144^2 + 96^2 + 823^2,\ 29^5 = 1\,262^2 + 1\,893^2 + 3\,916^2;$$

ou

$$841 = 256 + 576 + 9,\ 24\,389 = 4\,900 + 11\,025 + 8\,464,$$

$$707\,281 = 20\,736 + 9\,216 + 677\,329,$$

$$20\,511\,149 = 1\,592\,644 + 3\,583\,449 + 25\,335\,056.$$

15. *Séries récurrentes.* Reprenons les formules:

$$X_{n+1} = X_n z + Z_n x,\ Z_{n+1} = Z_n z - X_n x - Y_n y,\ X_n y - Y_n x = 0.$$

Il résulte, de deux dernières,

$$Z_{n+1} = Z_n z - \left(x + \frac{y^2}{x}\right) X_n,\ Z_{n+2} = Z_{n+1} z - \left(x + \frac{y^2}{x}\right) X_{n+1};$$

(*) Quand on adopte, dans les formules (5), d'autres combinaisons de signes, on trouve des valeurs moins simples ou moins *intéressantes* que celles-ci. Par exemple:

$$X_5 = (x^2+y^2+z^2)^2\,x,\ Y_5 = (x^2+y^2+z^2)^2\,y,\ Z_5 = (x^2+y^2+z^2)^2\,z.$$

puis, de celles-ci et de la première,

$$Z_{n+1} z - Z_{n+2} = (Z_n z - Z_{n+1}) z + (x^2 + y^2) Z_n,$$

ou

$$Z_{n+2} = 2z Z_{n+1} - (x^2 + y^2 + z^2) Z_n. \qquad (K)$$

Ainsi, *les polynômes Z_n forment une suite récurrente.*

Les quantités X_n, Y_n jouissent de la même propriété. On trouve aisément, au moyen de la relation

$$X_{n+1} = X_n z + Z_n x:$$

$$X_{n+3} = 3z X_{n+2} - (x^2 + y^2 + 3z^2) X_{n+1} + (x^2 + y^2 + z^2) z X_n; \qquad (K')$$

et, par un changement de lettres,

$$Y_{n+3} = 3z Y_{n+2} - (x^2 + y^2 + 3z^2) Y_{n+1} + (x^2 + y^2 + z^2) z Y_n. \qquad (K'')$$

16. *Vérifications.* On a vu que:

$$Z_2 = z^2 - u^2,\ Z_3 = (z^2 - 3u^2) z,\ Z_4 = z^4 - 6u^2 z^2 + u^4,\ Z_5 = (z^4 - 10u^2 z^2 + 5u^4) z,$$

$$X_2 = 2xz,\ X_3 = (3z^2 - u^2) x,\ X_4 = 4(z^2 - u^2) xz,\ X_5 = (5z^4 - 10u^2 z^2 + u^4) x;$$

u^2 représentant $x^2 + y^2$.

Or, identiquement:

$$1^\circ\ z^4 - 10 u^2 z^2 + 5 u^4 = 2 [z^4 - 6 u^2 z^2 + u^4] - (z^2 + u^2)(z^2 - 3 u^2);$$

$$2^\circ\ 5 z^4 - 10 u^2 z^2 + u^4 = 12 (z^2 - u^2) z^2 + (u^2 + 2z^2)(u^2 - 3z^2) z^2 + 2 (z^2 + u^2) z^2.$$

17. *Valeur de Z_n.* L'égalité (K) donne l'équation *caractéristique*:

$$\theta^2 - 2 z \theta + z^2 + u^2 = 0;$$

d'où

$$\theta = z \pm u \sqrt{-1}.$$

On a donc

$$Z_n = (\alpha + \beta \sqrt{-1})(z + u \sqrt{-1})^n + (\alpha - \beta \sqrt{-1})(z - u \sqrt{-1})^n;$$

α, β étant des *constantes*, à déterminer par les conditions:

$$Z_1 = z = (\alpha + \beta \sqrt{-1})(z + u \sqrt{-1}) + (\alpha - \beta \sqrt{-1})(z - u \sqrt{-1}),$$

$$Z_2 = z^2 - u^2 = (\alpha + \beta \sqrt{-1})(z + u \sqrt{-1})^2 + (\alpha - \beta \sqrt{-1})(z - u \sqrt{-1})^2.$$

On trouve

$$\alpha = \tfrac{1}{2},\ \beta = 0;$$

en sorte que la formule ci dessus devient

$$Z_n = \frac{1}{2}\left[(z+u\sqrt{-1})^n + (z-u\sqrt{-1})^n\right]. \qquad (6)$$

18. *Valeurs de* X_n, Y_n. La relation

$$X_n y - Y_n x = 0$$

donne

$$\frac{X_n}{x} = \frac{Y_n}{y} = \frac{\sqrt{X_n^2 + Y_n^2}}{u}. \qquad (4)$$

D'un autre côté, de l'égalité

$$(x^2+y^2+z^2)^n = X^2_n + Y^2_n + Z^2_n, \qquad (1)$$

ou tire, eu égard à la valeur (6) :

$$X_n^2 + Y_n^2 = (u^2+z^2)^n - \frac{1}{4}\left[(z+u\sqrt{-1})^n + (z-u\sqrt{-1})^n\right]^2$$

$$= -\frac{1}{4}\left[(z+u\sqrt{-1})^n - (z-u\sqrt{-1})^n\right]^2;$$

ou bien

$$\pm\sqrt{X_n^2+Y^2_n} = \frac{1}{2}\left[(z+u\sqrt{-1})^n - (z-u\sqrt{-1})^n\right]\sqrt{-1}. \qquad (7)$$

Les formules cherchées sont donc, si l'on adopte le signe *inférieur*: (*)

$$X_n = -\frac{x}{2u}\left[(z+u\sqrt{-1})^n - (z-u\sqrt{-1})^n\right]\sqrt{-1}, \qquad (8)$$

$$Y_n = -\frac{y}{2u}\left[(z+u\sqrt{-1})^n - (z-u\sqrt{-1})^n\right]\sqrt{-1}. \qquad (9)$$

19. *Suite*. Soient encore:

$$z = \rho\cos\omega, \quad u = \rho\sin\omega;$$

de manière que

$$\rho^2 = x^2+y^2+z^2.$$

Nous aurons

$$(z+u\sqrt{-1})^n = \rho^n(\cos n\omega + \sqrt{-1}\sin n\omega),$$

$$(z-u\sqrt{-1})^n = \rho^n(\cos n\omega - \sqrt{-1}\sin n\omega);$$

et, finalement :

(*) L'autre signe donnerait $X_1 = -x$, $Y_1 = -y$.

$$X_n = \frac{x}{u}\rho^n \sin n\omega,\quad Y_n = \frac{y}{u}\rho^n \sin n\omega,\quad Z_n = \rho^n \cos n\omega. \qquad (L)\ (*)$$

20. *Remarques* I. La relation (K') devient, si l'on remplace X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3} par leurs valeurs:

$$\sin(n+3)\,\omega = 3\cos\omega \sin(n+2)\omega - (2\cos^2\omega + \sin^2\omega)\sin(n+1)\omega + \cos\omega \sin n\omega.$$

Pour vérifier cette relation, il suffit d'employer les formules de Simpson:

$$\sin(n+2)\omega = 2\cos\omega \sin(n+1)\omega - \sin n\omega,$$

$$\sin(n+3)\omega = 2\cos\omega \sin(n+2)\omega - \sin(n+1)\omega.$$

II. Par conséquent, aux valeurs (K'), (K''), on peut substituer celles-ci:

$$X_{n+2} = 2zX_{n+1} - (x^2 + y^2 + z^2)\,X_n,$$

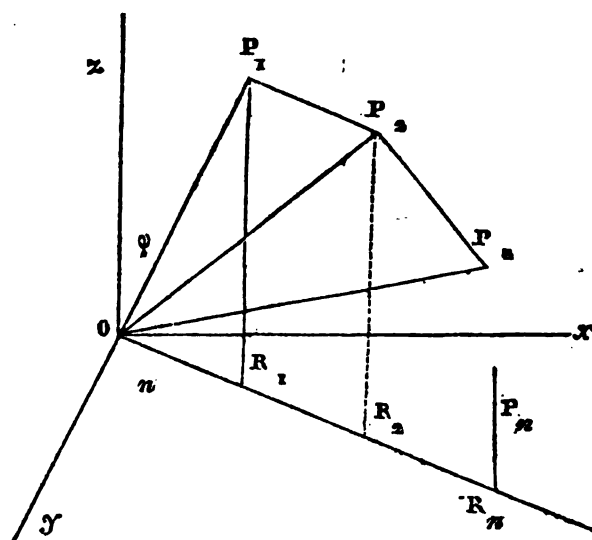
$$Y_{n+2} = 2zY_{n+1} - (x^2 + y^2 + z^2)\,Y_n,$$

de même forme que (K).

III. D'après les formules (L):

$$X_nX_{n-1} + Y_nY_{n-1} + Z_nZ_{n-1} = \rho^{2n-1}\left[\sin n\omega \sin(n-1)\omega + \cos n\omega \cos(n-1)\omega\right],$$

ou

$$X_nX_{n-1} + Y_nY_{n-1} + Z_nZ_{n-1} = \rho^{2n-1}\cos\omega. \qquad (11)$$

21 *Interprétation géométrique.* Pour rendre homogènes ces mêmes formules (L), je fais

$$X_n = \rho^{n-1}x_n,\ Y_n = \rho^{n-1}y_n,\ Z_n = \rho^{n-1}z_n;$$

ou

$$x_n = \frac{x}{u}\rho\sin n\omega,\ y_n = \frac{y}{u}\rho\sin n\omega,\ z_n = \rho\cos n\omega. \quad (12)$$

x_n, y_n, z_n sont les coordonnées rectangulaires d'un point P_n; $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ sont celles du *premier point*, P_1.

Considérons P_1, P_2,.. P_n,.. comme les sommets d'un polygone.

(*) On pourrait supprimer les calculs précédents, et écrire, tout d'abord, ces remarquables formules. Il m'a semblé préférable de montrer la marche que mes idées ont suivie.

1. A cause de la relation

$$X_n y - Y_n x = 0,$$

ce polygone est contenu dans le plan $P_1 Oz$

2.° En vertu des formules (12), $OP_n = \rho$: *tous les rayons* OP_1, $OP_2, \ldots OP_n$ *sont égaux.*

3.° La relation (11), étant mise sous la forme

$$x_{n-1} x_n + y_{n-1} y_n + z_{n-1} z_n = \rho^2 \cos\omega,$$

fait voir que *l'angle de deux rayons consécutifs est constant*: il est égal à P_1Oz.

En résumé, *le polygone* $P_1 P_2 \ldots P_n \ldots$ *est une ligne brisée régulière*, inscrite à une circonférence ayant l'origine pour centre.

22. *Généralisation.*

Supposons que le plan de la ligne brisée régulière fasse, avec le plan xy, un angle quelconque θ. Rapportons la ligne brisée aux axes rectangulaires OX, OY, situés dans son plan; OX étant, bien entendu, l'intersection de XOY avec xOy. Si le sommet - *origine* est situé sur OY, et que le rayon soit pris pour unité, les coordonnées d'un sommet quelconque M seront données par les deux systèmes de formules:

$$X_n = \sin n\omega, \quad Y_n = \cos n\omega; \quad (13)$$

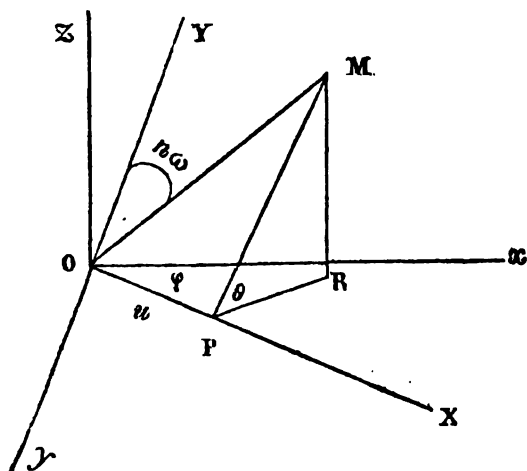
$$x_n = X_n \cos\varphi + Y_n \sin\varphi \cos\theta, \quad y_n = X_n \sin\varphi - Y_n \cos\varphi \cos\theta, \quad z_n = Y_n \sin\theta. \quad (14)$$

Il en résulte, en particulier:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = x = \sin\omega \cos\varphi + \cos\omega \sin\varphi \cos\theta, \quad y_1 = y = \sin\omega \sin\varphi - \cos\omega \cos\varphi \cos\theta, \\ z_1 = z = \cos\omega \sin\theta; \end{aligned}\right\} (15)$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 = \sin 2\omega \cos\varphi + \cos 2\omega \sin\varphi \cos\theta, \quad y_2 = \sin 2\omega \sin\varphi - \cos 2\omega \cos\varphi \cos\theta, \\ z_2 = \cos 2\omega \sin\theta. \end{aligned}\right\} (16)$$

On tire, des valeurs (15):

$$\sin\omega = x \cos\varphi + y \sin\varphi, \quad \cos\omega = \frac{z}{\sin\theta}.$$

Par conséquent:

$$\left.\begin{aligned}
x_2 &= 2\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left[x\cos\varphi + y\sin\varphi\right] z + \left[\frac{z^2}{\sin^2\theta} - (x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2\right]\sin\varphi\cos\theta,\\
y_2 &= 2\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left[x\cos\varphi + y\sin\varphi\right] z - \left[\frac{z^2}{\sin^2\theta} - (x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2\right]\cos\varphi\cos\theta,\\
z_2 &= \left[\frac{z^2}{\sin^2\theta} - (x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2\right]\sin\theta.
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

23. *Remarque*. Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, ces expressions deviennent, d'abord :

$$x_2 = 2\cos\varphi\,[x\cos\varphi + y\sin\varphi]\,z, \quad y_2 = 2\sin\varphi\,[x\cos\varphi + y\sin\varphi]\,z,$$

$$z_2 = z^2 - (x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2;$$

puis, à cause de

$$\cos\varphi = \frac{x}{u}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{u}:$$

$$x_2 = 2zx, \quad y_2 = 2zy, \quad z_2 = z^2 - x^2 - y^2.$$

Ainsi, nous retrouvons les formules connues (14). (*)

24. *Suite*. Dans les relations (14), changeons n en $n-1$ et en $n+1$. Nous aurons, par exemple:

$$x_{n-1} = \sin(n-1)\omega\cos\varphi + \cos(n-1)\omega\sin\varphi\cos\theta,$$

$$x_n = \sin n\omega\cos\varphi + \cos n\omega\sin\varphi\cos\theta,$$

$$x_{n+1} = \sin(n+1)\omega\cos\varphi + \cos(n+1)\omega\sin\varphi\cos\theta;$$

puis, en vertu des formules de Simpson,

$$x_{n+1} = 2x_n\cos\omega - x_{n-1}. \quad (18)$$

(*) D'après ce résultat, joint aux formules (17), il ne paraît pas possible de former une décomposition de $(x^2 + y^2 + z^2)^2$, *essentiellement* différente de celle-ci :

$$(2xz)^2 + (2yz)^2 + (x^2 + y^2 - z^2)^2.$$

Donc *les cordonnées des sommets du polygone forment trois séries récurrentes*; etc. (*)

III.

DÉCOMPOSITION DE $(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)\ldots\ldots$

25. *Cas particulier*. Il est évident que

$$(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)(x^{16}+y^{16})=P^2+Q^2, \qquad (19)$$

P, Q étant des polynômes homogènes (**).

Cette égalité est une conséquence de celle-ci:

$$(x+y\sqrt{-1})(x^2+y^2\sqrt{-1})(x^4+y^4\sqrt{-1})(x^8+y^8\sqrt{-1})=P+Q\sqrt{-1}. \quad (20)$$

Soit $Ax^p y^q$ un terme quelconque de P. D'après une remarque faite par Euler (***), $A=\pm 1$. Soit ensuite

$$q=2^\beta+2^{\beta'}+2^{\beta''}+\ldots,$$

le nombre n, des termes du second membre, étant *pair*. On trouve que:

$$A=+1, \quad si \quad n=4\mu;$$

$$A=-1, \quad si \quad n=4\mu+2. \quad (****)$$

Soit, semblablement, $B\,x^{p'}y^{q'}$ un terme quelconque du polynôme Q. L'exposant q' doit être la somme d'un nombre *impair* de puissances de 2. n' étant ce nombre impair:

(*) L'inspection d'une figure prouve que

$$\frac{x_{n-1}+x_{n+1}}{2}=x_n\cos\omega.$$

Ainsi, pour établir la relation (18), on peut même se passer des formules de Simpson. Peut-être reviendrai-je sur ce sujet.

(**) Pour fixer les idées, et simplifier l'écriture, nous prenons seulement *quatre* facteurs binômes; mais la méthode est générale

(***) *Introduction à l'Analyse*, tome I. p. 254.

(****) En effet:

$$(\sqrt{-1})^{4\mu}=+1, \quad (\sqrt{-1})^{4\mu+2}=-1.$$

$$B = +1, \; si \; n' = 4\mu + 1,$$

$$B = -1, \; si \; n' = 4\mu + 3. \; (*)$$

Celà posé, formons le tableau suivant, dans lequel i remplace $\sqrt{-1}$.

Décomposition	Terme correspondant
$15 = 1 + 2 + 4 + 8$	$+ 1$
$14 = 2 + 4 + 8$	$- i$
$13 = 1 + 4 + 8$	$- i$
$12 = 4 + 8$	$- 1$
$11 = 1 + 2 + 8$	$- i$
$10 = 2 + 8$	$- 1$
$9 = 1 + 8$	$- 1$
$8 = 8$	$+ i$
$7 = 1 + 2 + 4$	$- i$
$6 = 2 + 4$	$- 1$
$5 = 1 + 4$	$- 1$
$4 = 4$	$+ i$
$3 = 1 + 2$	$- 1$
$2 = 2$	$+ i$
$1 = 1^0$	$+ i$

(I)

Il en résulte :

$$P = x^{15} - x^{12}y^3 - x^{10}y^5 - x^9y^6 - x^6y^9 - x^5y^{10} - x^3y^{12} + y^{15},$$

$$Q = x^{14}y + x^{13}y^2 + x^{11}y^4 - x^8y^7 + x^7y^8 - x^4y^{11} - x^2y^{13} - xy^{14};$$

(*) $(\sqrt{-1})^{4\mu+1} = + \sqrt{-1}$, $(\sqrt{-1})^{4\mu+3} = - \sqrt{-1}$.

puis

$$\left.\begin{array}{l} x^{30} + x^{28} y^2 + x^{26} y^4 + \ldots + y^{30} = \\ [x^{15} - x^{12} y^3 - x^{10} y^5 - x^9 y^6 - x^6 y^9 - x^5 y^{10} - x^3 y^{12} + y^{15}]^2 \\ + [x^{14} y + x^{13} y^2 + x^{11} y^4 - x^8 y^7 + x^7 y^8 - x^4 y^{11} - x^2 y^{13} - x y^{14}]^2. \end{array}\right\} \quad (21)$$

26. *Remarques* I. Le premier membre égale $\frac{x^{32}-y^{32}}{x^2-y^2}$. Donc, en particulier,

$$\frac{x^{32}-1}{x^2-1} = P^2 + Q^2,$$

pourvu que

$$P = 1 - x^3 - x^5 - x^6 - x^9 - x^{10} - x^{12} + x^{15},$$

$$Q = x + x^2 + x^4 - x^7 + x^8 - x^{11} - x^{13} - x^{14}.$$

II. Si l'on remplace x par un nombre entier, supérieur à 1, *chacun des nombres entiers*

$$\frac{x^4-1}{x^2-1}, \quad \frac{x^8-1}{x^2-1}, \quad \frac{x^{16}-1}{x^2-1}, \quad \frac{x^{32}-1}{x^2-1}, \ldots$$

est la somme de deux carrés.

Par exemple,

$$\frac{2^{32}-1}{2^2-1} = 1\,431\,655\,765 = 27\,033^2 + 26\,474^2 = 730\,783\,089 + 700\,872\,676.$$

27. *Suite*. Soit encore le produit

$$\Pi = (x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)\ldots(x^k+y^k),$$

composé de n facteurs (*). Il est clair (et connu) que *le nombre des décompositions de* Π, *en une somme de deux carrés, est* 2^{n-1}. Pour les obtenir, ou pourrait généraliser ainsi l'égalité (20):

(*) $k = 2^n$.

$$(x \pm iy)\,(x^2 \pm iy^2)\,(x^4 \pm iy^4)\dots(x^{\frac{k}{2}} \pm iy^{\frac{k}{2}}) = P + iQ. \qquad (22)\,(*)$$

Mais, à cause des nombreuses combinaisons de signes, il couvient de modifier nn peu le calcul précédent.

Soient, pour plus de simplicité dans la notation :

$$A = (1 + iz)\,(1 + iz^2)\,(1 + iz^4)\,(1 + iz^8) = P + iQ,$$

et le tableau (I), déjà considéré.

Soit maintenant le produit

$$B = (1 - iz)\,(1 + iz^2)\,(1 - iz^4)\,(1 + iz^8),$$

qui diffère, de A, par le changement de z en $-z$, et de z^4 en $-z^4$. Pour former le tableau correspondant à B, il suffit d'appliquer la règle suivante :

Si, dans le tableau (I), *un terme de la première colonne renferme l'exposant* 1 *ou l'exposant* 4, *changez le signe correspondant. Si ce terme contient les deux exposants, conservez le signe.*

On trouve ainsi, au lieu de la seconde colonne du tableau (I) :

$$+1,\ +i,\ -i,\ +1,\ +i,\ -1,\ +1,\ +i,\ -i,\ +1,\ -1,\ -i,\ +1,\ +i,\ -i;$$

puis

$$B = z^{15} + iz^{14} - iz^{13} + z^{12} + iz^{11} - z^{10} + z^9 + iz^8 - iz^7 + z^6 - z^5 - iz^4 + z^3 + iz^2 - iz + 1.$$

En conséquence :

$$P = 1 + z^3 - z^5 + z^6 + z^9 - z^{10} + z^{12} + z^{15},$$

$$Q = -z + z^2 - z^4 - z^7 + z^8 + z^{11} - z^{13} + z^{14}.$$

Si, par exemple, $z = 2$:

$$P = 1 + 8 - 32 + 64 + 512 - 1024 + 4\,096 + 32\,768 = 36\,393,$$

$$Q = -2 + 4 - 16 - 128 + 256 + 2\,048 - 8\,192 + 16\,384 = 10\,354;$$

(*) Le premier membre a 2^n *valeurs*, ou plutôt 2^{n-1} *couples de valeurs*, *conjuguées* deux à deux. Chacun de ces couples produit une *seule* valeur de Q^2. La proposition que nous venons de rappeler est donc vérifiée.

puis (26, II)

$$36\ 393^2 + 10\ 354^2 = 1\ 431\ 655\ 765.\ (^*)$$

28. *Généralisation.* En répétant le raisonnement dont nous venons de faire usage, on forme le tableau suivant (**), qui représente les *seize* produits :

$$(1 \pm iz)\ (1 \pm iz^2)\ (1 + iz^4)\ (1 \pm iz^8)$$

		1	2	4	8	1+2	1+4	1+8	2+4	2+8	4+8	1+2+4	1+2+8	1+4+8	2+4+8	1+2+4+8
15=1+2+4+8	+1	−1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	−1	−1	−1	−1	+1
14=2+4+8	−i	−i	+i	+i	+i	+i	+i	+i	−i	−i	−i	−i	−i	−i	+i	+i
13=1+4+8	−i	+i	−i	+i	+i	+i	−i	−i	+i	+i	−i	−i	−i	+i	−i	+i
12=4+8	−1	−1	−1	+1	+1	−1	+1	+1	+1	+1	−1	+1	+1	−1	−1	−1
11=1+2+8	−i	+i	+i	−i	+i	−i	+i	−i	+i	−i	−i	−i	+i	−i	−i	+i
10=2+8	−1	−1	+1	−1	+1	+1	−1	+1	+1	−1	+1	+1	−1	+1	−1	−1
9=1+8	−1	+1	−1	−1	+1	+1	+1	−1	−1	+1	+1	+1	−1	−1	+1	−1
8=8	+i	+i	+i	+i	−i	+i	+i	−i	+i	−i	−i	+i	−i	−i	−i	−i
7=1+2+4	−i	+i	+i	+i	−i	−i	−i	+i	−i	+i	+i	+i	−i	−i	−i	+i
6=2+4	−1	−1	+1	+1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	+1	−1	+1	+1	−1	−1
5=1+4	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
4=4	+i	+i	+i	−i	+i	+i	−i	+i	−i	+i	−i	−i	+i	−i	−i	−i
3=1+2	−1	+1	+1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	+1	−1	−1	−1	+1	+1	−1
2=2	+i	+i	−i	+i	+i	−i	+i	+i	−i	−i	+i	−i	−i	+i	−i	−i
1=1	+i	−i	+i	+i	+i	−i	−i	−i	+i	+i	−i	+i	−i	−i	+i	−i

(*) Pour vérifier cette décomposition, au moyen de la première, il suffit de voir si

$$36\ 393^2 - 27\ 033^2 = 26\ 474^2 - 10\ 354^2,$$

ou si

$$63\ 426.\ 9\ 360 = 36\ 828.\ 16\ 120.$$

Or, en supprimant quelques facteurs communs, ou reconnait que ces produits sont égaux.

(**) Voici la règle mnémonique: *permanence de signe ou changement de signe, selon que le nombre des puissances de 2 est pair ou impair.*

Il en résulte les *seize* systèmes :

$$P_1 = 1 - z^3 - z^5 - z^6 - z^9 - z^{10} - z^{12} + z^{15},$$

$$Q_1 = z + z^2 + z^4 - z^7 + z^8 - z^{11} - z^{13} - z^{14};$$

$$P_2 = 1 + z^3 + z^5 - z^6 + z^9 - z^{10} - z^{12} - z^{15},$$

$$Q_2 = - z + z^2 + z^4 + z^7 + z^8 + z^{11} + z^{13} - z^{14};$$

$$P_3 = 1 + z^3 - z^5 + z^6 - z^9 + z^{10} - z^{12} - z^{15},$$

$$Q_3 = z - z^2 + z^4 + z^7 + z^8 + z^{11} - z^{13} + z^{14};$$

$$P_4 = 1 - z^3 + z^5 + z^6 - z^9 - z^{10} + z^{12} - z^{15},$$

$$Q_4 = z + z^2 - z^4 + z^7 + z^8 - z^{11} + z^{13} + z^{14};$$

$$P_5 = 1 - z^3 - z^5 - z^6 + z^9 + z^{10} + z^{12} - z^{15},$$

$$Q_5 = z + z^2 + z^4 - z^7 - z^8 + z^{11} + z^{13} + z^{14};$$

$$P_6 = 1 - z^3 + z^5 + z^6 + z^9 + z^{10} - z^{12} + z^{15},$$

$$Q_6 = - z - z^2 + z^4 - z^7 + z^8 - z^{11} + z^{13} + z^{14};$$

$$P_7 = 1 + z^3 - z^5 + z^6 + z^9 - z^{10} + z^{12} + z^{15},$$

$$Q_7 = - z + z^2 - z^4 - z^7 + z^8 + z^{11} - z^{13} + z^{14};$$

$$P_8 = 1 + z^3 + z^5 - z^6 - z^9 + z^{10} + z^{12} + z^{15},$$

$$Q_8 = - z + z^2 + z^4 + z^7 - z^8 - z^{11} - z^{13} + z^{14};$$

$P_9 = P_8$, $Q_9 = - Q_8$; $P_{10} = P_7$, $Q_{10} = - Q_7$; $P_{11} = P_6$, $Q_{11} = - Q_6$;

$P_{12} = P_5$, $Q_{12} = - Q_5$; $P_{13} = P_4$, $Q_{13} = - Q_4$; $P_{14} = P_3$, $Q_{14} = - Q_3$;

$P_{15} = P_2$, $Q_{15} = - Q_2$; $P_{16} = P_1$, $Q_{16} = - Q_1$.

Si l'on prend $z = 2$, on trouve:

$P_1 = 27\,033$, $Q_1 = 26\,474$; $P_2 = -37\,399$, $Q_2 = -5\,742$; $P_3 = -36\,311$, $Q_3 = 10\,638$;

$P_4 = -30\,119$, $Q_4 = 22\,902$; $P_5 = -27\,239$, $Q_5 = 26\,262$; $P_6 = 30\,297$, $Q_6 = 22\,666$;

$P_7 = 36\,393$, $Q_7 = 10\,354$; $P_8 = 37\,353$, $Q_8 = 6\,034$.

Les décompositions de

$$\frac{2^{32}-1}{2^2-1} = 1\,431\,655\,745,$$

différentes entre elles, sont donc

$$27\,033^2 + 26\,474^2,\ \ 37\,399^2 + 5\,742^2,\ \ 36\,311^2 + 10\,638^2,\ \ 30\,119^2 + 22\,902^2,$$

$$27\,239^2 + 26\,262^2,\ \ 30\,297^2 + 22\,666^2,\ \ 36\,393^2 + 10\,354^2,\ \ 37\,353^2 + 6\,034^2.$$

IV.

Décompositions en deux et en trois carrés.

19. Théorème. a, b *étant des nombres entiers; soient*

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 + b^2},\quad \beta = -a + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

La quantité

$$\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta},$$

dans laquelle n *est un nombre entier, supérieur à* 1, *est la somme de deux carrés.*

Cette proposition résulte de l'identité

$$\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta} = \left[\frac{\alpha^n \pm \beta^n}{\alpha + \beta}\right]^2 + \left[b\,\frac{\alpha^{n-1} \mp \beta^{n-1}}{\alpha + \beta}\right]^2, \qquad (24)\ (*)$$

dont la vérification est très facile.

20. *Remarque.* Si α, β sont des nombres entiers, pris arbitrairement, le premier membre peut n'être point la somme de deux carrés. Exemple:

(*) On doit prendre les signes supérieurs si *n* est *impair*.

Il en résulte les *seize* systèmes :

$$P_1 = 1 - z^3 - z^5 - z^6 - z^9 - z^{10} - z^{12} + z^{15},$$

$$Q_1 = z + z^2 + z^4 - z^7 + z^8 - z^{11} - z^{13} - z^{14};$$

$$P_2 = 1 + z^3 + z^5 - z^6 + z^9 - z^{10} - z^{12} - z^{15},$$

$$Q_2 = - z + z^2 + z^4 + z^7 + z^8 + z^{11} + z^{13} - z^{14};$$

$$P_3 = 1 + z^3 - z^5 + z^6 - z^9 + z^{10} - z^{12} - z^{15},$$

$$Q_3 = z - z^2 + z^4 + z^7 + z^8 + z^{11} - z^{13} + z^{14};$$

$$P_4 = 1 - z^3 + z^5 + z^6 - z^9 - z^{10} + z^{12} - z^{15},$$

$$Q_4 = z + z^2 - z^4 + z^7 + z^8 - z^{11} + z^{13} + z^{14};$$

$$P_5 = 1 - z^3 - z^5 - z^6 + z^9 + z^{10} + z^{12} - z^{15},$$

$$Q_5 = z + z^2 + z^4 - z^7 - z^8 + z^{11} + z^{13} + z^{14};$$

$$P_6 = 1 - z^3 + z^5 + z^6 + z^9 + z^{10} - z^{12} + z^{15},$$

$$Q_6 = - z - z^2 + z^4 - z^7 + z^8 - z^{11} + z^{13} + z^{14};$$

$$P_7 = 1 + z^3 - z^5 + z^6 + z^9 - z^{10} + z^{12} + z^{15},$$

$$Q_7 = - z + z^2 - z^4 - z^7 + z^8 + z^{11} - z^{13} + z^{14};$$

$$P_8 = 1 + z^3 + z^5 - z^6 - z^9 + z^{10} + z^{12} + z^{15},$$

$$Q_8 = - z + z^2 + z^4 + z^7 - z^8 - z^{11} - z^{13} + z^{14};$$

$$P_9 = P_8, \ Q_9 = - Q_8; \ P_{10} = P_7, \ Q_{10} = - Q_7; \ P_{11} = P_6, \ Q_{11} = - Q_6;$$

$$P_{12} = P_5, \ Q_{12} = - Q_5; \ P_{13} = P_4, \ Q_{13} = - Q_4; \ P_{14} = P_3, \ Q_{14} = - Q_3;$$

$$P_{15} = P_2, \ Q_{15} = - Q_2; \ P_{16} = P_1, \ Q_{16} = - Q_1.$$

Si l'on prend $z = 2$, on trouve:

$P_1 = 27\ 033$, $Q_1 = 26\ 474$; $P_2 = -37\ 399$, $Q_2 = -5\ 742$; $P_3 = -36\ 311$, $Q_3 = 10\ 638$;

$P_4 = -30\ 119$, $Q_4 = 22\ 902$; $P_5 = -27\ 239$, $Q_5 = 26\ 262$; $P_6 = 30\ 297$, $Q_6 = 22\ 666$;

$P_7 = 36\ 393$, $Q_7 = 10\ 354$; $P_8 = 37\ 353$, $Q_8 = 6\ 034$.

Les décompositions de

$$\frac{2^{32}-1}{2^2-1} = 1\ 431\ 655\ 745,$$

différentes entre elles, sont donc

$27\ 033^2 + 26\ 474^2$, $37\ 399^2 + 5\ 742^2$, $36\ 311^2 + 10\ 638^2$, $30\ 119^2 + 22\ 902^2$,

$27\ 239^2 + 26\ 262^2$, $30\ 297^2 + 22\ 666^2$, $36\ 393^2 + 10\ 354^2$, $37\ 353^2 + 6\ 034^2$.

IV.

Décompositions en deux et en trois carrés.

19. Théorème. a, b *étant des nombres entiers; soient*

$$\alpha = a + \sqrt{a^2+b^2},\ \beta = -a + \sqrt{a^2+b^2}.$$

La quantité

$$\frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{\alpha+\beta},$$

dans laquelle n *est un nombre entier, supérieur à* 1, *est la somme de deux carrés.*

Cette proposition résulte de l'identité

$$\frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{\alpha+\beta} = \left[\frac{\alpha^n \pm \beta^n}{\alpha+\beta}\right]^2 + \left[b\,\frac{\alpha^{n-1} \mp \beta^{n-1}}{\alpha+\beta}\right]^2, \qquad (24)\ (*)$$

dont la vérification est très facile.

20. *Remarque.* Si α, β sont des nombres entiers, pris arbitrairement, le premier membre peut n'être point la somme de deux carrés. Exemple:

(*) On doit prendre les signes supérieurs si *n* est *impair*.

Et, si n est *pair* :

$$\alpha^{2n-2} - \alpha^{2n-3}\beta + \alpha^{2n-4}\beta^2 - \ldots + \beta^{2n-2} =$$

$$[\alpha^{n-1} - \alpha^{n-2}\beta + \alpha^{n-3}\beta^2 - \ldots - \beta^{n-1}]^2 + \alpha\beta\,[\alpha^{n-2} - \alpha^{n-3}\beta + \ldots + \beta^{n-2}]^2. \ (*) \ (\mathrm{M}')$$

Par hypothèse, $\alpha\beta = b^2$. Conséquemment :

x, y *étant deux nombres entiers, inégaux, dont le produit soit un carré; le nombre*

$$x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \ldots + y^{2n}$$

est la somme de deux carrés et la somme de trois carrés.

V. On peut supposer x, y premiers entre eux. Alors, chacun d'eux doit être un carré. Donc

x, y *étant deux nombres entiers, premiers entre eux; le nombre*

$$x^{4n} - x^{4n-2}y^2 + x^{4n-4}y^4 - \ldots + y^{4n}$$

est la somme de deux carrés et la somme de trois carrés. ($n > 1$).

Exemple : $2^8 - 2^6 + 2^4 - 2^2 + 1 = 205 = 13^2 + 6^2 = 5^2 + 12^2 + 7^2$.

31. *Développements des carrés.* Dans l'identité

$$\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta} = \left[\frac{\alpha^n \pm \beta^n}{\alpha + \beta}\right]^2 + \left[b\,\frac{\alpha^{n-1} \mp \beta^{n-1}}{\alpha + \beta}\right]^2, \qquad (14)$$

posons $2n - 1 = 4\mu + 1$, ou

$$n = 2\mu + 1.$$

Puisque n est *impair* :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha^{4\mu+1} + \beta^{4\mu+1}}{\alpha + \beta} &= \left[\frac{\alpha^{2\mu+1} + \beta^{2\mu+1}}{\alpha + \beta}\right]^2 + \left[b\,\frac{\alpha^{2\mu} - \beta^{2\mu}}{\alpha + \beta}\right]^2, \\ \frac{\alpha^{2\mu+1} + \beta^{2\mu+1}}{\alpha + \beta} &= \left[\frac{\alpha^{\mu+1} \pm \beta^{\mu+1}}{\alpha + \beta}\right]^2 + \left[b\,\frac{\alpha^{\mu} \mp \beta^{\mu}}{\alpha + \beta}\right]^2. \ (**) \end{aligned}\right\} (28)$$

Soient, comme précédemment :

(*) Les identités (M) (M') ne diffèrent pas de (D).

(**) Les signes supérieurs, si μ est *pair*.

$$\frac{\alpha^{\mu+1} \pm \beta^{\mu+1}}{\alpha+\beta} = f, \quad b\,\frac{\alpha^{\mu} \mp \beta^{\mu}}{\alpha+\beta} = g. \qquad (39)$$

Il résulte, de ces valeurs :

$$\left.\begin{aligned} f^2 &= \frac{\alpha^{2\mu+2} \pm 2\alpha^{\mu+1}\beta^{\mu+1} + \beta^{2\mu+2}}{(\alpha+\beta)^2} \\ &= \alpha^{2\mu} - 2\alpha^{2\mu-1}\beta + 3\alpha^{2\mu-2}\beta^2 - 4\alpha^{2\mu-3}\beta^3 + \ldots \mp \mu\alpha^{\mu+1}\beta^{\mu-1} \\ &\pm (\mu+1)\alpha^{\mu}\beta^{\mu} \mp \mu\alpha^{\mu-1}\beta^{\mu+1} \pm \ldots + 3\alpha^2\beta^{2\mu-2} - 2\alpha\beta^{2\mu-1} + \beta^{2\mu}, \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

$$\left.\begin{aligned} g^2 &= \alpha\beta\,\frac{\alpha^{2\mu} \mp 2\alpha^{\mu}\beta^{\mu} + \beta^{2\mu}}{(\alpha+\beta)^2} \\ &= \alpha^{2\mu-1}\beta - 2\alpha^{2\mu-8}\beta^2 + 3\alpha^{2\mu-3}\beta^3 - 4\alpha^{2\mu-4}\beta^4 + \ldots \pm (\mu-1)\alpha^{\mu+1}\beta^{\mu-1} \\ &\mp \mu\alpha^{\mu}\beta^{\mu} \pm (\mu-1)\alpha^{\mu-1}\beta^{\mu+1} \mp \ldots + 3\alpha^3\beta^{2\mu-3} - 3\alpha^2\beta^{2\mu-2} + \alpha\beta^{2\mu-1}, \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

$$\left.\begin{aligned} f^2 - g^2 &= \alpha^{2\mu} - 3\alpha^{2\mu-1}\beta + 5\alpha^{2\mu-2}\beta^2 - \ldots \mp (2\mu-1)\alpha^{\mu+1}\beta^{\mu-1} \\ &\pm (2\mu+1)\alpha^{\mu}\beta^{\mu} \mp (2\mu-1)\alpha^{\mu-1}\beta^{\mu+1} \pm \ldots + 5\alpha^2\beta^{2\mu-2} - 3\alpha\beta^{2\mu-1} + \beta^{2\mu}, \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

$$2fg = 2b\left[\alpha^{2\mu-1} - 2\alpha^{2\mu-2}\beta + 3\alpha^{2\mu-3}\beta^2 - \ldots - 3\alpha^2\beta^{2\mu-3} + 2\alpha\beta^{2\mu-2} - \beta^{2\mu-1}\right], \qquad (33)(^*)$$

$$\left[b\,\frac{\alpha^{2\mu} - \beta^{2\mu}}{\alpha+\beta}\right]^2 = \alpha\beta\left[\alpha^{2\mu-1} - \alpha^{2\mu-2}\beta + \alpha^{2\mu-3}\beta^2 - \ldots + \alpha\beta^{2\mu-2} - \beta^{2\mu-1}\right]^2. \qquad (34)$$

Rassemblant ces différents résultats, j'obtiens *la double identité* :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{4\mu+2} + \beta^{4\mu+2}}{\alpha+\beta} &= \left[\alpha^{2\mu} - \alpha^{2\mu-1}\beta + \alpha^{2\mu-2}\beta^2 - \ldots + \beta^{2\mu}\right]^2 \\ &+ \alpha\beta\left[\alpha^{2\mu-1} - \alpha^{2\mu-2}\beta + \alpha^{2\mu-3}\beta^2 - \ldots - \beta^{2\mu-1}\right]^2 \\ &= \left[\alpha^{2\mu} - 3\alpha^{2\mu-1}\beta + 5\alpha^{2\mu-2}\beta^2 - \ldots \pm (2\mu+1)\alpha^{\mu}\beta^{\mu} \mp \ldots + \beta^{2\mu}\right]^2 \\ &+ 4\alpha\beta\left[\alpha^{2\mu-1} - 2\alpha^{2\mu-2}\beta + 3\alpha^{2\mu-3}\beta^2 - \ldots - 3\alpha^2\beta^{2\mu-3} + 2\alpha\beta^{2\mu-2} - \beta^{2\mu-1}\right]^2 \\ &+ \alpha\beta\left[\alpha^{2\mu-1} - \alpha^{2\mu-2}\beta + \alpha^{2\mu-3}\beta^2 - \ldots + \alpha\beta^{2\mu-2} - \beta^{2\mu-1}\right]^2. \qquad (N) \end{aligned}$$

(*) Si μ est *pair*, les deux *termes du milieu* sont $-\mu\alpha^{\mu}\beta^{\mu-1}$, $+\mu\alpha^{\mu-1}\beta^{\mu}$.
Si μ est *impair*, ces termes sont $+\mu\alpha^{\mu}\beta^{\mu-1}$, $-\mu\alpha^{\mu-1}\beta^{\mu}$.

35. *Applications* I. $\mu = 6$.

$$\frac{\alpha^{25} + \beta^{25}}{\alpha + \beta} = [\alpha^{12} - \alpha^{11}\beta + \alpha^{10}\beta^2 - \alpha^9\beta^3 + \alpha^8\beta^4 - \ldots + \alpha^2\beta^{10} - \alpha\beta^{11} + \beta^{12}]^2$$

$$+ \alpha\beta\,[\alpha^{11} - \alpha^{10}\beta + \alpha^9\beta^2 - \alpha^8\beta^3 - \ldots - \alpha^2\beta^9 + \alpha\beta^{10} - \beta^{11}]^2$$

$$= [\alpha^{12} - 3\alpha^{11}\beta + 5\alpha^{10}\beta^2 - 7\alpha^9\beta^3 + 9\alpha^8\beta^4 - 11\alpha^7\beta^5 + 13\beta^6\beta^6 - 11\alpha^5\beta^7 + \ldots - 3\alpha\beta^{11} + \beta^{12}]^2$$

$$+ 4\alpha\beta\,[\alpha^{11} - 2\alpha^{10}\beta + 3\alpha^9\beta^2 - 4\alpha^8\beta^3 + 5\alpha^7\beta^4 - 6\alpha^6\beta^5 + 6\alpha^5\beta^6 - \ldots + 2\alpha\beta^{10} - \beta^{11}]^2$$

$$+ \alpha\beta\,[\alpha^{11} - \alpha^{10}\beta + \alpha^9\beta^2 - \alpha^8\beta^3 + \alpha^7\beta^4 - \alpha^6\beta^5 + \alpha^5\beta^6 - \alpha^4\beta^7 + \alpha^3\beta^8 - \alpha^2\beta^9 + \alpha\beta^{10} - \beta^{11}]^2.$$

II. $\mu = 5$.

$$\frac{\alpha^{21} + \beta^{21}}{\alpha + \beta} = [\alpha^{10} - \alpha^9\beta + \alpha^8\beta^2 - \alpha^7\beta^3 + \alpha^6\beta^4 - \alpha^5\beta^5 + \alpha^4\beta^6 - \alpha^3\beta^7 + \alpha^2\beta^8 - \alpha\beta^9 + \beta^{10}]^2$$

$$+ \alpha\beta\,[\alpha^9 - \alpha^8\beta + \alpha^7\beta^2 - \alpha^6\beta^3 + \alpha^5\beta^4 - \alpha^4\beta^5 + \alpha^3\beta^6 - \alpha^2\beta^7 + \alpha\beta^8 - \beta^9]^2$$

$$= [\alpha^{10} - 3\alpha^9\beta + 5\alpha^8\beta^2 - 7\alpha^7\beta^3 + 9\alpha^6\beta^4 - 11\alpha^5\beta^5 + 9\alpha^4\beta^6 - 7\alpha^3\beta^7 + 5\alpha^2\beta^8 - 3\alpha\beta^9 + \beta^{10}]^2$$

$$+ 4\alpha\beta\,[\alpha^9 - 2\alpha^8\beta + 3\alpha^7\beta^2 - 4\alpha^6\beta^3 + 5\alpha^5\beta^4 - 5\alpha^4\beta^5 + 4\alpha^3\beta^6 - 3\alpha^2\beta^7 + 2\alpha\beta^8 - \beta^9]^2$$

$$+ \alpha\beta\,[\alpha^9 - \alpha^8\beta + \alpha^7\beta^2 - \alpha^6\beta^3 + \alpha^5\beta^4 - \alpha^4\beta^5 + \alpha^3\beta^6 - \alpha^2\beta^7 + \alpha\beta^8 - \beta^9]^2.$$

III. $$\frac{2^{25} + 1}{2 + 1} = [2^{12} - 2^{11} + 2^{10} - 2^9 + 2^8 - 2^7 + 2^6 - 2^5 + 2^4 - 2^3 + 2^2 - 2 + 1]^2$$

$$+ 2\,[2^{11} - 2^{10} + 2^9 - 2^8 + 2^7 - 2^6 + 2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 - 1]^2$$

$$= [2^{12} - 3.2^{11} + 5.\,2^{10} - 7.\,2^9 + 9.\,2^8 - 11.\,2^7 + 13.\,2^6 - 11.2^5 + 9.\,2^4 - 7.\,2^3 + 5.\,2^2 - 3.2 + 1]^2$$

$$+ 8\,[2^{11} - 2.\,2^{10} + 3.\,2^9 - 4.\,2^8 + 5.\,2^7 - 6.\,2^6 + 6.\,2^5 - 5.\,2^4 + 4.\,2^3 - 3.\,2^2 + 2.\,2 - 1]^2$$

$$+ 2\,[2^{11} - 2^{10} + 2^9 - 2^8 + 2^7 - 2^6 + 2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 - 1]^2;$$

ou

$$11\,184\,811 = 2\,731^2 + 2.\,1365^2 = 967^2 + 8.\,903^2 + 2.\,1\,365^2$$

$$= 7\,458\,361 + 3\,726\,450 = 935\,089 + 6\,523\,272 + 3\,726\,450.$$

$$\text{IV. } \frac{2^{21}+1}{2+1} = \left[2^{10} - 2^9 + 2^8 - 2^7 + 2^6 - 2^5 + 2^4 - 2^3 + 2^2 - 2 + 1\right]^2$$

$$+ 2\left[2^9 - 2^8 + 2^7 - 2^6 + 2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 + 1\right]^2$$

$$= \left[2^{10} - 3.2^9 + 5.2^8 - 7.2^7 + 9.2^6 - 11.2^5 + 9.2^4 - 7.2^3 + 5.2^2 - 3.2 + 1\right]^2$$

$$+ 8\left[2^9 - 2.2^8 + 3.2^7 - 4.2^6 + 5.2^5 - 5.2^4 + 4.2^3 - 3.2^2 + 2.2 - 1\right]^2$$

$$+ 2\left[2^9 - 2^8 + 2^7 - 2^6 + 2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 + 1\right]^2,$$

ou

$$699\,061 = 683^2 + 2.\,341^2 = 199^2 + 8.\,231^2 + 2.\,341^2$$

$$= 466\,489 + 232\,562 = 39\,601 + 426\,888 + 232\,562.$$

36. *Suite.* Soit maintenant $2n - 1 = 4\mu - 1$, ou $n = 2\mu$. Les formules sont

$$\frac{\alpha^{4\mu-1} + \beta^{4\mu-1}}{\alpha+\beta} = \left[\frac{\alpha^{2\mu} - \beta^{2\mu}}{\alpha+\beta}\right]^2 + \left[b\,\frac{\alpha^{2\mu-1} + \beta^{2\mu-1}}{\alpha+\beta}\right]^2, \tag{35}$$

$$\frac{\alpha^{2\mu-1} + \beta^{2\mu-1}}{\alpha+\beta} = \left[\frac{\alpha^{\mu} \mp \beta^{\mu}}{\alpha+\beta}\right]^2 + \left[b\,\frac{\alpha^{\mu-1} \pm \beta^{\mu-1}}{\alpha+\beta}\right]^2 \text{ (*)}. \tag{36}$$

Si nous posons

$$\frac{\alpha^{\mu} \mp \beta^{\mu}}{\alpha+\beta} = f, \quad b\,\frac{\alpha^{\mu-1} \pm \beta^{\mu-1}}{\alpha+\beta} = g, \tag{37}$$

ces valeurs ne diffèrent, des précédentes (29), que par le changement de μ en $\mu - 1$. En conséquence, et sans nouveaux calculs:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\alpha^{4\mu-1} + \beta^{4\mu-1}}{\alpha+\beta} &= \left[\alpha^{2\mu-1} - \alpha^{2\mu-2}\beta + \alpha^{2\mu-3}\beta^2 - \ldots - \beta^{2\mu-1}\right]^2 \\
&\quad + \alpha\beta\left[\alpha^{2\mu-2} - \alpha^{2\mu-3}\beta + \alpha^{2\mu-4}\beta^2 - \ldots + \beta^{2\mu-2}\right]^2 \\
&= \left[\alpha^{2\mu-1} - \alpha^{2\mu-2}\beta + \alpha^{2\mu-3}\beta^2 - \ldots + \alpha\beta^{2\mu-2} - \beta^{2\mu-1}\right]^2 \\
&\quad + \alpha\beta\left[\alpha^{2\mu-2} - 3\alpha^{2\mu-3}\beta + 5\alpha^{2\mu-4}\beta^2 - \ldots + 5\alpha^2\beta^{2\mu-4} - 3\alpha\beta^{2\mu-3} + \beta^{2\mu-2}\right]^2 \\
&\quad + 4\alpha^2\beta^2\left[\alpha^{2\mu-3} - 2\alpha^{2\mu-4}\beta + 3\alpha^{2\mu-5}\beta^2 - \ldots - 3\alpha^2\beta^{2\mu-5} + 2\alpha\beta^{2\mu-4} - \beta^{2\mu-3}\right]^2.
\end{aligned}\right\} \text{(N')}$$

(*) Les signes supérieurs si μ est *pair*.

37. *Applications*. I. $\mu = 3$.

$$\frac{\alpha^{11}+\beta^{11}}{\alpha+\beta} = \left[\alpha^5 - \alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 - \alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 - \beta^5\right]^2$$

$$+ \alpha\beta\left[\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4\right]^2$$

$$= \left[\alpha^5 - \alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 - \alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 - \beta^5\right]^2$$

$$+ \alpha\beta\left[\alpha^4 - 3\alpha^3\beta + 5\alpha^2\beta^2 - 3\alpha\beta^3 + \beta^4\right]^2$$

$$+ 4\alpha^2\beta^2\left[\alpha^3 - 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 - \beta^3\right]^2.$$

II. $$\frac{2^{11}+1}{2+1} = \left[2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 - 1\right]^2 + 2\left[2^4 - 2^3 + 2^2 - 2 + 1\right]^2$$

$$= \left[2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 - 1\right]^2 + 2\left[2^4 - 3.\ 2^3 + 5.\ 2^2 - 3.\ 2 + 1\right]^2$$

$$+ 16\left[2^3 - 2.\ 2^2 + 2.\ 2 - 1\right]^2,$$

ou

$$683 = 21^2 + 2.\ 11^2 = 21^2 + 2.\ 7^2 + 16.\ 3^2$$

$$= 441 + 242 = 441 + 98 + 144.$$

38. *Autre décomposition*. En supposant toujours

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \beta = -a + \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{23}$$

je dis que

$$\left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta}\right)^2 = \left[\frac{(\alpha^n - \beta^n)b \pm 2ab^n}{2(a^2 + b^2)}\right]^2 + \left[\frac{(\alpha^n - \beta^n)a \mp 2b^{n+1}}{2(a^2 + b^2)}\right]^2. \text{ (n } impair\text{) (*)} \tag{38}$$

En effet, le second membre égale

$$\frac{(\alpha^n - \beta^n)^2 + 4b^{2n}}{4(a^2 + b^2)} = \frac{(\alpha^n - \beta^n)^2 + 4(\alpha\beta)^n}{4(a^2 + b^2)} = \frac{(\alpha^n + \beta^n)^2}{(\alpha + \beta)^2}.$$

Voyons quelles combinaisons de signes l'on doit adopter, si l'on veut que les deux parties du second membre se réduisent à des nombres entiers.

(*) Afin que le premier membre soit entier.

D'après les valeurs (23),

$$\alpha^n - \beta^n = 2\left[a^n + C_{n,2}\, a^{n-2}(a^2+b^2) + \ldots\right] = 2a^n + 2\,\mathcal{M}\,(a^2+b^2);$$

donc la première fraction devient

$$\frac{a^n b \pm ab^n + \mathcal{M}.\,(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = \mathrm{E} + ab\,\frac{a^{n-1} \pm b^{n-1}}{a^2+b^2},$$

E étant un nombre entier.

1.° Si $n = 4\mu + 1$,

$$\frac{a^{n-1} \pm b^{n-1}}{a^2+b^2} = \frac{a^{4\mu} \pm b^{4\mu}}{a^2+b^2}.$$

La *seconde* valeur est entière; la première ne l'est pas. (*)

2.° Si $n = 4\mu - 1$,

$$\frac{a^{n-1} \pm b^{n-1}}{a^2+b^2} = \frac{a^{4\mu-2} \pm b^{4\mu-2}}{a^2+b^2}:$$

la *première* valeur est entière; la seconde ne l'est pas.

Les mêmes conclusions subsistent pour le dernier terme de l'égalité (38). Elle se décompose donc ainsi:

$$\left[\frac{\alpha^{4\mu+1}+\beta^{4\mu+1}}{\alpha+\beta}\right]^2 = \left[\frac{(\alpha^{4\mu+1}-\beta^{4\mu+1})\,b-2ab^n}{a^2+b^2}\right]^2 + \left[\frac{(\alpha^{4\mu+1}-\beta^{4\mu+1})\,a+2b^{n+1}}{a^2+b^2}\right]^2, \quad (\mathrm{P})$$

$$\left[\frac{\alpha^{4\mu-1}+\beta^{4\mu-1}}{\alpha+\beta}\right]^2 = \left[\frac{(\alpha^{4\mu-1}-\beta^{4\mu-1})\,b+2ab^n}{a^2+b^2}\right]^2 + \left[\frac{(\alpha^{4\mu-1}-\beta^{4\mu-1})a-2b^{n+1}}{a^2+b^2}\right]^2. \quad (\mathrm{P}')$$

39. *Applications.* I. $n = 5$. On trouve

$$\left(\frac{\alpha^5+\beta^5}{\alpha+\beta}\right)^2 = (16a^3b + 4ab^3)^2 + (16a^4 + 4a^2b^2 + b^4)^2,$$

ou

$$(16a^4 + 12a^2b^2 + b^4)^2 = (16a^3b + 4ab^3)^2 + (16a^4 + 4a^2b^2 + b^4)^2.$$

(*) Pour éviter toute difficulté, nous supposons a et b *premiers entre eux*. Alors la fraction $\frac{ab}{a^2+b^2}$ est *irréductible*, et la discussion porte sur $\frac{a^{n-1} \pm b^{n-1}}{a^2+b^2}$.

II. $n = 3$. De même,

$$\left(\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta}\right)^2 = (4\,ab)^2 + (4a^2 - b^2)^2,$$

ou

$$(4a^2 + b^2) = (4ab)^2 + (4a^2 - b^2)^2.$$

40. *Remarque*. L'identité (38) donne *des infinités* de solutions de l'équation indéterminée

$$z^2 = x^2 + z^2;$$

savoir:

$$z = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta}, \quad x = \frac{(\alpha^n - \beta^n)\,b \pm 2ab^n}{2\,(a^2 + b^2)}, \quad y = \frac{(\alpha^n - \beta^n)\,a \mp 2b^{n+1}}{2\,(a^2 + b^2)}. \tag{39}$$

Si, par exemple, $n = 5$, on a ces formules particulières:

$$x = 16a^3b + 4ab^3, \quad y = 16a^4 + 4a^2b^2 + b^4, \quad z = 16a^4 + 12a^2b^2 + b^4, \tag{40}$$

dans lesquelles a et b sont encore *arbitraires*. On en conclut les systèmes suivants:

$$x = 20,\ y = 21,\ z = 29\ ;\ x = 136,\ y = 273,\ z = 305\ ;\ \text{etc.} \tag{40}$$

41. Théorème. *La quantité* $\alpha^{2n} + \beta^{2n}$ *est une somme quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux.*

En effet,

$$\alpha^{2n} + \beta^{2n} = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{\alpha + \beta} + b^2\,\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta}$$

$$= \left[\frac{\alpha^{n+1} \pm \beta^{n+1}}{\alpha + \beta}\right]^2 + \left[b\,\frac{\alpha^n \mp \beta^n}{\alpha + \beta}\right]^2 + b^2\left[\frac{\alpha^n \mp \beta^n}{\alpha + \beta}\right]^2 + b^2\left[b\,\frac{\alpha^{n-1} \pm \beta^{n-1}}{\alpha + \beta}\right]^2,$$

ou

$$\alpha^{2n} + \beta^{2n} = \left[\frac{\alpha^{n+1} \pm \beta^{n+1}}{\alpha + \beta}\right]^2 + 2\left[b\,\frac{\alpha^n \mp \beta^n}{\alpha + \beta}\right]^2 + \left[b^2\,\frac{\alpha^{n-1} \pm \beta^{n-1}}{\alpha + \beta}\right]^2. \tag{Q}$$

42. *Application*. Soient $a = b = 1$, $n = 6$:

$$(1+\sqrt{2})^{12}+(-1+\sqrt{2})^{12} = \left[\frac{(1+\sqrt{2})^7+(-1+\sqrt{2})^7}{2\sqrt{2}}\right]^2 + 2\left[\frac{(1+\sqrt{2})^6-(-1+\sqrt{2})^6}{2\sqrt{2}}\right]^2 + \left[\frac{(1+\sqrt{2})^5+(-1+\sqrt{2})^5}{2\sqrt{2}}\right]^2,$$

ou

$$2\left[2^6 + 66.\ 2^5 + 495.\ 2^4 + 924.\ 2^3 + 495.\ 2^2 + 66.\ 2 + 1\right]^2$$

$$= \left(2^3 + 21.\ 2^2 + 35.\ 2 + 7\right)^2 + 2\left(6.\ 2^2 + 20.\ 2 + 6\right)^2 + \left(2^2 + 10.\ 2 + 5\right)^2,$$

ou

$$39\,202 = 169^2 + 2.\ 70^2 + 29^2 = 28\,561 + 9\,800 + 841.$$

43. Théorème. *La somme des puissances* 4n, *de deux nombres entiers, inégaux,* (*) *est une somme de quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux.*

Dans l' identité (Q), changeons α en x^2, β en y^2; alors b égale xy. Elle devient

$$x^{4n} + y^{4n} = \left[\frac{x^{2n+2} \pm y^{2n+2}}{x^2 + y^2}\right]^2 + 2\left[xy\,\frac{x^{2n} \mp y^{2n}}{x^2 + y^2}\right]^2 + \left[x^2y^2\,\frac{x^{2n-2} \pm y^{2n-2}}{x^2 + y^2}\right]^2; \quad (Q')$$

et le théorème est démontré.

44. *Application.* Soient $n = 8$, $x = 2$, $y = 1$:

$$2^{32} + 1 = \left(\frac{2^{18} + 1}{2^2 + 1}\right)^2 + 2\left(2\,\frac{2^{16} - 1}{2^2 + 1}\right)^2 + \left(4\,\frac{2^{14} + 1}{2^2 + 1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{262\ 145}{5}\right)^2 + 2\left(2\,\frac{65\ 535}{5}\right)^2 + \left(4\,\frac{16\ 385}{5}\right)^2$$

$$= 52\,429^2 + 2.\ 26\,214^2 + 13\,108^2$$

$$= 2\,748\,800\,041 + 2.\ 687\,173\,796 + 171\,819\,664,$$

ou

$$2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297;$$

résultat connu (**).

45. *Remarques.* I. Soit $N = x^{4n} + y^{4n}$, x étant *pair*, y *impair*. D'après l'égalité (Q),

$$N = f^2 + 2g^2 + h^2:$$

(*) Afin qu'aucun terme ne s'annule. Pour la même raison, n *doit surpasser* 1.

(**) Legendre. *Théorie des Nombres*, tome I, p. 223.

f est *impair*, g et h sont *pairs*. En vertu d'un théorème connu (*), cette *seconde forme appartient à tous les nombres impairs*; mais, quand on adopte cet énoncé, on sous-entend que le *trinôme* peut se réduire à un *binôme*, et même à un *monôme*. Dans le cas actuel, f^2, g^2, h^2 sont *positifs*.

II. Si le nombre N est *premier*, il a donc les deux formes considérées.

Exemples : $237 = 2^8 + 1^8 = 13^2 + 2.\,6^2 + 4^2$, $65\,537 = 2^{16} + 1^{16} = 205^2 + 2.\,102^2 + 52^2$, $72\,097 = 4^8 + 3^8 = 193^2 + 2.\,84^2 + 144^2$.

III. *Très probablement, il existe une infinité de nombres premiers jouissant de cette double propriété.* (**)

46. *Nouvelles décompositions* (***). Dans les égalités (N), changeons α en x^2, β en y^2, et posons :

$$\left.\begin{array}{l} M = x^{4\mu} - x^{4\mu-2}y^2 + x^{4\mu-4}y^4 \ldots + y^{4\mu}, \\ N = xy\left[x^{4\mu-2} - x^{4\mu-4}y^2 + \ldots - y^{4\mu-2}\right], \\ P = x^{4\mu} - 3x^{4\mu-2}y^2 + 5x^{4\mu-4}y^4 - \ldots \pm (2\mu+1)\,x^{2\mu}y^{2\mu} \mp \ldots + y^{4\mu}, \text{ (****)} \\ Q = 2xy\left[x^{4\mu-2} - 2x^{4\mu-4}y^2 + 3x^{4\mu-6}y^4 - \ldots - y^{4\mu-2}\right], \\ R = xy\left[x^{4\mu-2} - x^{4\mu-4}y^2 + \ldots - y^{4\mu-2}\right]. \end{array}\right\} (\alpha)$$

Ces égalités deviennent

$$\frac{x^{8\mu+2} + y^{8\mu+2}}{x^2 + y^2} = M^2 + N^2 = P^2 + Q^2 + R^2.$$

Donc, à cause de $R = N$:

$$M^2 = P^2 + Q^2,$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} \left[x^{4\mu} - x^{4\mu-2}y^2 + x^{4\mu-4} - \ldots + y^{4\mu}\right]^2 \\ = \left[x^{4\mu} - 3x^{4\mu-2}y^2 + 5x^{4\mu-4}y^4 - \ldots \pm (2\mu+1)\,x^{2\mu}y^{2\mu} \mp \ldots + y^{4\mu}\right]^2 \\ + 4x^2y^2\left[x^{4\mu-2} - 2x^{4\mu-4}y^2 + 3x^{4\mu-6}y^4 - \ldots - y^{4\mu-2}\right]^2. \end{array}\right\} (\beta)$$

(*) *Théorie des Nombres*, tome I, p. 398.

(**) C'est là une simple induction: si le théorème est vrai, il est peut-être difficile à démontrer.

(***) Trouvées pendant l'impression du Mémoire.

(****) Les signes supérieurs, si μ est *pair*.

47. *Suite.* Evidemment, $M(x^2+y^2) = x^{4\mu+2} + y^{4\mu+2}$. D'un autre côté, soit par les formules (α), soit par le calcul direct, on trouve:

$$P(x^2+y^2) = x^{4\mu+2} - 2x^{4\mu}y^2 + 2x^{4\mu-2}y^4 - .. + 2x^4y^{4\mu-2} - 2x^2y^{4\mu} + y^{4\mu+2},$$

$$Q(x^2+y^2) = 2xy\,[x^{4\mu} - x^{4\mu-2} + x^{4\mu-4}y^4 - .. - x^4y^{4\mu-4} + x^2y^{4\mu-2} - y^{4\mu}]. \ (***)$$

L'égalité précédente se transforme en

$$\left.\begin{aligned} &(x^{4\mu+2} + y^{4\mu+2})^2 \\ &= [x^{4\mu+2} - 2x^{4\mu}y^2 + 2x^{4\mu-2}y^4 - \ldots + 2x^4y^{4\mu-2} - 2x^2y^{4\mu} + y^{4\mu+2}]^2 \\ &+ 4x^2y^2\,[x^{4\mu} - x^{4\mu-2}y^2 + x^{4\mu-4}y^4 - \ldots - x^4y^{4\mu-4} + x^2y^{4\mu-2} - y^{4\mu}]^2. \end{aligned}\right\} (\gamma)$$

Ainsi, *le carré de* $x^{4\mu+2}+y^{4\mu+2}$, ou

$$[x^{2\mu+1} - y^{2\mu+1}]^2 + [2x^{2\mu+1}y^{2\mu+1}]^2,$$

est égal à la somme des carrés de deux polynômes, dont tous les coefficients sont entiers. Mais nous pouvons énoncer un résultat plus curieux.

48. *Décomposition remarquable.* En général,

$$\left.\begin{aligned} &x^{4\mu+2} + y^{4\mu+2} \\ &= [x^{2\mu+1} - 2x^{2\mu-1}y^2 + 2x^{2\mu-3}y^4 - .. \pm 2xy^{2\mu}]^2 \\ &+ [y^{2\mu+1} - 2y^{2\mu-1}x^2 + 2y^{2\mu-3}x^4 - .. \pm 2yx^{2\mu}]^2. \end{aligned}\right\} (\gamma)$$

Pour vérifier cette relation, qui a la forme

$$A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2,$$

il suffit de l'écrire ainsi:

$$(A + A')(A - A') = (B' + B)(B' - B).$$

On a:

$$A + A' = 2x\,[x^{2\mu} - x^{2\mu-2}y^2 + x^{2\mu-4}y^4 - .. \pm y^{2\mu}],$$

(***) Dans chacun de ces polynomes, *il n'y a pas de terme du milieu.* Pour le premier, la proposition est évidente.

$$A - A' = 2xy^2\,[x^{2\mu-2} - x^{2\mu-4}y^2 + x^{2\mu-6}y^4 - .. \pm y^{2\mu-2}],$$

$$B' + B = 2y\,[y^{2\mu} - y^{2\mu-2}\,x^2 + y^{2\mu-4}\,x^4 - .. \pm x^{2\mu}],$$

$$B' - B = -\,2x^2y\,[y^{2\mu-2} - y^{2\mu-4}\,x^2 + y^{2\mu-6}x^4 - .. \mp x^{2\mu-2}];$$

puis

$$\frac{A' + A}{2x} = \pm\frac{B' + B}{2y},\ \frac{A - A'}{2xy^2} = \pm\frac{B' - B}{2x^2y};$$

etc.

Remarques I. D'après les égalités (β), (γ), si l'on pose :

$$\left.\begin{aligned} A &= x^{2\mu+1} - 2x^{2\mu-1}y^2 + 2x^{2\mu-3}y^4 - .. \pm 2xy^{2\mu},\\ B &= y^{2\mu+1} - 2y^{2\mu-1}\,x^2 + 2y^{2\mu-3}\,x^4 - .. \pm 2yx^{2\mu},\\ C &= x^{4\mu+2} - 2x^{4\mu}y^2 + 2x^{4\mu-2}y^4 - .. + 2x^4y^{4\mu-2} - 2x^2y^{4\mu} + y^{4\mu+2},\\ D &= 2xy\,[x^{4\mu} - x^{4\mu-2}y^2 + x^{4\mu-4} - .. - x^4y^{4\mu-4} + x^2y^{4\mu-2} - y^{4\mu}], \end{aligned}\right\}$$

on aura

$$(A^2 + B^2)^2 = C^2 + D^2.$$

II. *Le premier membre de l'équation binôme*

$$x^{4\mu+2} + 1 = 0,$$

est égal à la somme des carrés des polynômes

$$x^{2\mu+1} - 2x^{2\mu-1} + 2x^{2\mu-3} - .. \pm 2x,$$

$$2x^{2\mu} - 2x^{2\mu-2} + 2x^{2\mu-4} - .. \pm 1.\ (*)$$

50. *Applications.* I. Soient: $x = 2$, $y = 1$, $\mu = 3$. Il résulte, de ces données:

$$A = 2^7 - 2.\,2^5 + 2.\,2^3 - 2.\,2 = 76,$$

$$B = 2.\,2^6 - 2.\,2^4 + 2.\,2^2 - 1 = 103,$$

$$C = 2^{14} - 2.\,2^{12} + 2.\,2^{10} - 2.\,2^8 - 2.\,2^6 + 2.\,2^4 - 2.\,2^2 + 1 = 9\,625,$$

$$D = 4\,[2^{12} - 2^{10} + 2^8 - 2^4 + 2^2 - 1] = 13\,260\,;$$

(*) On ne doit pas oublier que, dans chacun de ces polynômes, *le terme du milieu manque.*

puis

$$(76^2 + 103^2)^2 = 9\,625^2 + 13\,260,$$

ou

$$25\,385^2 = 9\,625^2 + 13\,260^2,$$

ou

$$2\,601 .\ 676 = 1\,326^2,$$

$$289 .\ 169 = 221^2,$$

etc.

II. Si l'on fait $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ on trouve :

$$x^6 + 1 = (x^3 - 2x)^2 + (2x^2 - 1)^2,$$

$$x^{10} + 1 = (x^5 - 2x^3 + 2x)^2 + (2x^4 - 2x^2 + 1)^2,$$

$$x^{14} + 1 = (x^7 - 2x^5 + 2x^3 - 2x)^2 + (2x^6 - 2x^4 + 2x^2 - 1)^2,$$

$$x^{18} + 1 = (x^9 - 2x^7 + 2x^5 - 2x^3 + 2x)^2 + (2x^8 - 2x^6 + 2x^4 - 2x^2 + 1)^2,$$

. . . .

51. *Relation avec un théorème de Gauss.* Reprenons l'identité

$$\frac{\alpha^{4\mu+1} + \beta^{4\mu+1}}{\alpha + \beta} = \left[\alpha^{2\mu} - 3\alpha^{2\mu-1}\beta + 5\alpha^{2\mu-2}\beta^2 - \ldots \pm (2\mu+1)\alpha^\mu\beta^\mu \mp \ldots + \beta^{2\mu}\right]^2$$

$$+ 4\alpha\beta\left[\alpha^{2\mu-1} - 2\alpha^{2\mu-2}\beta + 3\alpha^{2\mu-3}\beta^2 - \ldots - 3\alpha^2\beta^{2\mu-3} + 2\alpha\beta^{2\mu-2} - \beta^{2\mu-1}\right]^2$$

$$+ \alpha\beta\left[\alpha^{2\mu-1} - \alpha^{2\mu-2}\beta + \alpha^{2\mu-3}\beta^2 - \ldots + \alpha\beta^{2\mu-2} - \beta^{2\mu-1}\right]^2. \qquad \text{(N).}$$

Posons $\alpha = z^2$, $\beta = 1$, $4\mu+1 = p$, p étant un nombre *premier*. Elle devient

$$\frac{z^{2p} + 1}{z^2 + 1} = \left[z^{p-1} - 3z^{p-3} + 5z^{p-5} - \ldots - 3z^2 + 1\right]^2 + 4\left[z^{p-2} - 2z^{p-4} + 3z^{p-6} - \ldots + 2z^3 - z\right]^2$$

$$+ \left[z^{p-2} - z^{p-4} + z^{p-6} - \ldots - z^5 + z^3 - z\right]^2;$$

ou, pour abréger,

$$\frac{z^{2p} + 1}{z^2 + 1} = A^2 + (2B)^2 + C^2. \qquad (40)$$

Soit maintenant le beau théorème de Gauss, exprimé par la relation

11

$$4\,\frac{x^p-1}{x-1}=Y^2-pZ^2. \tag{41}$$

Si nous remplaçons x par $-z^2$, nous avons

$$4\,\frac{z^{2p}+1}{z^2+1}=Y_1^2-pZ_1^2;$$

Y_1, Z_1 étant, bien entendu, ce que deviennent les polynômes Y, Z, par suite de cette substitution.

Le nombre premier p, ayant la forme $4\mu+1$, est la somme de deux carrés: $p=a^2+b^2$. Par suite, et à cause de la formule (40),

$$Y_1^2=(2A)^2+(4B)^2+(2C)^2+(a\,Z_1)^2+(b\,Z_1)^2.$$

Autrement dit :

Si, dans le polynome Y^2, *on remplace* x par $-z^2$, *et que* Y_1^2 *soit le résultat de la substitution ; ce nouveau polynome est :* 1° *la somme de quatre carrés;* (*) 2° *la somme de cinq carrés.*

52. *Application.* Soit $p=13$. Alors:

$$A=z^{12}-3z^{10}+5z^8-7z^6+5z^4-3z^2+1,$$

$$B=z^{11}-2z^9+3z^7-3z^5+2z^3-z,$$

$$C=z^{11}-z^9+z^7-z^5+z^3-z,$$

$$Y_1=2z^{12}-z^{10}+4z^8+z^6+4z^4-z^2+2,$$

$$Z=-z^{10}-z^6-z^2,\quad (^{**})$$

$$a=3,\ b=2.$$

Donc

$$(2z^{12}-z^{10}+4z^8+z^6+4z^4-z^2+2)^2=(2z^{12}-6z^{10}+10\,z^8-14z^6+10z^4-6z^2+2)^2$$
$$+(4z^{11}-8z^9+12z^7-12z^5+8z^3-4z)^2+(2z^{11}-2z^9+2z^7-2z^5+2z^3-2z)^2$$
$$+(3z^{10}+3z^6++3z^2)^2+(2z^{10}+2z^6+2z^2)^2.$$

(*) Parce que $\frac{z^{2p}+1}{z^2+1}$ est la somme de deux carrés.

(**) On trouve, dans la *Théorie des Nombres*, de LEGENDRE :

$$Y=2x^6+x^5+4x^4-x^3+4x^2+x+2,\quad Z=x^5+x^3+x.$$

En particulier, si $z=2$:

$$8\,318^2 = 3\,850^2 + 5\,304^2 + 3\,276^2 + 3\,276^2 + 2\,184^2,$$

ou

$$69\,189\,124 = 14\,822\,500 + 28\,132\,416 + 10\,732\,176 + 10\,732\,176 + 4\,769\,856.$$

53. *Remarque*. Dans l'identité (40),

$$C = z^{p-2} - z^{p-4} + z^{p-6} - .. + z^3 - z = z\,(z^2-1)\left[z^{p-5} + z^{p-9} + .. + z^4 + 1\right]$$
$$= \frac{z\,(z^{p-1}-1)}{z^2+1}.$$

Si l'on transpose C^2, on a donc

$$\frac{z^{2p}+1}{z^2+1} - C^2 = \frac{(z^{2p}+1)\,(z^2+1) - z^2\,(z^{p-1}-1)^2}{(z^2+1)^2} = \frac{z^{2p+2} + 2.\,z^{p+1} + 1}{(z^2+1)^2} = \left(\frac{z^{p+1}+1}{z^2+1}\right)^2$$
$$= \left[z^{p-1} - z^{p-3} + z^{p-5} - .. - z^2 + 1\right]. \ (*)$$

Remettant pour A et B leurs valeurs, on obtient cette *nouvelle identité*:

$$\left.\begin{array}{c}\left[z^{p-1} - z^{p-3} + z^{p-5} - .. - z^2 + 1\right]^2 = \\ \left[z^{p-1} - 3\,z^{p-3} + 5z^{p-5} - .. - 3z^2 + 1\right]^2 + 4\left[z^{p-2} - 2z^{p-4} + 3z^{p-6} - .. + 2z^3 - z\right]^2.\end{array}\right\}\ (R)$$

Par le changement de z en $z\sqrt{-1}$, elle se transforme en

$$\left.\begin{array}{c}\left[z^{p-1} + z^{p-3} + z^{p-5} + .. + z^2 + 1\right]^2 + 4\left[z^{p-1} + 2z^{p-4} + 3z^{p-6} + .. + 2z^3 + z\right]^2 = \\ \left[z^{p-1} + 3z^{p-3} + 5z^{p-5} + .. + 3z^2 + 1\right]^2.\end{array}\right\}(R')$$

54. *Applications*. I. Soient $p=9$, $z=1$: (**)

$$5^2 + 4.\,6^2 = 13^2.$$

II. $p=9$, $z=2$. On trouve, par l'identité (R): $205^2 = 133^2 + 156^2$; et, par l'identité (R'): $541^2 = 341^2 + 420^2$.

55. *Remarque*. Les identités (R), (R') donnent, comme l'identité (38), des séries de solutions de l'équation $x^2 + y^2 = u^2$.

D'un autre côté, *toutes* les solutions de cette équation sont données par les formules :

$$x = \alpha^2 - \beta^2, \quad y = 2\alpha\beta, \quad u = \alpha^2 + \beta^2;$$

(*) On ne doit pas oublier que $p=4\mu+1$.

(**) Il n'est pas nécessaire, évidemment, que le nombre p soit premier.

α, β étant des entiers quelconques. Donc, z étant un nombre entier, pris arbitrairement, les équations

$$\alpha^2 - \beta^2 = z^{p-1} + z^{p-3} + \ldots + z^2 + 1,$$

$$\alpha\beta = z^{p-2} + 2z^{p-4} + 3z^{p-6} + \ldots + 2z^3 + z,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = z^{p-1} + 3z^{p-3} + 5z^{p-5} + \ldots + 3z^2 + 1$$

doivent donner, pour α, β, des valeurs *entières*. En effet, on en déduit :

$$\alpha^2 = z^{p-1} + 2z^{p-3} + 3z^{p-5} + \ldots + 3z^4 + 2z^2 + 1,$$

$$\beta^2 = z^{p-3} + 2z^{p-5} + 3z^{p-7} + \ldots + 3z^6 + 2z^4 + z^2;$$

ou

$$\alpha^2 = \left[z^{\frac{p-1}{2}} + z^{\frac{p-5}{2}} + \ldots + z^2 + 1\right]^2, \quad \beta^2 = z^2\left[z^{\frac{p-5}{2}} + z^{\frac{p-9}{2}} + \ldots + z^2 + 1\right]^2,$$

$$\alpha\beta = z\left[z^{\frac{p-1}{2}} + z^{\frac{p-5}{2}} + \ldots + z^2 + 1\right]\left[z^{\frac{p-5}{2}} + z^{\frac{p-9}{2}} + \ldots + z^2 + 1\right]$$

$$= z\left[z^{p-3} + 2z^{p-5} + 3z^{p-7} + \ldots + 3z^4 + 2z^2 + 1\right]; \ (*)$$

identité connue. (**)

V.

Sur l'équation $(a^2 + 1)\, x^2 = y^2 + 1$.

56. *Valeurs de* x. a étant un nombre entier, égal ou supérieur à 1 ; la solution la plus simple, en nombres entiers, est

$$x_1 = 1, \quad y_1 = a.$$

Donc, par une formule connue,

(*) En valeur absolue.

(**) Généralement,

$$(x^m + x^{m-1} + \ldots + x + 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1) = x^{2m-1} + 2x^{2m-2} + 3x^{2m-3} + \ldots + 3x^2 + 2x + 1.$$

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}}\left[(\sqrt{a^2+1}+a)^{2n-1} + (\sqrt{a^2+1}-a)^{2n-1}\right]; \qquad (42)$$

ou, avec les notations employées ci-dessus (29),

$$x_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n+1}}{\alpha + \beta}. \qquad (43)$$

La loi de *récurrence*, applicable à partir de $n = 3$, est

$$x_n = 2\,(2a^2 + 1)\,x_{n-1} - x_{n-2}. \qquad (44)$$

D'ailleurs

$$x_2 = 4a^2 + 1.$$

57. Théorème. *A partir de* n = 3, *chaque valeur de* x_n, *égale à la somme de deux carrés* (*), *est égale, aussi, à la somme de trois carrés.*

La démonstration a été donnée dans le Chapitre IV (29).

58. *Suite.* Pour compléter ce sujet, indiqnons les valeurs des carrés qui composent x_n. En premier lieu, si l'on fait

$$G_n = \frac{\alpha^n - (-\beta)^n}{\alpha + \beta}, \qquad (45)$$

on a

$$G^2_n + G^2_{n-1} = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} + \alpha^{2n-2} + \beta^{2n-2} - 2(-\alpha\beta)^n - 2(-\alpha\beta)^{n-1}}{(\alpha+\beta)^2}.$$

A cause de $\alpha\beta = 1$, le numérateur se réduit à

$$\alpha^{2n} + \beta^{2n} + \alpha^{2n-2} + \beta^{2n-2} = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + \alpha^{2n-1}\beta + \alpha\beta^{2n-1}$$

$$= (\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1})(\alpha + \beta).$$

Donc

$$x_n = G^2_{n-1} + G^2_n \text{ (**)}. \qquad (46)$$

En outre, d'après ce que l'on a vu au n° 31 :

(*) Proposition évidente et connue.

(**) Ce petit calcul donne une nouvelle vérification de l' identité (24).

1° *Si* $n = 4\mu$:

$$x_n = \left[\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha + \beta}\right]^2 + \left[2\,\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} + 2a}{(\alpha+\beta)^2}\right]^2 + \left[2\,\frac{a\,(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) - 2}{(\alpha+\beta)^2}\right]^2; \quad (47)$$

2° *Si* $n = 4\mu - 1$:

$$x_n = \left[\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha + \beta}\right]^2 + \left[2\,\frac{\alpha^n - \beta^n + 2a}{(\alpha+\beta)^2}\right]^2 + \left[2\,\frac{a\,(\alpha^n - \beta^n) - 2}{(\alpha+\beta)^2}\right]^2; \quad (48)$$

3° *Si* $n = 4\mu - 2$:

$$x_n = \left[\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha + \beta}\right]^2 + \left[2\,\frac{a\,(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + 2}{(\alpha+\beta)^2}\right]^2 + \left[2\,\frac{-\alpha^{n-1} + \beta^{n-1} + 2a}{(\alpha+\beta)^2}\right]^2; \quad (49)$$

4° *Si* $n = 4\mu - 3$:

$$x_n = \left[\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha + \beta}\right]^2 + \left[2\,\frac{a\,(\alpha^n - \beta^n) + 2}{(\alpha+\beta)^2}\right]^2 + \left[2\,\frac{-\alpha^n + \beta^n + 2a}{(\alpha+\beta)^2}\right]. \quad (50)$$

59. *Applications I.* Si l'on suppose $a = 1$, $\mu = 1$, on retrouve, au moyen de ces formules, les valeurs connues :

$$x_4 = 169 = 12^2 + 4^2 + 3^2 = 12^2 + 5^2,$$

$$x_3 = 29 = 2^2 + 4^2 + 3^2 = 2^2 + 5^2,$$

$$x_2 = 5 = 2^2 + 1^2,$$

$$x_1 = 1.$$

II. Soient $a = 3$, $\mu = 1$; d'où $\alpha = 3 + \sqrt{10}$, $\beta = -3 + \sqrt{10}$. On a, par les mêmes formules :

$$x_4 = G_3^2 + G_4^2 = \left[\frac{\alpha^3 + \beta^3}{2\sqrt{10}}\right]^2 + \left[\frac{\alpha^4 - \beta^4}{2\sqrt{10}}\right]^2 = \left[10 + 3.\ 3^2\right]^2 + \left[4.\ 10.\ 3 + 4.\ 3^3\right]^2$$

$$= 37^2 + 228^2 = 52\ 353,$$

$$x_3 = G_2^2 + G_3^2 = [\alpha - \beta]^2 + 37^2 = 6^2 + 37^2 = 1405,$$

$$x_3 = G_1^2 + G_2^2 = 1 + 6^2 = 37, \qquad x_1 = 1\,;$$

$$x_4 = 228^2 + \left[\frac{\alpha^3 - \beta^3 + 6}{20}\right]^2 + \left[\frac{3\,(\alpha^3 - \beta^3) - 2}{20}\right]^2 = 228^2 + 12^2 + 35^2 = 53\ 353,$$

$$x_3 = \left[\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta}\right]^2 + \left[\frac{\alpha^3 - \beta^3 + 6}{20}\right]^2 + \left[\frac{3\,(\alpha^3 - \beta^3) - 2}{20}\right]^2 = 6^2 + 12^2 + 35^2 = 1\ 405,$$

$$x_2 = \left[\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta}\right]^2 + \left[\frac{3\,(\alpha - \beta) + 2}{20}\right]^2 + \left[\frac{-\alpha + \beta + 6}{20}\right]^2 = 6^2 + 1^2 = 37, \quad x_1 = 1.$$

60. *Remarques*. *I.* De la formule (46), on déduit,

$$x_n - x_{n-1} + x_{n-2} - \,..\, \pm x_2 \mp x_1 = G^2_n \text{ (*)}. \tag{51}$$

Par exemple, dans la seconde application,

$$x_4 - x_3 + x_2 - x_1 = 53\ 358 - 1\ 405 + 37 - 1 = 51\ 984 = G_4^2.$$

II. La formule (45) donne

$$G_{2n-1} = x_n\,; \tag{52}$$

et, par conséquent,

$$x_{2n-1} = x_n^{\ 2} + G^2_{2n-2}\,: \qquad (n > 1) \tag{53}$$

Dans la suite récurrente

$$x_1,\ x_2,\ x_3, ..$$

tout terme de rang impair se compose du carré du terme milieu correspondant, augmenté d'un autre carré.

III. Pour les nombres G_n, la loi de récurrence est

$$G_n = 2a\ G_{n-1} + G_{n-2}. \tag{54}$$

A cause de $G_1 = 1$, $G_2 = 2a$, on en conclut

$$G_3 = 4a^2 + 1 = x_2,\ G_4 = 8a^3 + 4a,\ G_5 = 16a^4 + 12a^2 + 1 = x_3,\ ....;$$

(*) Les signes supérieurs si n est pair.

puis

$$G_n = \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}}\left[(a+\sqrt{a^2+1})^n - (a-\sqrt{a^2+1})^n\right]. \qquad (55$$

IV. On a trouvé (50)

$$x_2 = 4a^2 + 1.$$

En général, le second membre n'est pas décomposable en trois carrés. Néanmoins, *il existe une infinité de cas dans lesquels la décomposition est possible* (*).

Si, par exemple, $a = 3b \pm 1$,

$$4a^2 + 1 = (4b \pm 2)^2 + (4b \pm 1)^2 + (2b)^2 \text{ (**)}. \qquad (b > 0)$$

61. *Vérifications des formules*. Le procédé le plus simple à suivre, pour reconnaître l'exactitude des formules (47), (48), (49) et (50), consiste, croyons-nous, à poser $\sqrt{a^2+1} = \cos\varphi$; d'où $a = \sqrt{-1}\sin\varphi$, etc. (***). On trouve, au lieu de l'égalité (47), eu égard à la formule (42):

$$\frac{\cos(8\mu-1)\varphi}{\cos\varphi} = \left[\sqrt{-1}\,\frac{\sin 4\mu\varphi}{\cos\varphi}\right]^2 + \left[\sqrt{-1}\,\frac{\sin(4\mu-1)\varphi + \sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right]^2 + \left[\frac{\sin(4\mu-1)\varphi\sin\varphi + 1}{\cos^2\varphi}\right]^2,$$

ou

$$\cos(8\mu-1)\varphi\cos^3\varphi = -\sin^2 4\mu\varphi\cos^2\varphi - \sin^2(4\mu-1)\varphi - \sin^2\varphi + \sin^2(4\mu-1)\varphi\sin^2\varphi + 1,$$

ou

$$\cos(8\mu-1)\cos\varphi = -\sin^2 4\mu\varphi - \sin^2(4\mu-1)\varphi + 1,$$

ou enfin

$$\cos 8\mu\varphi + \cos(8\mu-2)\varphi = -[1-\cos 8\mu\varphi] - [1-\cos(8\mu-2)\varphi] + 2.$$

La même transformation est applicables aux autres formules citées. (****)

(*) Cette circonstance, que j'avoir oubliée, m'a été signalée par M. S. Realis.

(**) *Lettre au Prince B. Boncompagni*, 14 *juin* 1881.

(***) Evidemment, *l'argument* φ *est imaginaire*.

(****) Ce rapprochement, entre l'Analyse indéterminée et la théorie des fonction circulaires, est assez remarquable.

62. *Développements de x_n, y_n.* La formule

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} \left[(\sqrt{a^2+1}+a)^{2n-1} + (\sqrt{a^2+1}-a)^{2n-1}\right] \qquad (42)$$

donne, immédiatement,

$$x_n = (a^2+1)^{n-1} + C_{2n-1,2}(a^2+1)^{n-2}a^2 + C_{2n-1,4}(a^2+1)^{n-3}a^4 + \ldots + C_{2n-1,1}a^{2n-2}. \quad (56)$$

De plus,

$$y_n = \frac{1}{2}\left[(\sqrt{a^2+1}+a)^{2n-1} - (\sqrt{a^2+1}-a)^{2n-1}\right], \qquad (57)$$

ou

$$y = C_{2n-1,1}(a^2+1)^{n-1}a + C_{2n-1,3}(a^2+1)^{n-2}a^3 + \ldots + a^{2n-1}. \qquad (58)$$

63. *Relations entre x_n, y_n.*

1° La comparaison des formules (56), (58) donne, d'abord,

$$ax_n + y_n = C_{2n,1}(a^2+1)^{n-1}a + C_{2n,3}(a^2+1)^{n-2}a^3 + \ldots + C_{2n,1}a^{2n-1}. \quad (59)$$

2° Le second membre est le développement de

$$\frac{1}{2\sqrt{a^2+1}}\left[(\sqrt{a^2+1}+a)^{2n} - (\sqrt{a^2+1}-a)^{2n}\right].$$

Donc

$$ax_n + y_n = \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}}\left[(\sqrt{a^2+1}+a)^{2n} - (\sqrt{a^2+1}-a)^{2n}\right]. \qquad (60)$$

3° Pour simplifier cette égalité, multiplions par $2a$ le premier membre; et le second, par

$$(\sqrt{a^2+1}+a) - (\sqrt{a^2+1}-a).$$

Nous aurons

$$2a(ax_n + y_n) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a^2+1}}\left[(\sqrt{a^2+1}+a)^{2n+1} + (\sqrt{a^2+1}-a)^{2n+1}\right.$$

$$\left. - (\sqrt{a^2+1}+a)^{2n-1} - (\sqrt{a^2+1}-a)^{2n-1}\right],$$

ou

$$2a(ax_n + y_n) = x_{n+1} - x_n,$$

ou plutôt

$$x_{n+1} = (2a^2+1)x_n + 2ay_n. \qquad (61)$$

4° D'après la formule (44),

$$x_{n+1} = 2(2a^2+1)x_n - x_{n-1}.$$

Donc, par l'élimination de x_n:

$$x_{n+1} - x_{n-1} = 4a y_n. \tag{62}$$

5.° Si n est *pair*, on conclut, de cette égalité,

$$x_{n+1} - x_1 = 4a\,(y_n + y_{n-2} + \ldots + y_2); \tag{63}$$

et, si n est *impair*:

$$x_{n+1} - 1 = 4a\,(y_n + y_{n-2} + \ldots + y_1).\ (^*) \tag{64}$$

6.° On a, simultanément :

$$y^2_n = (a^2+1)\,x^2_n - 1, \quad y_n = \frac{x_{n+1} - (2a^2+1)\,x_n}{2a}.$$

Par conséquent,

$$4a^2\left[(a^2+1)\,x^2_n - 1\right] = x_{n+1}\left[x_{n+1} - 2\,(2a^2+1)\,x_n\right] + (2a^2+1)^2\,x^2_n,$$

ou

$$-4a^2 = -\,x_{n+1}\,x_{n-1} + x^2_n,$$

ou

$$x_{n+1}\,x_{n-1} - x^2_n = 4a^2.\ (^{**}) \tag{65}$$

7.° Soient, pour abréger:

$$\sqrt{a^2+1} + a = s, \quad \sqrt{a^2+1} - a = d.$$

Nous aurons, par la formule (57):

$$y_n = \tfrac{1}{2}\left[s^{2n-1} - d^{2n-1}\right],\ y_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left[s^{2n+1} - d^{2n+1}\right],\ y_{n-1} = \tfrac{1}{2}\left[s^{2n-3} - d^{2n-3}\right];$$

puis

$$y^2_n - y_{n+1}\,y_{n-1} = \tfrac{1}{4}\left[-2 + s^4 + d^4\right].\ (^{***})$$

(*) A cause de

$$x_2 - 1 = 4a^2 = 4a.\,y_1.$$

(**) Cette relation simple, entre trois termes consécutifs de la série récurrente

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{n-1},\ x_n,\ x_{n+1},\ldots,$$

est une conséquence immédiate, soit des équations

$$x_n = 2\,(2a^2+1)\,x_{n-1} - x_{n-2},\ x_{n+1} = 2\,(2a^2+1)\,x_n - x_{n-1},$$

soit des formules qui donnent les réduites de la fraction continue a $(2a)$.

(***) Parceque $sd = 1$.

Or,

$$s^4 + d^4 = 16a^4 + 16a^2 + 2;$$

donc

$$y^2_n - y_{n+1}\, y_{n-1} = 4a^2 (a^2 + 1) \text{ (*)}. \qquad (66)$$

VI.

SUR L'ÉQUATION $Ax^2 = y^2 + 1$.

64. *Transformée*. Le nombre entier A, divisant $y^2 + 1$, doit avoir la forme $a^2 + b^2$. Dans le Chapitre précédent, nous avons considéré le cas où $b = 1$. Prenons, maintenant, l'équation générale

$$(a^2 + b^2)\, x^2 = y^2 + 1, \qquad (67)$$

a et b surpassant l'unité.

Si $x = p$, $y = q$ sont les valeurs les plus simples qui vérifient cette équation, on a

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{A}} \left[(p\sqrt{A} + q)^{2n-1} + (p\sqrt{A} - q)^{2n-1}\right]. \qquad (68)$$

Il est visible que le second membre est divisible par p. Soit donc $x = pz$. La proposée devient

$$(a^2 + b^2)\, p^2 z^2 = y^2 + 1.$$

Et comme

$$(a^2 + b^2)\, p^2 = y^2 + 1,$$

l'équation (67) est transformée en

$$(q^2 + 1)\, z^2 = y^2 + 1. \qquad (69)$$

65. THÉORÈME. *Chaque valeur entière de* x, *satisfaisant à l'équation* (67), *est*: 1° *la somme de deux carrés* (**); 2° *la somme de quatre carres.*

1° Si l'on pose

$$G_n = \frac{1}{2\sqrt{q^2 + 1}} \left[(q + \sqrt{q^2 + 1})^n - (q - \sqrt{q^2 + 1})^n\right], \qquad (45)$$

(*) Voir la note précédente.

(**) x_n, divisant $y^2_n + 1$, est nécessairement une somme de deux carrés.

on a, par la formule (46),

$$z_n = G^2_{n-1} + G_n^2.$$

D'ailleurs,

$$p = f^2 + g^2.$$

Donc

$$x_n = (fG_{n-1} \pm gG_n)^2 + (fG_n \mp gG_{n-1})^2. \quad (70)$$

2°

$$x_n = (fG_{n-1})^2 + (fG_n)^2 + (gG_{n-1})^2 + (gG_n)^2. \quad (71)$$

66. *Remarques*. I. A partir de $n = 2$, la première partie de la proposition est générale.

En effet, si les *deux* valeurs de x_n se réduisent, l'une et l'autre, à un carré, on a

$$fG_{n-1} = gG_n, \; fG_n = gG_{n-1};$$

d'où, en supposant f et g différents de zéro,

$$G_n = G_{n-1};$$

conclusion inadmissible, parceque les nombres G_n vont en croissant (54). Et si $f = 0$, il reste

$$x_n = (gG_n)^2 + (gG_{n-1})^2.$$

II. Si p est un carré, la seconde partie *peut être* en défaut.

67. *Application*. Soit $A = 89 = 64 + 25$. La *Table* X, de Legendre, donne $p = 53$, $q = 100$.

On trouve, par les formules ci-dessus:

$$z_3 = 16q^4 + 12q^2 + 1 = (4q^2 + 1)^2 + (2q)^2 = (2q)^2 + (4q)^2 + (4q^2 - 1)^2$$

$$= 1\,600\,000\,000 + 120\,000 + 1 = 1\,600\,120\,001,$$

$$y_3 = 16q^5 + 20q^3 + 5q \; (*) = 160\,000\,000\,000 + 20\,000\,000 + 500$$

$$= 160\,020\,000\,500.$$

On doit donc avoir

$$10\,001 . 1\,600\,120\,001^2 = 160\,020\,000\,500^2 + 1,$$

ou

$$25\,606\,400\,560\,020\,000\,250\,000 = 160\,020\,000\,500^2.$$

(*) $(q^2 + 1)(16q^4 + 12q^2 + 1)^2 = q^2(16q^4 + 20q^2 + 5)^2 + 1.$

Cette égalité devient, successivement :

$$102\,425\,602\,240\,080\,001 = 320\,040\,001^2,$$

$$1\,024\,256\,016 = 32\,004^2,$$

$$113\,806\,224 = 10\,668^2,$$

$$12\,645\,136 = 3\,556^2\,;$$

et celle-ci est exacte. (*)

De plus, à cause de $f = 7$, $g = 2$:

$$x_3 = (7.\,40\,001 \pm 2.\,200)^2 + (7.\,200 \mp 2.\,40\,001)^2$$

$$= (280\,007 \pm 400)^2 + (1\,400 \mp 80\,002)^2$$

$$= 280\,407^2 + 78\,602^2 = 279\,607^2 + 81\,402^2$$

$$= 78\,628\,085\,649 + 6\,178\,274\,404 = 78\,180\,074\,149 + 6\,626\,285\,604$$

$$= 84\,806\,360\,053 = 53\,z_3.$$

Enfin,

$$x_3 = 1\,400^2 + 400^2 + 280\,007^2 + 80\,002^2.$$

68. *Remarque*. Il y a lieu de croire que x_n, *somme de deux carrés* et *somme de quatre carrés*, est aussi une *somme de trois carrés*. Jusqu'à présent, je n'ai pu démontrer cette proposition. (**)

VII.

Sur l'équation $(a^2 + 1)\,x^2 = y^2 - 1$.

69. Théorème. *Chaque valeur entière de* y, *satisfaisant à cette équation, est la somme de trois carrés.* (***)

Les valeurs de y sont données par la formule

$$y_n = \frac{1}{2}\left[(a + \sqrt{a^2+1})^{2n} + (-a + \sqrt{a^2+1})^{2n}\right]. \qquad (72)$$

(*) Séguin. — *Table des quarrés et des cubes.*

(**) Elle est vraie lorsque *p est un carré*. En effet,

$$x_n = k^2 z_n = (Ak)^2 + (Bk)^2 + (Ck)^2.$$

(***) Il y a exception pour $y_0 = 1$.

Si l'on pose, comme précédemment,

$$\alpha = a + \sqrt{a^2+1}, \quad \beta = -a + \sqrt{a^2+1},$$

cette formule devient (41)

$$2y_n = \alpha^{2n} + \beta^{2n} = f^2 + 2g^2 + h^2.$$

$2y_n$ étant un nombre *pair*, f et h sont *de même parité*. Ainsi

$$y_n = \left(\frac{f+h}{2}\right)^2 + \left(\frac{f-h}{2}\right)^2 + g^2. \qquad (72)$$

70. *Remarque*. A cause de $\alpha\beta = b^2 = 1$, on a (41):

$$f = \frac{\alpha^{n+1} \pm \beta^{n+1}}{\alpha+\beta}, \quad g = \frac{\alpha^n \mp \beta^n}{\alpha+\beta}, \quad h = \frac{\alpha^{n-1} \pm \beta^{n-1}}{\alpha+\beta};$$

puis

$$f - h = \frac{\alpha^{n-1}(\alpha^2-1) \pm \beta^{n-1}.(\beta^2-1)}{\alpha+\beta}.$$

Mais

$$\alpha^2 - 1 = 2a\alpha, \quad \beta^2 - 1 = -2a\beta;$$

conséquemment,

$$\frac{f-h}{2} = \frac{\alpha^n \mp \beta^n}{\alpha+\beta}.$$

Cette quantité n'est pas nulle; donc *les trois carrés ne peuvent se réduire à deux*.

71. *Application*. Soit l'équation

$$5x^2 = y^2 - 1,$$

de manière que $a = 2$. La formule (72) donne

$$y_1 = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{5})^2 + (-2+\sqrt{5})^2\right] = 9 = 2^2 + 2^2 + 1^2;$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{5})^4 + (-2+\sqrt{5})^4\right] = 161 = 12^2 + 4^2 + 1^2;$$

$$y_3 = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{5})^6 + (-2+\sqrt{5})^6\right] = 2\,889 = 38^2 + 34^2 + 17^2;$$

etc.

72. *Remarque*. Si l'on écrit ainsi la proposée :

$$a^2x^2 + x^2 + 1 = y^2,$$

on voit que y^2 *est la somme de trois carrés*. Donc les nombres donnés par la formule (72) *sont, chacun, la somme de trois carrés*. (*)

73. Problème. *Soit* $x^2 = a^2 + b^2 + c^2$. *Dans quel cas aura-t-on* $x = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$?

Si les nombres α, β, γ étaient donnés, on pourrait prendre (10) :

$$a = 2\alpha\gamma,\ b = 2\beta\gamma,\ c = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2.$$

Comparant cette dernière valeur à celle de x, on trouve

$$\gamma^2 = \frac{x - c}{2};$$

puis

$$\alpha = \frac{a}{2\gamma},\ \ \beta = \frac{b}{2\gamma}.$$

Par conséquent, les *conditions suffisantes* (mais non nécessaires) *sont*:

1° *que* $x - c$ (**) *soit le double d'un carré* γ^2 ;

2° *que* a *et* b *soient divisibles par* 2γ.

Exemple:

$$50^2 = 40^2 + 24^2 + 18^2.\ (***)$$

On a $\frac{50 - 18}{2} = 16$. Donc $\gamma = 4$; puis $\alpha = \frac{40}{8} = 5$, $\beta = \frac{24}{8} = 3$;

$$50 = 5^2 + 3^2 + 4^2.$$

(*) *Lorsqu'un carré*, A^2, *est la somme de trois carrés*, A *n'est pas toujours la somme de trois carrés*. Par exemple,

$$7^2 = 6^2 + 3^2 + 2^2;$$

mais 7 n'est pas la somme de trois carrés. D'après la Remarque, il y a exception pour $A = y_n$.

(**) c est un, *quelconque*, des trois nombre donnés.

(***) Cette égalité ne diffère pas de celle-ci :

$$25^2 = 20^2 + 12^2 + 9^2;$$

mais 25 n'est pas une somme de trois carrés.

VIII.

Sur le théorème de Gauss.

74. Soit encore l'égalité

$$4\frac{x^p-1}{x-1}=Y^2-pZ^2, \qquad (41)$$

dans laquelle p est un nombre premier, de la forme $4\mu+1$.

Les polynômes Y, Z, entiers par rapport à x, peuvent être représentés ainsi:

$$Y=Mx++N,\ \ Z=(Px+Q)x;\ (^*) \qquad (71)$$

M, N, P, Q étant des fonctions *paires*. Nous avons donc, au lieu de l'égalité précédente :

$$4\frac{x^p-1}{x-1}=(Mx+N)^2-p\,(Px+Q)^2\,x^2\,;$$

et, par le changement de x en $-x$:

$$4\frac{x^p+1}{x+1}=(Mx-N)^2-p\,(Px-Q)^2\,x^2.$$

Soient, pour abréger:

$$Mx+N=A,\ \ Px+Q=B,\ \ Mx-N=A',\ \ Px-Q=B'.$$

Alors,

$$16\,\frac{x^{2p}-1}{x^2-1}=(A^2-pB^2\,x^2)\ \ (A'^2-pB'^2\,x^2),$$

ou

$$16\,\frac{x^{2p}-1}{x^2-1}=(AA'\pm pBB'x^2)^2-p\,(AB'\pm BA')^2\,x^2.$$

On a :

$$AA'=M^2x^2-N^2,\ \ BB'=P^2x^2-Q^2,\ \ AB'+BA'=2\,(MPx^2-NQ),$$

$$AB'-BA'=-2\,(MQ-NP)\,x.$$

Donc, si l'on prend les signes *supérieurs*:

(*) Z est divisible par x. (Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, tome II, p. 556).

$$16\,\frac{x^{2p}-1}{x^2-1}\left[M^2x^2 - N^2 + p\,(P^2x^2 - Q^2)\,x^2\right]^2 - 4p\left[MPx^2 - NQ\right]^2 x^2\,; \qquad \text{(S)}$$

et, si l'on prend les signes *inférieurs* :

$$16\,\frac{x^{2p}-1}{x^2-1} = \left[M^2x^2 - N^2 - p\,(P^2x^2 - Q^2)\,x^2\right]^2 - 4p\left[MQ - NP\right]^2 x^4. \qquad \text{(T)}$$

Remettant x au lieu de x^2, et appelant M_1, N_1, P_1, Q_1 ce que deviennent M, N, P, Q par ce changement, on trouve

$$4\,\frac{x^p-1}{x-1} = \tfrac{1}{4}\left[M_1^2x - N_1^2 + p\,(P_1^2x - Q_1^2)x\right]^2 - p\left[M_1P_1\,x - N_1\,Q_1\right]^2 x, \qquad \text{(S')}$$

$$4\,\frac{x^p-1}{x-1} = \tfrac{1}{4}\left[M_1^2\,x - N_1^2 - p\,(P_1^2x - Q_1^2)x\right]^2 - p\left[M_1Q_1 - N_1P_1\right]^2 x^2. \qquad \text{(T')}$$

75. *Application*. Soit $p = 13$. Alors (*)

$$Y = 2x^6 + x^5 + 4x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 2,$$

$$Z = (x^4 + x^2 + 1)x;$$

$$M = x^4 - x^2 + 1,\quad N = 2x^6 + 4x^4 + 4x^2 + 2,\quad P = 0,\quad Q = x^4 + x^2 + 1;$$

$$M_1 = x^2 - x + 1,\quad N_1 = 2\,(x+1)\,(x^2 + x + 1),\quad P_1 = 0,\quad Q_1 = x^2 + x + 1\,;$$

$$M_1Q_1 - N_1P_1 = (x^2 - x + 1)\,(x^2 + x + 1) = x^4 + x^2 + 1 = \frac{Z}{x}\,;$$

$$M_1^2x - N_1^2 + 13\,Q_1^2\,x = (x^2 - x + 1)^2\,x - 4\,(x+1)\,(x^2 + x + 1)^2 + 13\,(x^2+x+1)^2\,x$$

$$= (x^2 - x + 1)^2\,x - \left[4x^2 - 5x + 4\right](x^2 + x + 1)^2$$

$$= (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1)x - (4x^6 + 8x^5 + 6x^4 + x^3 + 6x^2 + 3x + 4);$$

$$M_1^2\,x - N_1^2 + 13\,Q_1^2\,x = -\,2\,(2x^6 + x^5 + 4x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 2) = -\,2Y\,;$$

ou

$$M_1^2\,x - N_1^2 - 13\,Q_1^2\,x =$$

$$-\,2\,(2x^6 + x^5 + 4x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 2) - 26\,(x^2 + x + 1)^2\,x,$$

ou

(*) *Théorie des Nombres*, tome II, p. 195.

$$M_1^2 x - N_1^2 - 13\, Q_1^2\, x = -4\,(x^6 + 7x^5 + 15x^4 + 19x^3 + 15x^2 + 7x + 1);$$

$$M_1 P_1 x - N_1 Q_1 = -2\,(x+1)\,(x^2+x+1)^2.$$

La substitution dans (S'), (T') donne ensuite :

$$x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 =$$

$$(x^6 + 7x^5 + 15x^4 + 19x^3 + 15\,x^2 + 7x + 1)^2 - 13\,(x+1)^2\,(x^2+x+1)^4\, x\,; \quad (75)$$

$$4\,(x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1) = Y^2 - 13\,Z^2. \quad (76)$$

Cette dernière égalité est celle de Gauss; l'autre, aussi bien que (S'), est probablement nouvelle.

76. *Suite* On reconnaît aisément que, *dans tous les cas* :

$$M_1^2\, x - N_1^2 - p\,(P_1^2 x - Q_1^2)\, x = \pm 2Y, \quad (M_1Q_1 - N_1P_1)x = \pm Z. \qquad (77)$$

Par conséquent, comme le fait observer Legendre,

$$4\,\frac{x^p - 1}{x - 1} = (Y + Z\sqrt{p})\;(Y - Z\sqrt{p}).$$

L'égalité (S') ne donne pas une décomposition analogue à celle-ci : mais, si l'on remonte à la formule (S), ce qui revient à changer x en x^2 dans (S'), on a

$$4\,\frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1} = (U + Vx\sqrt{p})\;(U - Vx\sqrt{p}); \qquad (78)$$

eu posant

$$\left.\begin{aligned} &M^2x^2 - N^2 - p\,(P^2x^2 - Q^2)\,x^2 = \pm 2U, \\ &MPx^2 - NQ = \pm V. \end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

Ainsi, *l'équation*

$$x^{2p-2} + x^{2q-4} + .. + x^2 + 1 = 0$$

est décomposée, de deux manières différentes, en deux équations du degré (p − 1).

77. *Application*. Dans l'exemple traité ci-dessus, l'équation proposée était

$$x^{24} + x^{22} + x^{20} + \dots + x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

Par le théorème de Gauss, elle est réduite à

$$2x^{12} + x^{10} + 4x^8 - x^6 + 4x^4 + x^2 + 2 + \sqrt{13}\,(x^{10} + x^6 + x^2) = 0,$$

$$2x^{12} + x^{10} + 4x^8 - x^6 + 4x^4 + x^2 + 2 - \sqrt{13}\,(x^{10} + x^6 + x^2) = 0;$$

et, au moyen de la relation (75), aux deux équations :

$$x^{12} + 7x^{10} + 15x^8 + 19x^6 + 15x^4 + 7\,x^2 + 1 + \sqrt{13}\,(x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1)^2\,x = 0,$$

$$x^{12} + 7x^{10} + 15x^8 + 19x^6 + 15x^4 + 7x^2 + 1 - \sqrt{13}\,(x^2 + 1)\,(x^4 + x^2 + 1)^2\,x = 0.$$

78. *Remarques*. I. Si l'on désigne par X_0, Z_0 ce que deviennent les polynômes Y, Z, quand on y change x en x^2, on a la *double* identité:

$$4\,\frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1} = (Y_0 + Z_0\sqrt{p})\,(Y_0 - Z_0\sqrt{p}) = (U + Vx\sqrt{p})\,(U - Vx\sqrt{p}).$$

En particulier :

$$4(x^{24} + x^{22} + x^{20} + x^{18} + x^{16} + x^{14} + x^{12} + x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1) =$$

$$\{2x^{12} + (1 + \sqrt{13})\,x^{10} + 4x^8 + (\sqrt{13} - 1)\,x^6 + 4x^4 + (1 + \sqrt{13})\,x^2 + 2\}$$

$$\{2x^{12} - (\sqrt{13} - 1)\,x^{10} + 4x^8 - (\sqrt{13} + 1)\,x^6 + 4x^4 - (\sqrt{13} - 1)\,x^2 + 2\} =$$

$$4\{x^{12} + \sqrt{13}x^{11} + 7x^{10} + 3\sqrt{13}x^9 + 15x^8 + 5\sqrt{13}x^7 + 19x^6 + 5\sqrt{13}x^5 + 15x^4 + 3\sqrt{13}x^3 + 7x^2 + \sqrt{13}x + 1\}$$

$$\{x^{12} - \sqrt{13}x^{11} + 7x^{10} - 3\sqrt{13}x^9 + 15x^8 - 5\sqrt{13}x^7 + 19x^6 - 5\sqrt{13}x^5 + 15x^4 - 3\sqrt{13}x^3 + 7x^2 - \sqrt{13}x + 1\}.$$

II. Les considérations précédentes sont applicables au cas où $p = 4\mu - 1$. L'équation (41) devient, comme l'on sait,

$$4\,\frac{x^p - 1}{x - 1} = Y^2 + p\,Z^2. \tag{80}$$

Il suffit, pour trouver les nouvelles formules, d'effectuer le changement de p en $-p$ dans les seconds membres des égalités (S), (T), (S'), (T').

III. Les égalités (77) établissent, entre Y et Z, des relations qui pourront, peut-être, simplifier le calcul de ces polynômes. Si l'on suppose

$$Y = 2x^{2\mu} + x^{2\mu-1} + ax^{2\mu-2} + bx^{2\mu-3} + \ldots + x + 2, \; (^*)$$

$$Z = \alpha x^{2\mu-1} + \beta x^{2\mu-2} + \gamma x^{2\mu-3} + \ldots + \gamma x^3 + \beta x^2 + \alpha x,$$

(*) On sait que Y commence par $2x^{2\mu} + x^{2\mu-1}$.

on trouve :

$$a = \mu + 1, \quad \alpha = 1;$$

puis les deux systèmes :

$$\beta = 0, \quad \gamma + b - 2\delta = 0;$$

$$\beta = 1, \quad \gamma + b - 2\delta = \mu. \text{ (*)}$$

IV. A propos du calcul des polynômes Y, Z, l'illustre Géomètre s'énonce ainsi : « on aura généralement

$$Y = 2x^m - 2mx^{m-1} + 2m\,\frac{m-1}{2}\,x^{m-2} - 2m\,\frac{m-1 \,.\, m-2}{2 \,.\, 3}\,x^{m-3} + \text{etc.};$$

» et dans ce développement *il ne restera plus qu'à réduire les coeffi-*
» *cients au dessous de* $\frac{1}{2}n$, en supprimant les multiples de n qu'ils peu-
» vent contenir; .. »

Cette règle ne nous semble ni démontrée ni claire (**).

En attendant que nous puissions revenir sur ce sujet, voici quelques indications simples.

1° Dans l'égalité

$$4\,(x^{p-1} + x^{p-2} + .. + x + 1) = Y^2 - pZ^2, \qquad (41)$$

qui suppose $p = 4\mu + 1$, faisons $x = 1$. Soient B, C les résultats de cette substitution, (***) dans les polynomes Y, Z : on a

$$p\,(4 + C^2) = B^2.$$

Donc, à cause de $p = a^2 + b^2$, B *est une somme de deux carrés, divisible par* p. (****)

(*) Ces égalités sont vérifiées par les valeurs que donne Legendre.

(**) Dans un petit Mémoire publié en 1857, M. Liouville a traité la même question. Mais les formules données par mon bien regretté maître sont peu praticables.

(***) B est la somme des coefficients de Y; C, la somme des coefficients de Z.

(****) Si l'on fait $B = pD$, on a

$$C^2 - pD^2 = -4.$$

Donc

$$z = C, \; u = D$$

forment une solution de l'équation

$$z^2 - pu^2 = -4.$$

Est ce parce que cette remarque est *trop simple* qu'elle ne se trouve, ni dans *Legendre* ni dans *Serret* ?

2° Soit maintenant l'égalité

$$4\left(x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1\right) = Y^2 + pZ^2, \qquad (80)$$

auquel cas $p = 4\mu - 1$. Le polynôme Y a ses coefficients égaux et de signes contraires deux à deux; donc il s'annule pour $x = 1$; et, en conséquence,

$$C = \pm 2. \ (*)$$

Liége, 9 *Novembre* 1883.

IX.

Question d'analyse indéterminée.

79. Soit l'équation

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 + w^2, \qquad (81)$$

à laquelle il s'agit de satisfaire par des valeurs entières de x, y, u, v, w.

Si l'on pose

$$u = x + \alpha, \quad v = y - \beta, \qquad (82)$$

la proposée devient

$$\beta y - \alpha x = \tfrac{1}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2 + w^2\right). \qquad (83)$$

Ainsi, α, β, w peuvent être pris arbitrairement, à cela près que leur somme soit *paire*. En outre, afin d'obtenir des solutions *essentiellement différentes*, nous supposerons α et β *premiers entre eux*. (**)

Cela posé, *toutes les solutions* de l'équation (83) sont, comme l'on sait, données par les formules :

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2 + w^2\right) p + \beta\theta, \quad y = \tfrac{1}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2 + w^2\right) q + \alpha\theta, \qquad (84)$$

dans lesquelles les entiers p, q satisfont à la condition

$$\beta q - \alpha p = 1. \qquad (85)$$

(*) Ceci suppose $p > 3$. Lorsque $p = 3$, $Y = 2x + 1$.

(**) Si l'équation est vérifiée par

$$x = a, \ y = b, \ u = c, \ v = d, \ w = e,$$

elle l'est par

$$x = \lambda a, \ y = \lambda b, \ u = \lambda c, \ v = \lambda d, \ w = \lambda e,$$

λ étant un entier quelconque. Mais ces diverses solutions n'en font, véritablement, qu'une seule; savoir, la première, si a, b, c, d, e n'ont aucun facteur commun. Cette solution pourrait être regardée comme *primitive*. Nous supposerons qu'il en est ainsi.

80. *Remarques* I. Lorsq'une solution de l'équation (81) n'est pas *primitive*, le plus grand commun diviseur des valeurs de x, y, u, v, w divise α et β (82). Si donc, comme nous l'avons admis, α et β sont premiers entre eux, toutes les solutions, données par les formules (84), (82), seront *primitives*.

II. α, β, w étant *constants*; si l'on remplace p par p', q par q', *les nouvelles solutions ne diffèrent pas des premières.*

1° D'après l'équation (85),

$$q' = q + \alpha k, \quad p' = p + \beta k;$$

k étant un entier quelconque.

2°
$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + w^2)(p + \beta k) + \beta\theta' \\ &= \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + w^2)\,p + \beta\left[\tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + w^2)\,k + \theta'\right] \end{aligned}$$

Cette valeur égale celle de x, si

$$\theta' = \theta - \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + w^2)\,k.$$

III. Si l'on remplace α, β par α', β', *les nouvelles solutions diffèrent des premières.*

En effet, l'hypothèse suivante:

$$x' = x, \; y' = y, \; u' = u, \; v' = v$$

donne

$$\alpha' = \alpha, \; \beta' = \beta.$$

IV. Par conséquent, les formules (84), (82) donnent, sans *omissions et sans répétitions*, les solutions demandées.

81. *Exemples*. I. $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $w = 1$. L'équation (85) est vérifiée par $p = 1$, $q = 1$. Donc

$$x = 7 + 3\theta, \; y = 7 + 2\theta, \; u = 9 + 3\theta, \; v = 4 + 2\theta;$$

puis les progressions:

$$\begin{array}{l} \ldots\ldots -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \ldots; \\ \ldots\ldots +1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots; \\ \ldots\ldots\ \ 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ \ldots; \\ \ldots\ldots -2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots; \end{array}$$

et les égalités :

$$2^2 + 1^2 = 0^2 + 2^2 + 1^2, \quad 1^2 + 3^2 = 3^2 + 0^2 + 1^2,$$

$$4^2 + 5^2 = 6^2 + 2^2 + 1^2, \quad 7^2 + 7^2 = 9^2 + 5^2 + 1^2, \ldots$$

II. $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $w = 3$. L'équation (85) :

$$5q - 2p = 1$$

est vérifiée par $q = 1$, $p = 2$. Donc :

$$x = 38 + 5\theta, \ y = 19 + 2\theta, \ u = 40 + 5\theta, \ v = 11 + 2\theta;$$

puis les progressions :

. . . . . 3, 8, 13, 18, 26, 28, 33, ... ;

. . . . . 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ... ;

. . . . . 6, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ... ;

. . . . . 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... ;

et les égalités :

$$3^2 + 5^2 = 5^2 + 0^2 + 3^2, \quad 8^2 + 7^2 = 10^2 + 2^2 + 3^2,$$

$$13^2 + 9^2 = 15^2 + 4^2 + 3^2 \ldots .$$

III. $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $w = 7$.

L'équation auxiliaire est vérifiée par $p = 1$, $q = 1$. Conséquemment

$$x = 37 + 4\theta, \ y = 37 + 3\theta, \ u = 40 + 4\theta, \ v = 33 + 3\theta;$$

puis

$$37^2 + 37^2 = 40^2 + 33^2 + 7^2,$$

$$41^2 + 40^2 = 44^2 + 36^2 + 7^2,$$

$$45^2 + 43^2 = 48^2 + 39^2 + 7^2,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

X.

Autre question d'Analyse indéterminée.

82. **Problème.** *Trouver un carré égal à la somme de* n *carrés.*

Soit, pour fixer les idées, $n = 5$. La résolution de

$$u^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \qquad (86)$$

repose sur l'identité :

$$\left.\begin{aligned}
&[(\alpha_1^2+\beta_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)(\alpha_3^2+\beta_3^2)(\alpha_4^2+\beta_4^2)]^2 = \\
&[(\alpha_1^2-\beta_1^2)(\alpha_2^2-\beta_2^2)(\alpha_3^2-\beta_3^2)(\alpha_4^2-\beta_4^2)]^2 \\
&+[(\alpha_1^2-\beta_1^2)(\alpha_2^2-\beta_2^2)(\alpha_3^2-\beta_3^2)\,2\alpha_4\beta_4]^2 \\
&+[(\alpha_1^2-\beta_1^2)(\alpha_2^2-\beta_2^2)\,2\alpha_3\beta_3(\alpha_4^2+\beta_4^2)]^2 \\
&+[(\alpha_1^2-\beta_1^2)\,2\alpha_2\beta_2(\alpha_3^2+\beta_3^2)(\alpha_4^2+\beta_4^2)]^2 \\
&+[2\alpha_1\beta_1(\alpha_2^2+\beta_2^2)(\alpha_3^2+\beta_3^2)(\alpha_4^2+\beta_4^2)]^2. \ (^*)
\end{aligned}\right\} \quad (U)$$

Elle donne, en effet, le système suivant :

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= (\alpha_1^2-\beta_1^2)(\alpha_2^2-\beta_2^2)(\alpha_3^2-\beta_3^2)(\alpha_4^2-\beta_4^2), \\
x_2 &= (\alpha_1^2-\beta_1^2)(\alpha_2^2-\beta_2^2)(\alpha_3^2-\beta_3^2)\,2\alpha_4\beta_4, \\
x_3 &= (\alpha_1^2-\beta_1^2)(\alpha_2^2-\beta_2^2)\,2\alpha_3\beta_3(\alpha_4^2+\beta_4^2), \\
x_4 &= (\alpha_1^2-\beta_1^2)\,2\alpha_2\beta_2(\alpha_3^2+\beta_3^2)(\alpha_4^2+\beta_4^2), \\
x_5 &= 2\alpha_1\beta_1(\alpha_2^2+\beta_2^2)(\alpha_3^2+\beta_3^2)(\alpha_4^2+\beta_4^2), \\
u &= (\alpha_1^2+\beta_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)(\alpha_3^2+\beta_3^2)(\alpha_4^2+\beta_4^2).
\end{aligned}\right\} \quad (87)$$

(*) Cette identité résulte des formules :

$$\begin{aligned}
x_1 &= u \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \ldots \cos\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}, \\
x_2 &= u \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \ldots \cos\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1}, \\
x_3 &= u \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= u \sin\varphi_1,
\end{aligned}$$

employées, si je ne me trompe, par Jacobi.

83. *Exemple.* Soient :

$$\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = 2,\ \alpha_2 = 3,\ \beta_2 = 4,\ \alpha_3 = 5,\ \beta_3 = 6,\ \alpha_4 = 7,\ \beta_4 = 8.$$

On trouve :

$$x_1 = 3\,445,\ x_2 = -25\,872,\ x_3 = 142\,380,\ x_4 = -496\,296,$$

$$x_5 = 689\,300,\ u = 861\,625.$$

Ainsi

$$861\,625^2 = 3\,445^2 + 25\,872^2 + 142\,380^2 + 496\,296^2 + 689\,300^2,$$

ou

$$742\,397\,640\,625 = 12\,006\,225 + 669\,360\,384$$

$$+ 20\,272\,064\,400 + 246\,309\,719\,616 + 475\,134\,490\,000;$$

ce qui est exact.

84. *Remarques.* I. La valeur de u est le produit de plusieurs facteurs égaux, chacun, à la somme de deux carrés. Conséquemment, *u est une somme de deux carrés.*

II. D'après les formules (87):

$$x_1^2 + x_2^2 = [(\alpha_1^2 - \beta_1^2)\ (\alpha_2^2 - \beta_2^2)\ (\alpha_3^2 - \beta_3^2)]^2\ (\alpha_4^2 + \beta_4^2)^2$$

$$= [(\alpha_1^2 - \beta_1^2)\ (\alpha_2^2 - \beta_2^2)\ (\alpha_3^2 - \beta_3^2)\ (\alpha_4^2 + \beta_4^2)]^2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = [(\alpha_1^2 - \beta_1^2)\ (\alpha_2^2 - \beta_2^2)\ (\alpha_4^2 + \beta_4^2)]\ (\alpha_3^2 + \beta_3^2)^2$$

$$= [(\alpha_1^2 - \beta_1^2)\ (\alpha_2^2 - \beta_2^2)\ (\alpha_3^2 + \beta_3^2)\ (\alpha_4^2 + \beta_4^2)]^2;\ \text{etc.}$$

Ainsi u^2, *somme de cinq carrés*, est une *somme de quatre carrés*, une *somme de trois carrés*, et enfin une *somme de deux carrés*.

85. *Suite.* Ces deux remarques démontrent le théorème suivant, qu'il suffit d'énoncer :

Soit N *un nombre impair,* (*) *égal à la somme de deux carrés. Soit* n *le nombre des facteurs premiers, égaux ou inégaux, qui le composent.*

Le carré de N *est : la somme de deux carrés, la somme de trois carrés, la somme de quatre carrés....., la somme de* n + 1 *carrés.*

(*) Sans cette restriction, un facteur premier de N serait $2 = 1^2 + 1^2$, et certains carrés deviendraient nuls.

86. *Application.* $N = 325 = 5^2 . 13$. On trouve

$$325^2 = 45^2 + 108^2 + 156^2 + 260^2 = 117^2 + 156^2 + 260^2 = 195^2 + 260^2;$$

puis, en écrivant

$$325 = 5 . 13 \, 5 :$$

$$325^2 = 45^2 + 60^2 + 180^2 + 260^2 = 75^2 + 180^2 + 260^2 = 195^2 + 260^2. \; (*)$$

XI.

Emploi d'une Série.

87. Si l'on suppose

$$y = \frac{\text{arc}\sin x}{\sqrt{1 - x^2}} = x + A_2 x^3 + \ldots + A_n x^{2n-1} + \ldots, \tag{88}$$

on trouve, très facilement (**)

$$A_n = \frac{2 . 4 . 6 \ldots (2n-2)}{3 . 5 . 7 \ldots (2n-1)}; \tag{89}$$

puis

$$(\text{arc}\sin x)^2 = \sum_1^\infty \frac{2 . 4 . 6 \ldots \overline{2n-4} \; \overline{2n-2}}{3 . 5 . 7 \ldots \overline{2n-3} \; \overline{2n-1}} \frac{x^{2n}}{n};$$

ou, par le changement de x en $\sqrt{x}$:

$$(\text{arc}\sin \sqrt{x})^2 = \sum_1^\infty \frac{2 . 4 . 6 \ldots \overline{2n-2}}{3 . 5 . 7 \ldots \overline{2n-1}} \frac{x^n}{n}.$$

Cette formule est due à Clausen, qui l'a obtenue par un procédé tout différent du nôtre.

(*) On voit que les décompositions indiquées dans l'énoncé du théorème sont, en général, *possibles* de plusieurs manières. Par exemple;

$$1\,105^2 = 225^2 + 120^2 + 612^2 + 884^2 = 255^2 + 612^2 + 884^2 = 663^2 + 884^2$$

$$1\,105^2 = 225^2 + 300^2 + 200^2 + 1\,020^2 = 375^2 + 200^2 + 1\,020^2 = 425^2 + 1\,020^2,$$

$$1\,105^2 = 225^2 + 540^2 + 780^2 + 520^2 = 585^2 + 780^2 + 520^2 = 975^2 + 520^2,$$

etc.

(**) Il suffit d'observer que la relation entre y et x donne

$$\left(1 - x^2\right) \frac{dy}{dx} - xy = 1.$$

88. On a :

$$\text{arc}\sin x = \sum_0^\infty \frac{1.3\ldots\overline{2p-1}}{2.4\ldots 2p}\,\frac{x^{2p+1}}{2p+1},\qquad (90)$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty \frac{1.3\ldots\overline{2q-1}}{2.4\ldots 2p}\,x^{2q}.\qquad (91)$$

Par conséquent,

$$\sum \frac{1.3.5\ldots\overline{2p-1}}{2.4.6\ldots 2p}\,\frac{1}{2p+1}\,\frac{1.3.5\ldots\overline{2q-1}}{2.4.6\ldots 2q} = \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots 2n+1},\ (p+q=n)$$

ou

$$\left.\begin{aligned}&\sum \frac{1.3.5\ldots\overline{2p-1}.1.3.5\ldots\overline{2q-1}}{2.4.6\ldots 2p\,(2p+1).2.4.6\ldots 2q}.1.2.3\ldots\overline{2n+1}\\ &= (2.4.6\ldots 2n)^2.\end{aligned}\right\}\ (92)$$

La quantité sous le signe $\sum$ est la même chose que

$$\frac{[1.3.5\ldots\overline{2p-1}.1.3.5\ldots\overline{2n-2p-1}]^2}{1.2.3\ldots\overline{2p+1}.1.2.3\ldots 2n-2p}.1.2.3\ldots\overline{2n+1}$$

$$= C_{2n+1,\,2p+1}\,[1.3.5\ldots\overline{2p-1}.3.5\ldots\overline{2n-2p-1}]^2.$$

L'identité (91) devient donc

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{p=0}^{p=n} C_{2n+1,\,2p+1}\,[1.3.5\ldots\overline{2p-1}.3.5\ldots\overline{2n-2p-1}]^2\\ &= (2.4.6\ldots 2n)^2\ (^*).\end{aligned}\right\}\ (\text{V})$$

Celle-ci démontre le théorème suivant :

Le nombre $(2.4.6\ldots 2n)^2$ *est la somme de* 4^n *carrés impairs.* (**)

89. *Suite.* Le second membre de V égale $4^4\,(1.2.3\ldots n)^2$. Nous avons donc, au lieu de cette identité,

---

(*) D'après le calcul précédent, le premier produit entre parenthèses doit être supposé égal à 1, si $p=0$. De même pour le second produit, si $p=n$.

(**) En effet,

$$\sum_{p=0}^{p=n} C_{2n+1,\,p+1} = \tfrac{1}{2}.\,2^{2n+1} = 4^n\,2^{2n+1}$$

$$\sum_{p=0}^{p=n} C_{2n+1,\,2p+1}\left[\frac{1.3.5\ldots\overline{2p-1}.1.3.5\ldots\overline{2n-2p-1}}{1.2.3\ldots n}\right]^2 = 4^n.$$

Si l'on multiplie, par $2.4.6.\,2p.\,2.4.6.\,\overline{2n-2p}$, les deux termes de la fraction, elle se transforme en

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \frac{1.2.3\ldots 2p.1.2.3\ldots\overline{2n-2p}}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots\overline{n-p}}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{p=0}^{p=n} C_{2n+1,\,2p+1}\left[\frac{1.2.3\ldots 2p.1.2.3\ldots\overline{2n-2p}}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots\overline{n-p}\,1.2.3\ldots n}\right]^2 = 16^n. \quad \text{(W)}$$

90. *Suite*. Dans ma *Seconde Note sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques,* j'ai démontré ce théorème :
a, b *étant des nombres entiers, la fraction*

$$\frac{1.2\ldots 2a\times 1.2.3\ldots 2b}{1.2.3\ldots a\times 1.2.3\ldots b\times 1.2.3\ldots\overline{a+b}} = \varphi(a,b)$$

est réductible à un nombre entier (*).

L'identité (W) prouve donc que :

4^{2n} *est la somme de* 4^n *carrés.*

Mais nous pouvons aller plus loin.

91. Lemme I. *Le nombre* φ (a, b) *est pair.*

Le facteur 2 est contenu, dans le numérateur de la fraction φ, un nombre de fois marqué par

$$a + \left(\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{a}{2}\right) + \ldots + b + \left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{4}\right) + \ldots \text{(**)}.$$

Il est contenu, dans le dénominateur, un nombre de fois marqué par

(*) Une *généralisation* a été proposée dans les *Nouvelles Annales* (1875, p. 89); mais elle est insignifiante: le numérateur de la *nouvelle* fraction est trop grand, relativement au dénominateur. En outre, l'Auteur de la Note citée s'est trompé sur la signification du symbole Γ.

(**) Je rappelle que $\left(\frac{a}{2}\right)$ représente le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{a}{2}$. De même pour $\left(\frac{a}{4}\right)$, ...

$$\left(\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{a}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{4}\right) + \ldots$$

Supprimant les termes communs, on doit prouver l'inégalité

$$a + b > \left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{4}\right) + \left(\frac{a+b}{8}\right) + \ldots \qquad (93)$$

Or, le premier membre surpasse

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{4} + \frac{a+b}{8} + \ldots;$$

donc, à plus forte raison, il surpasse le second membre.

92. Lemme II. $\varphi(a, b)$ *est divisible par* 2^s, *s représentant le nombre des puissances de* 2 *ayant pour somme* $a + b$.

Soit

$$a + b = 2^\alpha + 2^\beta + \ldots + 2^\lambda; \qquad (94)$$

et, par conséquent :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2^{\alpha-1} + 2^{\beta-1} + \ldots + 2^{\lambda-1}, \quad (*)$$

$$\left(\frac{a+b}{4}\right) = 2^{\alpha-2} + 2^{\beta-2} + \ldots + 2^{\lambda-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

puis

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{4}\right) + \left(\frac{a+b}{8}\right) + \ldots = (2^\alpha - 1) + (2^\beta - 1) + \ldots + (2^\lambda - 1),$$

ou

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{4}\right) + \left(\frac{a+b}{8}\right) + \ldots = a + b - s,$$

ou enfin :

$$(a + b) + \left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(\frac{a+b}{4}\right) - \left(\frac{a+b}{8}\right) - \ldots = s. \qquad (95)$$

Cela posé, d'après le premier Lemme, $\varphi(a, b)$ est divisible par une puissance de 2 ayant pour exposant

(*) Il est bien entendu qu'aucun exposant ne doit être négatif: quand il est nul, on arrête la division par 2.

$$(a + b) - \left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(\frac{a+b}{4}\right) - \left(\frac{a+b}{8}\right) - \ldots;$$

c'est-à-dire, divisible par 2^s.

93. Lemme III. *Le quotient de* φ (a, b), *par* 2^s, *est impair.*

En effet, la plus haute puissance de 2, qui divise φ (a, b), est 2^s.

94. Théorème. *Soit* s *le nombre des puissances de* 2 *ayant* n *pour somme*: 4^{2n-s} *est la somme de* 4^n *carrés impairs.*

Ecrivons ainsi l'identité (W):

$$\sum_{p=0}^{p=n} C_{2n+1,\, 2p+1} \left[\frac{\varphi(p, n-p)}{2^s}\right]^2 = 4^{2n-s} \qquad \text{(X)}$$

D'après le dernier Lemme, la quantité $\frac{\varphi(p, n-p)}{25}$ est un nombre impair; donc, etc.

95. *Application.* Soit $n = 7 = 4 + 2 + 1$; d'où $s = 3$.

On a:

$$\frac{\varphi(0, 7)}{8} = \frac{1}{8}\,\frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 429,$$

$$\frac{\varphi(1, 6)}{8} = \frac{1}{8}\,\frac{1 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 33,$$

$$\frac{\varphi(2, 5)}{8} = \frac{1}{8}\,\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 9,$$

$$\frac{\varphi(3, 4)}{8} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5.$$

D'après l'identité (X), on doit avoir:

$$\frac{15}{1}\,429^2 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,33^2 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\,9^2 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}\,5^2$$

$$+ \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\,5^2 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\,9^2 + \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2}\,33^2 + 429^2 = 4^{11},$$

ou

$$16.\ 184\,041 + 5\,60.\ 1\,089 + 4\,368.\ 81 + 11\,440.\ 34 = 4^{11},$$

ou

$$184\,041 + 35.\ 1\,089 + 273.\ 81 + 715.\ 25 = 4^9.$$

Le premier membre égale

$$184\,041 + 38\,115 + 22\,113 + 17\,875 = 262\,144\,;$$

et le dernier nombre ne diffère pas de 4^9.

96. *Remarque.* Lorsque $p = 0$,

$$\varphi(p, n-p) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)^n} = C_{2n, n}$$

Par conséquent :

s *représentant le nombre des puissances de* 2 *ayant* n *pour somme* :

1° *Le nombre des combinaisons de* 2n *lettres,* n *à* n, *est divisible par* 2^s ;

2° *le quotient est impair.*

97. *Calcul de* s. Reprenons l'égalité

$$n = 2^\alpha + 2^\beta + \ldots + 2^\lambda, \tag{94}$$

dans laquelle $a + b$ a été remplacé par n.

Le nombre n étant la somme de s puissances de 2, il s'ensuit que, dans le *système binaire*, n serait représenté par le chiffre 1, écrit s fois, et accompagné de zéros, s'il est nécessaire. Or, pour *traduire* n dans le système binaire, on divise n par 2, puis $\left(\frac{n}{2}\right)$ par 2, puis $\left(\frac{n}{4}\right)$ par 2, . . . : les restes successifs sont les chiffres cherchés. Conséquemment : *Si l'on prend, parmi les dividendes*

$$\left(\frac{n}{1}\right),\ \left(\frac{n}{2}\right),\ \left(\frac{n}{4}\right),\ \left(\frac{n}{8}\right),$$

ceux qui sont impairs, leur nombre égale s (*).

98. *Généralisation.* Soit

$$N = ap^{k-1} + bp^{k-2} + \ldots + fp + g,$$

(*) M. Ernest Cesarò, bien connu par de belles recherches d'Arithmétique supérieure, est arrivé, de son côté, à un théorème analogue à celui-ci. (Voir *Mathesis*, décembre 1883). Du reste, la proposition énoncée par ce jeune et profond Géomètre résulte, immédiatement, de ce Lemme préliminaire :

» *Selon que* $\left(\frac{2n}{a}\right)$ *est* PAIR OU IMPAIR,

$$\left(\frac{2n}{a}\right) - 2\left(\frac{n}{a}\right)$$

égale zéro ou un » (*Problèmes et théorèmes d'Arithmétique*, p. 6).

les nombres entiers $a, b, c, \ldots f, g$ étant moindres que p. S'il y en s qui soient différents de *zéro*, il est clair que N *est un nombre de* k *chiffres, dans le système dont la base est* p. Cela posé, nous pouvons énoncer le théorème suivant, évident par ce qui précède.

Le nombre s, *des chiffres significatifs de* N, *dans le système dont la base est* p, *égale le nombre de ceux, des dividendes :*

$$\left(\frac{N}{1}\right), \left(\frac{N}{p}\right), \left(\frac{N}{p^2}\right), \left(\frac{N}{p^3}\right),$$

qui ne sont pas multiples de p.

P. S. — Problème. *Trouver une somme de quatre carrés égale à une somme de quatre bi-carrés.*

Une infinité de solutions résultent de l'identité

$$[2(x^2 + y^2 + z^2)]^2 + (4xy)^2 + (4yz)^2 + (3zx^2 =$$
$$(-x + y + z)^4 + (x - y + z)^4 + (x + y - z)^4 + (x + y + z)^4,$$

que je trouve dans mes notes de 1878.

Elle donne, par exemple :

$$6^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 = 1^4 + 1^4 + 1^4 + 3^4,$$

$$42^2 + 8^2 + 32^2 + 16^2 = 5^4 + 3^4 + 1^4 + 7^4,$$

etc.

Spa, 28 *juillet* 1884.

SULLA STRAORDINARIA LUCE CREPUSCOLARE DEL 1883-84.

NOTA

DEL P. F. S. PROVENZALI, D. C. D. G.

La straordinaria luce crepuscolare che negli ultimi due mesi del 1883 e nei primi del corrente anno 1884 destò fra noi la meraviglia di tutti, fu pure veduta non solo negli altri paesi d'Italia e d'Europa, ma nell'Australia, nell' America e pressochè in ogni parte della Terra. Oltre la diuturna durata e la quasi simultanea comparsa in tante e sì lontane regioni, ciò che v'ebbe di singolare in questo fenomeno fu la grande intensità della luce e la sua persistenza talvolta fino a due e più ore dopo il tramonto del sole ed altrettante prima della levata. Al primo apparire di tale fenomeno alcuni credettero che a darne ragione potessero bastare gli ordinari agenti atmosferici: voglio dire delle notabili alterazioni nella densità dell' aria od una più grande quantità di cristallini di ghiaccio, che accumulati nelle alte regioni dell'atmosfera ne aumentassero il potere rifrangente e riflettente per modo da far giungere a noi la luce, che nelle circostanze ordinarie non vi arriva o per difetto di direzione, o perchè assorbita dai sottostanti strati di aria più densa e più vaporosa. Quando si trattasse di un fenomeno locale e di breve durata nulla vi sarebbe da opporre a questa spiegazione; ed è appunto a siffatte condizioni atmosferiche che si sogliono attribuire i lunghi e splendidi crepuscoli assai frequenti nei paesi settentrionali e sulle cime di alte montagne, ove dotti viaggiatori trovandosi di notte, videro la luce crepuscolare mantenersi sensibile anche allora che il Sole era sceso di 45° sotto l' orizzonte (1). Ma nel caso presente il fenomeno si è mostrato per mesi continui in paesi di clima molto disparato ed in circostanze meteorologiche affatto diverse, anzi spesso contrarie, di maniera che non sembra possibile darne ragione colle sole vicissitudini di densità e copia di ghiacciuoli nell' atmosfera (2). Queste considerazioni da me fatte fino dai primi giorni che osservai quella luce, e ne lessi le relazioni venuteci da' paesi

(1) Narra Saussure nei suoi viaggi, che trovandosi egli sul *Col du Géant* a 3428 metri sul livello del mare, per alcuni giorni vide il crepuscolo durare dal tramonto del Sole fino al suo nascere. Un somigliante fenomeno fu osservato da Humboldt sul vulcano di Antisana a 5833 metri di altezza.

(2) In Roma nei giorni più freddi gli splendori crepuscolari anzi che crescere andarono piuttosto diminuendo. Dopo la metà di Febbraio, quando la temperatura giunse ad un minimo, in alcuni giorni, quantunque perfettamente sereni, i crepuscoli si presentarono come all'ordinario.

lontani, mi fecero nascere il sospetto che un tale fenomeno, prescindendo dalla parte che vi aveva il vapore d'acqua esistente nell'atmosfera, fosse dovuto all'immensa quantità di ceneri versate nell'aria dalle recenti eruzioni vulcaniche e specialmente dalle terribilissime avvenute l'Agosto passato nello stretto della Sonda (1). L'impeto con cui vennero lanciati in alto i prodotti dell'eruzione di Crakatsa del 26 Agosto fu tale, che le onde generate nell'aria fecero per bene tre o quattro volte l'intero giro della Terra con una velocità che dal Prof. Foerster direttore dell'Osservatorio di Berlino fu calcolata di 1000 chilometri all'ora; velocità più che sufficiente a portarne le particelle più tenui al di là del limite de'venti alisei, e dove l'aria è sempre tanto rarefatta, che senza l'intervento di materie eterogenee non potrebbe rinviarci una parte sensibile delle radiazioni solari (2).

Non è questa la prima volta che delle grandi eruzioni vulcaniche furono accompagnate da insoliti splendori crepuscolari. Nella state del 1831 la splendida luce che apparve per alcuni mesi tanto la sera che la mattina su di un'ampia zona che aveva per centro la Sicilia, fu pure preceduta da straordinarie eruzioni vulcaniche e dalla nascita della nuova isola Giulia nel mare di Sicilia a 30 chilometri circa da Sciacca. Questa isola, formata di materie incoerenti e dal cui mezzo si elevava nell'aria una immensa colonna di cenere, scomparve pochi mesi dopo che era emersa dalle acque: a quel modo che nell'Agosto passato in forza delle eruzioni dei numerosi vulcani della Sonda parecchie isole scomparvero, ed altre nuove se ne formarono.

In una scala più limitata, ma pure abbastanza estesa anche ad occasione di grandi parossismi dell'Etna e del Vesuvio si è più volte notato un aumento nella durata ed intensità dei crepuscoli. Abbiamo dal Monticelli che dopo l'imponente eruzione del Vesuvio avvenuta nell'Ottobre del 1822, a

---

(1) L'ingegnere olandese M. Werbeek incaricato dal suo Governo di un rapporto ufficiale sulla catastrofe della Sonda, valuta a 3500 chil. il raggio su cui l'esplosione d'Agosto si estese tutto attorno a Crakatoa, ed a 35 chil. cubi il volume delle ceneri versate nell'atmosfera.

(2) M. Wolf dalla comparazione delle curve barometriche dedusse che la velocità di propagazione delle onde atmosferiche partite da Crakatoa il 26 Agosto fu di 1205 chil. all'ora, numero che più prossimamente rappresenta la velocità del suono nell'aria. Stando ai calcoli di M. Erington de la Croix anche maggiore sarebbe stata la velocità (cioè circa 550 metri al secondo) impressa nelle acque dell'Oceano dalla spaventosa catastrofe del 26 Agosto. Altri però assegnano alle onde marine generate dall'esplosione di Crakatoa una velocità molto minore. M. Courcelle-Seneuil, che a quell'epoca faceva parte della Spedizione francese alla Terra del fuoco, mediante le indicazioni del *maregrafo* trovò tale velocità di soli 150 metri al secondo. Comunque sia è certo che l'impulso ricevuto in quel frangente dall'intera massa oceanica, impulso che fu risentito fino a S. Francisco e destò delle onde di oltre a 30 metri d'altezza, mostra che l'eruzione di Crakatoa si effettuò con una violenza veramente eccezionale.

notte inoltrata cioè alle ore 8 pomeridiane, l'orizzonte brillava ancora di vivissima luce, e che più chiara mostrossi ancora l'aurora i giorni appresso, sebbene poi molto tetro fosse il mattino per la densa caligine di sabbia che offuscava l'aria (1).

Se non che più di queste considerazioni e coincidenze di fenomeni, ciò che mi rese più verisimile il mio sospetto o ipotesi che vogliam dire, furono le sperienze da me e da altri fatte sulle acque di pioggia cadute durante il tempo che si mostrò quella luce crepuscolare.

La prima sperienza la feci sull'acqua caduta nella notte dal 4 al 5 decembre, in cui avemmo a Roma un temporale accompagnato da grandine e pioggia abbondantissima. In un ampio recipiente collocato sul terrazzo della mia abitazione raccolsi una buona quantità di quell'acqua, e dopo averla lasciata in vaso chiuso riposare per alcuni giorni, mi accorsi che sul fondo del vaso si era formato un deposito pulverulento di colore grigio–rossastro. Esaminata questa polvere la trovai quasi totalmente composta di silice, allumina ed ossido di ferro, sostanze tutte che in copia si trovano nelle sabbie e ceneri vulcaniche.

Non avendo conservata l'acqua che mi aveva dato quel deposito, non potei estendere le mie indagini alle sostanze completamente sciolte nel liquido. Affine pertanto di costatare se la natura e quantità della parte solubile fosse pure favorevole all'opinione di una insolita copia di polveri endogene sparse per l'aria, mi provvidi di una certa quantità d'acqua raccolta sulla fine di novembre e principio di decembre in un pluviometro collocato fuori della città in campagna aperta (2). Quest' acqua sottoposta a lenta evaporazione in bagno di sabbia fino a completa siccità, lasciò un residuo solido, che scaldato fino al colore rosso, e così liberato da una piccola quantità di sostanze organiche, si presentò sotto forma di una polvere

(1) V. Opere dell'Ab. Teodoro Monticelli Segretario perpetuo della R. Accad.ª delle Scienze di Napoli V. 2° pag. 227 e seg. Il più antico fatto di una insolita luce crepuscolare di cui sia rimasta memoria, sembra essere quello avvenuto sotto Tiberio Cesare, quando come dice Seneca (Naturalium Quaestionum Lib. 1. cap. 5) *cohortes in auxilium ostiensis coloniae cucurrerunt tamquam conflagrantis: cum coeli ardor fuisset per magnam partem noctis*. Confrontando l'epoca di questa comparsa di luce colle più celebri eruzioni vulcaniche, sembra che lo splendore notturno accennato da Seneca coincida a un dipresso colla eruzione di Santorino avvenuta l'anno 19 dell'êra volgare. Del rimanente, tranne quelli del 1831 non si conoscono con certezza altri fenomeni crepuscolari che per la estensione, durata ed intensità della luce possano paragonarsi agli attuali. Ma piuttosto che alla somma rarità o quasi singolarità del fenomeno, deve ciò attribuirsi alla mancanza di relazioni esatte ed al poco studio di meteorologia che si faceva nei secoli passati.

(2) Questo pluviometro si trova nella villa de' Marchesi Patrizi circa mezzo miglio fuori della porta Pia, dove il benemerito Canonico D. Sanzio Sanzi da parecchi anni ha intrapreso una serie regolare di osservazioni meteorologiche.

cenerognola del peso di gr. 0,78 per ogni litro di acqua; ma che tenuto conto dell'evaporazione avvenuta durante il tempo che rimase nel pluviometro vuole essere alquanto diminuito, non però al disotto di gr. 0,65. Stando ai risultati delle sperienze di M. Barral le sostanze minerali contenute nelle acque di pioggia in media non oltrepassano i gr. 0,025 per ogni litro d'acqua. E M. G. Tissandier trovò che un litro d'acqua ottenuta dalla neve caduta nel centro di Parigi lasciava un residuo solido del peso di soli gr. 0,212 e che di questo residuo appena il 70 per 100 era materia minerale. Trattandosi p oi di neve caduta nella campagna trovò che il residuo minerale non era che la metà di quello avuto dalla neve raccolta in Parigi. Quindi si vede che i gr. 0,65 di materia minerale ottenuti dall'acqua del pluviometro superano di gran lunga il residuo solido che nello stato normale dell'atmosfera si ottiene dalle acque di pioggia, anche nelle grandi città e nei primi periodi della caduta. Tanto più che l'acqua del pluviometro quando fu sottoposta all'evaporazione doveva essere già priva almeno in gran parte delle materie insolubili che probabilmente l'accompagnarono nella caduta. Dico probabilmente l'accompagnarono, perchè nell'acqua circa lo stesso tempo da me raccolto in città il deposito di materie insolubili, come fu detto di sopra, era molto abbondante.

Quanto poi alla natura del residuo minerale avuto dall'acqua del pluviometro, per circa un quinto era esso formato di sali a base di calce, il rimanente consisteva in composti silicei e potassici. Nella soluzione cloridrica di quel residuo il ferro-cianuro di potassio non manifestò la presenza del ferro; forse per la troppo scarsa quantità d'acqua che ebbi a mia disposizione. Comunque sia è certo che la mancanza o scarsezza del ferro non si oppone all'origine endogena di tale residuo; non essendo raro il caso che la parte solubile delle ceneri e sabbie vulcaniche si trovi esente di ferro (1).

Questa grande copia di materie minerali nelle acque piovute durante il fenomeno crepuscolare fu notata anche in altri luoghi da altri osservatori. A Ginevra M. Yung dalla fusione della neve caduta il 5 Decembre ebbe un abbondante deposito formato di minirali silicei, misti a piccoli globuli di ferro. Un somigliante deposito ottenne anche dalla neve raccolta sul Gran San Bernardo a 2490 metri di altezza, come pure dall'acqua che aveva fatto lungamente attraversare da una corrente di aria atmosferica (2). Ma

(1) V. Monticelli Op. cit. V. 2.° pag. 305 e seg.

(2) V. La Nature 29. Déc. 1883 pag. 79. Identico a questo fu il deposito lasciato dalla neve raccolta negli ultimi giorni di Gennaio dal R. P. Caruzzo Priore dell'Ospizio del S. Bernardo.

da questo scienziato la presenza nell'aria di siffatte materie piuttosto che ai contemporanei cataclismi vulcanici venne attribuita ad una immensa nube di polvere cosmica che sarebbe stata incontrata dal nostro pianeta.

Della medesima opinione fu pure il Sig. Williams, il quale dalla neve caduta in Inghilterra avendo ottenuta una polvere ferrugginosa credette vedervi delle tracce di niccolo, metallo che quasi sempre si trova unito al ferro meteorico, e che fu anche scoperto dal Sig. Nordenskioeld nel sedimento lasciato dalla neve caduta nei dintorni di Stocolma sulla fine di Decembre.

L'ipotesi dell'incontro della Terra con una nube cosmica non ha nulla d'inverosimile; ma nel caso presente l'unico fatto su cui si appoggia è l'accennata presenza del niccolo nel ferro tratto dalle polveri esistenti nell'aria durante i fenomeni crepuscolari. Ora è noto che sebbene il niccolo abondi nel ferro meteorico, pure i minerali ferruginosi che si traggono dalle viscere della Terra non ne sono sempre privi del tutto ed in alcuni, come in non poche piriti marziali e nel ferro magnetico, spesso vi si rinviene in dose non piccola. Il Sig. Petersen trovò che il ferro magnetico di Pregraten nel Tirolo contiene 1,76 per 100 di ossido di niccolo. Oltrediche quando diciamo che i recenti fenomeni crepuscolari fossero in gran parte dovuti alle ceneri vulcaniche, non intendiamo affermare che a quelle ceneri non potessero essere mescolate delle particelle di ferro meteorico, le quali sappiamo che molto di frequente si trovano nell'atmosfera. Nel caso però di una stragrande quantità di siffatte particelle sparse per l'aria, sembra che la presenza del niccolo si sarebbe manifestata non in sole due o tre, ma in tutte le numerose analisi delle polveri cadute all'epoca degli splendori crepuscolari. Per ultimo non voglio omettere di notare che l'ipotesi di una nube cosmica incontrata dalla nostra atmosfera non si accorda col fatto che le straordinarie luci crepuscolari non furono precedute ne accompagnate da abbondanti pioggie di stelle cadenti, 'nè da insoliti splendori nelle alte regioni dell'atmosfera. La materia cosmica in stato di estrema divisione trovandosi eminentemente disposta a combinarsi all'ossigeno, nell'incontro di tale materia coll'atmosfera non sarebbe mancato lo sviluppo di calorico luminoso.

Circa lo stesso tempo delle polveri analoghe a quelle cadute nella Svizzera vennero raccolte in Spagna ed in Olanda e sì nelle une che nelle altre vi si riconobbero dei cristallini di augite e di pirossena misti a del ferro magnetico ed a piccoli globuli di materie vetrificate; che sono ap-

punto le sostanze trovate dal Sig. Renard nelle ceneri dell'eruzione di Crakatoa cadute nell'Agosto a Batavia 152 chilometri distante da Crakatoa. Anche il p. Ferrari al suo Osservatorio astronomico sul Gianicolo dall'acqua caduta l'8 Gennaio ottenne un residuo pulverulento ed aspro al tatto in cui la parte minerale fu trovata di gr. 0,67 per ogni litro d'acqua. Il suddetto chm̃o astronomo avendomi affidato l'incarico dell'analisi microscopica di quella polvere, al primo vederla mi parve molto simile all'altra da me ottenuta nel Decembre, tranne che il colore grigio volgeva un poco al giallo anzi che al rosso. Osservatala con una lente vi distinsi dei piccoli puntini neri che tentati colla calamita vennero attratti per modo che li potei facilmente separare dal resto. Ciò che rimase, sottoposto al più forte ingrandimento di un buon microscopio apparve consistere in un miscuglio di laminette, parte di colore giallo bruno e parte di colore giallo chiaro. Le prime avavano una figura prismatica simile a quella della mica fogliacea, le seconde erano amorfe; e tanto le une che le altre resistettero all'azione degli acidi solforico e cloridrico. Quindi si vede che anche il residuo avuto dal p. Ferrari sia che se ne consideri la quantità, sia che se ne considerino le qualità, differisce notabilmente dai residui che lasciano le ordinarie acque di pioggia.

Ho detto le ordinarie acque di pioggia perchè non è rarissimo il caso che le piogge e le nevi portino seco delle quantità notabili di materie organiche ed inorganiche, e tutti conoscono le così dette piogge di solfo, di sangue, di sassi, ecc. ossia di corpi che portati in alto dalla forza del vento vengono poi a cadere a distanze più o meno grandi dal luogo di partenza. Ma queste piogge di materie solide, sia che accadano per via secca o per via umida, sono fenomeni locali di poca durata e le proprietà fisiche e chimiche di quelle materie per lo più ci mettono sulla via di rintracciare le piante e gli animali che le produssero od i terreni d'onde furono esportate. In Roma e negli altri paesi mediterranei la più comune di tali piogge consiste in una polvere di colore rossastro, che l'analisi chimica e la direzione de'venti che ce la portano sembrano indicarne la provenienza dai deserti dell'Affrica. Ma che che sia dell'origine, il fatto è che non fu mai notato la caduta di tali polveri essere contemporaneamente avvenuta in luoghi fra loro molto distanti o nello stesso luogo per un tempo assai lungo.

Al contrario le polveri cadute durante i fenomeni crepuscolari furono raccolte sopra una vastissima estensione di terreno, cioè nell'Italia, nella Svizzera, nella Spagna, nell'Olanda, nell'Inghilterra ed in non pochi di

questi e di altri più lontani paesi, la caduta delle polveri si ripetè più volte a piccoli intervalli di tempo. E sebbene la natura di queste polveri non siasi sempre trovata la stessa, pure fra i risultati delle analisi che se ne sono fatte non ve n'è alcuno che possa dirsi escludere l'origine endogena. Anzi quei frammenti di materie vetrificate che in alcune analisi vi si rinvennero escludono piuttosto l'origine *esogena*, cioè che le suddette polveri provenissero dalla superficie della crosta terrestre, ove il calore non giunge mai al punto di fondere i composti silicei.

Gioverà qui riportare alcuni passi dell'interessante comunicazione fatta il 29 febbraio 1884 da M. A. Renard alla Società Belga di Microscopia *Sur les caractères microscopiques des cendres volcaniques de l'eruption du Crakatoa* (1).

Il ch. autore dopo avere accennato le difficoltà che s'incontrano nel decidere se le polveri precipitate dall'aria sieno di origine vulcanica, soggiunge « Le diagnostic le plus certain de la nature volcanique se retrouve » toujours, peut-on dire, dans la structure qu'affectent les petites par- » ticules vitreuses projetées du volcan sous la forme de cendres. Cette struc- » ture spéciale se voit dans la fracture, et elle laisse son empreinte même » sur le plus minimes fragments, où le microscope ne peut découvrir » d'autres propriétés caractéristiques que celles rapportant à la forme..... » Veut-on constater en Europe si des poussières dérivent de l'éruption » du Crakatoa par exemple, il convient avant tout de rechercher la pre- » sence de particules vitreuses; leurs caractéres diagnostiques sont si tran- » chés que tout micrographe peut aisément déceler ces esquilles de verre. » D'un autre côté, la présence d'hypersthène, d'augite, ou de granules » magnétiques, sans particules vitreuses associées, constatée en Europe, dans » les poussiéres aériennes, ne prouve pas d'une manière bien certaine que » le sédiment appartient aux cendres du Crakatoa: en admettant que la » détermination minéralogique soit exacte, on ne comprend pas pourquoi » ces minéraux lourds auraient été charriés par les courrants, alors que » les esquilles vitreuses seraient absentes. »

Circa quest'ultima osservazione si avverta però che se le particelle vetrose, per il loro minore peso specifico, debbono essere trasportate dalla forza di proiezione e dalle correnti aeree ad altezze e distanze maggiori de'minerali silicei e ferrugginosi; così anche può accadere che questi precipitino a terra, rimanendo quelle tuttavia sospese nell'aria. Onde se du-

(1) V. Bulletin de la Société Belge de Microscopie 10e année N: 6.

rante i fenomeni crepuscolari le particelle vetrose ora sono apparse nelle polveri raccolte ed ora no, assai probabilmente potremo conchiudere che l'origine di quelle polveri fu la stessa, cioè l'eruzioni vulcaniche della Sonda.

Ma ciò che sopra tutto rende probabile l'ipotesi dell'origine endogena di quelle polveri è la coincidenza della comparsa della luce crepuscolare colla propagazione delle materie lanciate in aria dai vulcani della Sonda. Abbiamo infatti che immediatamente dopo l'eruzione di Crakatoa cominciata il 25 agosto, il cielo si coprì di una densa caligine che oscurò l'aria non solo nelle vicine regioni, ma fino a Yokohama ed al Giappone. Allora fu che cominciarono le splendide illuminazioni crepuscolari, che dall'isola della Riunione, ove da prima si osservarono alla fine di agosto, sull'entrare del settembre si estesero alle isole della Trinità, quindi alle Indie, al Ceylan ed a Madras. Nell'ottobre gli insoliti splendori in tutta la loro pompa si mostrarono al Capo di Buona Speranza, nell'Australia e nella più gran parte dell'America del Sud; finchè un mese più tardi cioè nel novembre apparvero anche fra noi e poterono a nostro bell'agio essere contemplati nell'Inghilterra, nella Francia, nella Spagna, nell'Italia e nel resto d'Europa.

Nè deve fare meraviglia la lentezza con cui quelli splendori si propagarono fino a giungere a noi, mentre poi si trovò che le onde generate nell'aria dalla eruzione di Crakatoa del 26 agosto in sole 36 ore compierono l'intero giro della Terra. Questa differenza di velocità deve attribuirsi a ciò che l'impeto delle eruzioni avvenute nello stretto della Sonda fu tale, che le materie più sottili dovettero sollevarsi ad un altezza molto superiore alle regioni delle correnti atmosferiche; per modo che la diffusione di quelle ceneri vuole essere paragonata al lento espandersi del fumo e dei vapori nell'aria sensibilmente tranquilla.

Contuttociò l'opinione che le ceneri vulcaniche sparse per l'aria sieno state il principale agente dei recenti splendori crepuscolari non piacque ad alcuni per la difficoltà che trovarono nel concepire come quelle ceneri potessero rimanere per tanto tempo sospese nell'aria, senza dar segno della loro presenza tranne quando il Sole era non molto discosto dall'orizzonte. Ma si osservi che qualunque sia la natura di un corpo, quando è ridotto a stato di grandissima divisione, come può rimanere sospeso in aria, a quel modo che vi rimane il polviglio atmosferico, così può apparire perfettamente trasparente e non ostante ciò riflettere una parte della luce che riceve. Anche nelle grandi masse sono moltissimi gli esempi di diafaneità sensibilmente perfetta congiunta col potere di riflettere la luce. Basterà

rammentare quelle limpidissime lastre di cristallo che si sogliono collocare nei teatri fra il palco scenico e gli spettatori nelle rappresentazioni degli spettri. Del resto non è del tutto vero che quelle ceneri non abbiano dato segno di loro presenza anche in pieno giorno. Quasi per tutto ove si osservarono i fenomeni crepuscolari, il Sole apparve spesso molto languido, offuscato ed anche privo di raggi a guisa di un disco di argento. Il suo colore normale si vide per più giorni cangiato in verde o in azzurro od in violaceo, e similmente quello della Luna. Perfino a Nizza, dove il cielo suole essere limpidissimo, per tutto il tempo che durarono i fenomeni crepuscolari, l'aria perdette in parte la sua trasparenza ed il Sole si vide cinto da un alone biancastro e lucidissimo. Un somigliante fenomeno fu notato a Parigi da M. Cornu, a Meudon da M. Janssen, ad Auteuil da M. Ch. Moussette ed io stesso l'osservai in Roma per molti giorni consecutivi ed interpolati (1).

Anche le abbondanti piogge in questo anno cadute su molti punti della Terra possono considerarsi come un segno, sebbene alquanto più indiretto, della presenza nell'aria di una grande quantità di sostanze solide. L'efficacia di queste sostanze a determinare la condensazione dei vapori atmosferici è stata di recente dimostrata con prove sperimentali dal Prof. Aitken di Edimburgo; ed è un fatto che le straordinarie eruzioni vulcaniche furono spesso seguite da piogge più copiose e durevoli dell'ordinario. Dopo l'eruzioni del 1831 la pioggia raccolta all'Osservatorio di Parigi nel mese di Novembre superò di circa 30 mill. la media di quel mese. Una somigliante abbondanza di pioggia si trova notata nei registri del medesimo Osservatorio dopo le celebri eruzioni delle Calabrie e dell'Islanda nel 1783, dell'America nel 1853 e del Vesuvio nel 1862 (2).

Quanto poi alla difficoltà di concepire una sì prolungata permanenza nell'aria di materie solide, tutto dipende dal grado di tenuità a cui sieno ridotte quelle materie e della loro capacità di assorbire il calorico, per modo che l'aria in contatto delle singole particelle acquisti densità minore dell'aria circostante. Sicchè tale difficoltà non è diversa da quella che si

(1) Nel Settembre il Sole apparve di un bel colore verde nella Colombia, al Ceylan, all'isola della Riunione, ad Aden, a Panama; ed azzurro all'isola della Trinità, nelle Indie inglesi, a Madras a San Cristobal, ove tutti gli oggetti terrestri apparvero dello stesso colore, non che le nubi che si trovavano attorno al Sole. Nei due mesi seguenti somiglianti colorazioni del Sole e anche della Luna, si ripeterono in molti altri luoghi con tale intensità da potersi distinguere le macchie del Sole ad occhio nudo.

(2) V. La Nature. Juillet 1884.

prova nell'intendere la sospensione nell'aria dei ghiacciuoli e dei globettini di acqua che formano le nubi.

Nè sarebbe questa la prima volta che delle polveri di estrema tenuità sieno rimaste nell'aria per un tempo assai lungo. Nel trattato di Meteorologia di M. Kaemtz (1) si legge che nel 1783 contemporaneamente a delle grandi eruzioni vulcaniche avvenute nelle Calabrie e nell'Islanda, su quasi tutta l'Europa l'aria fu ingombrata da una nebbia secca che durò dal Maggio fino al Luglio. E vero che i fisici non convennero sull' origine e natura di quella nebbia, ma ciò non pregiudica punto al fatto della prolungata sospensione nell'aria di una materia solida capace di assorbire e riflettere la luce. Lo stesso Kaemtz però fa osservare che non solo in questo ma pure in altri anni nei quali si ebbero delle straordinarie nebbie secche, come nel 1721, 1822, 1834 anche i vulcani or qua or là manifestarono una insolita attività.

---

(1) Cours complet de Météorologie de L. F. Kaemtz traduit par Ch. Martins. Paris 1843, pag. 468.

COMUNICAZIONI

Ferrari, P. G. S. – *Sulla luce crepuscolare rossa*:

Il P. G. S. Ferrari fece alcune osservazioni in conferma della sentenza del ch. P. Provenzali su tale argomento, riservandosi di pubblicare in seguito un resoconto speciale intorno a questo fenomeno straordinario.

Lais, P. G. – *Sulla disparità della luce del Sole rosso e della luce crepuscolare*:

Il ch. P. Giuseppe Lais, prendendo atto della interpretazione data dai PP. Provenzali e Ferrari al fenomeno della luce rossa quale effetto risultante da polvere impalpabile esistente nelle alte regioni dell' atmosfera, parlò della disparità delle due luci (luce del Sole rosso e luce crepuscolare) citando l'osservazione pubblicata dal medesimo nei numeri 277 e 279, 2 e 5 Dicembre del giornale *La Voce della Verità*, in cui il Sole innanzi del tramonto, sebbene impallidito, non presentò mai colore rossastro, ma invece una zona circumsolare candidissima. Le osservazioni fatte dal P. Secchi e dal prof. Galli nei fenomeni del genere delle nebbie secche o caligini nulla dicono, che luce rossa di vivezza straordinaria abbia imporporato il cielo prima o dopo il tramonto del sole.

L'osservazione spettroscopica sul sole rosso del 7 Giugno 1869 mostrò, come rilevasi dal P. Secchi (Bullettino meteorologico di quel mese), che « esaminando il sole collo spettroscopio si vedeva, che nelle successive » tinte che esso assumeva si formavano nello spettro delle zone oscure » sempre più estese, in modo che finalmente non ci restavano che pochi » fasci di luce rossa e gialla, tutto il resto essendo assorbito ». All'opposto la luce rossa crepuscolare dei giorni decorsi ricevuta nel prisma non subiva notevole assorbimento: una nebulosità si stendeva sulla *C*, ed un'altra più larga poco oltre la *D*, che forse era la δ del Brewster. Così è spiegata la vivezza, che nel giorno 1 Dicembre raggiunse il grado di rischiarare i muri e proiettarvi le ombre dei corpi.

Tutto ciò trova nei ghiacciuoli dell'aria (se vogliasi anche commisti a delle polveri) sufficiente ragione per riflettere una assai grande parte dei raggi rossi della luce crepuscolare, e se la vivezza della luce comporti una seconda riflessione, prolungare anche al di là del tempo assegnato il crepuscolo.

Il P. Denza nota che il fenomeno si è presentato in un anticiclone preceduto da ciclone, ossia quando il vapore d'acqua apportato dal secondo in gran copia veniva improvvisamente condensato e agghiacciato dal primo. Si dirà che pochi veli o cirri non presentano ordinariamente il fenomeno; però non siamo in grado di giudicare ciò che possa un'atmosfera invasa da un banco di parecchi chilometri di altezza di tali cristallini. Sotto qualunque ipotesi sempre ai vapori doversi la rossa colorazione del cielo.

Aggiunse finalmente che i bagliori crepuscolari, di cui siamo testimoni da parecchio tempo, hanno un riscontro coi paesi nordici, e noi vediamo spesso carichi di forti colori rossastri i quadri fiamminghi che ci rappresentano orizzonti; il che confermerebbe l'ipotesi dei ghiacciuoli.

De Rossi, Prof. M. S. – *Sulla luce crepuscolare rossa*:

Il Prof. M. S. de Rossi interloquì per far notare come l'opinione di una influenza di polveri vulcaniche nel fenomeno della luce crepuscolare abbia per fautori anche alcuni specialisti e trovi appoggio in parecchie osservazioni che si trovano registrate nelle descrizioni dei periodi sismici. Il ch. P. Bertelli in una lettera del 2 Dicembre testè pubblicata nei giornali di Firenze dice « non essere improbabile che il pulviscolo atmosferico ordi- » nario o straordinario (specialmente in questo periodo sismico nel quale » ci troviamo) abbia pure la sua parte in cotesto fenomeno, ma per ef- » fetto di diffrazione, come succede della fiamma che rosseggia quando » sia riguardata attraverso ad una colonna di fumo » Il de Rossi aggiunse esser convinto dall'insieme dei fatti da lui raccolti che nei periodi sismici ed eruttivi alquanto straordinari grande quantità di vapor d'acqua e di polveri finissime vengono direttamente dal suolo immesse nell'atmosfera. Oltre a ciò le descrizioni fatte in tempi e luoghi diversi di periodi di scuotimento del suolo additano con somma frequenza la comparsa e la permanenza talvolta di nubi che nelle tarde ore del giorno prendono colore rosso vivace. Citò in modo più particolare la descrizione fatta dal Bassanelli del terremoto di Albano nel 1829. Nel qual tempo per lo spazio di circa tre mesi ebbesi la frequenza delle nuvole descritte. Il fenomeno crepuscolare simile all'odierno, che molti ricordano essere avvenuto nel 1831, corispose anche allora almeno per l'Italia, con un periodo sismico assai notevole. Per tutto ciò il de Rossi concluse meritare una considerazione speciale lo studio delle polveri atmosferiche per vedere se veramente e fino a qual grado esse intervengano nell'odierno straordinario fenomeno della luce crepuscolare.

Interloquirono brevemente a quest'importante discussione sulla luce crepuscolare i ch. prof. G. Tuccimei e cav. A. Statuti; alquanto più lungamente poi espose alcune speciali sue osservazioni il ch. P. G. Egidi.

Castracane, Conte Ab. F. – *Profondità cui giunge la vita delle Diatomee nel mare*:

Questa nota presentata nella odierna sessione è stata inserita nel fascicolo contenente la sessione VII^a^ dell'anno XXXVI, pag. 195, onde sollecitarne la pubblicazione.

De Rossi, Prof, M. S. – *Insolita sonorità dell'atmosfera*:

Il Prof. M. S. De Rossi richiamò l'attenzione dell'Accademia sopra un fenomeno da lui osservato nelle ore pomeridiane del 15 Dicembre e che

egli crede dover essere per lo meno registrato. Il fenomeno consistette in una insolita sonorità dell'Atmosfera, che egli potè osservare stando in un luogo alto della città (Osservatorio Geodinamico alla Vittoria sul Viminale). L'osservazione ebbe principio sentendosi con straordinaria precisione il concerto militare che suonava nel piazzale del Pincio. Ciò non avrebbe fatto meraviglia, potendo essere l'onda sonora favorita dalla direzione del vento. Ma l'esistenza d'un fenomeno d'altro genere venne rilevata dal sentirsi contemporaneamente con grande intensità tutti i suoni provenienti dalle più opposte direzioni. Impressionato di ciò il riferente, pensò di salire sulla terrazza dell'edificio, dove esistendo anche l'anemometro, potè constatare la perfetta tranquillità dell'aria congiunta all'intensa rigidezza, essendo il cielo quasi completamente velato. Ivi i suoni tutti della città provenienti da grandi distanze e specialmente le campane, i fischi delle ferrovie e dei tramways, lo scoppiettio delle fruste, il rumore dei carri e le voci stesse udivansi distintamente accompagnate da un frastuono cupo di rumori confusi. È superfluo avvertire che ciò non si era mai prima notato in quel luogo. L'effetto acustico era assolutamente simile a quello che si produce sulle montagne scoscese sovrastanti ad una bassa pianura.

De Rossi, Prof. M. S. – *Presentazione di un suo opuscolo e di due lettere dell'Ing. Adolfo Klitsche de la Grange sopra recenti eruzioni nei Vulcanetti di fango presso Civitavecchia*:

Il Prof. De Rossi presentò all'Accademia l'articolo testè pubblicato nel periodico « La Rassegna Italiana » col titolo: *Studi sul terremoto di Casamicciola del 28 Luglio* 1883. – Riferendo sommariamente il contenuto di quell'articolo, fece notare come esso rappresentasse uno studio preliminare e che precede la pubblicazione del resoconto completo di tutte le osservazioni dal riferente raccolte sul luogo del disastro. Concluse doversi tributare una parola di elogio verso il Rmo Monsignor Vescovo d'Ischia ed il suo Segretario Monsignor Dimartino, i quali oltre all'aver prodigato ogni cura agli infelici superstiti e presa parte attivissima al salvataggio, aveano per i primi iniziato l'impianto di osservazioni scientifiche fondando a ciò un primo nucleo di Osservatorio Geodinamico nella stessa residenza episcopale della città d'Ischia.

Dopo tutto ciò il riferente richiamò l'attenzione degli adunati sugli indizi vari dai quali si desume con certezza che il fenomeno sismico tanto localizzato in Ischia fu però accompagnato da moltissimi fenomeni in tutta la penisola, che rimasero non osservati o non accertati scientificamente; e ciò dimostra quanto importanti sieno gli sforzi che si vengono facendo per organizzare osservazioni da per tutto e corrispondenza attiva per concentrare le medesime in un comune centro. Il riferente aggiunse su ciò che oltre le notizie abbastanza bene certificate e specificate per ciò che riguarda le date, ne possiede molte altre non del pari esatte, ma che dal complesso è

chiaro appartenere al medesimo gruppo di fatti. Citò alcune variazioni nelle Fontane ardenti dell'Appennino, alcuni moti sismici non bene determinati ed alcune alterazioni nelle acque di vari punti d'Italia che quasi certamente coincisero coi fatti tristissimi di Casamicciola. Tutti questi dati però non essendo bene certificati non hanno potuto contribuire alle investigazioni scientifiche fatte su quel tremendo fenomeno. Fra tali notizie incerte il riferente disse di possederne una che appena si può dir tale per la precisione della data, ma di tanta importanza per il diligente esame fattone dal suo autore, che gli pare doveroso renderla di pubblica ragione. Il fatto si riferisce a recenti ed ignote eruzioni in vulcanetti di fango presso Civitavecchia e che sono descritte nelle due seguenti lettere dell'Ing. Klitsche de la Grange:

Illmo Sig. Professore

Credo sia cosa nota alla S. V. Illma, l'esistenza presso Civitavecchia di alcuni vulcanetti di fango, da me rinvenuti in contrada detta Torre di Orlando e descritti in una breve mia monografia: « *Sulla formazione di » alcuni vulcanetti di fango nei dintorni di Civitavecchia – Roma Tip. » Artero* 1880. »

Ritenendo ora per sicuro, come da Lei fu egregiamente addimostrato, che il terremoto dell'Isola d'Ischia altro non fosse se non che la conseguenza di una grande commozione tellurica estesa anche in altre regioni, saper volli se in concomitianza a tale avvenimento, alcunchè di rimarchevole si fosse pure avverato nell'ordine de'fenomeni di vulcanicità secondaria, che danno luogo alla formazione di cotesti vulcanetti.

Recatomi sul posto, dopo quasi cinque anni da che io più visitato non aveva una tale località, vi rinvenni il piccolo cono di deiezione già da me descritto nella sopraccennata monografia, ampliato sino a raggiungere l'altezza di circa dieci metri. Più verso Sud alla distanza di venticinque metri all'incirca sorge ora un nuovo cono, alto presso a poco otto metri; e questo forse, a giudicare dai cespugli che ne rivestono i fianchi, era già in via di formazione l'ultima volta che io visitai cotal sito; ma la folta boscaglia onde è tuttora circuito me ne impedì probabilmente la vista.

Rimarchevoli sono poi due piccoli coni, specie di crateri ausiliari, surti sui fianchi del più antico rilievo esistente già nel 1878; i quali fanno assumere a questo, sebbene su minima scala, tutto l'aspetto di una vera prominenza vulcanica. Di cotesti coni, a giudicare ancor qui dalle pianticelle crescentivi al disopra, l'uno potrà datare da circa tre anni; l'altro dalla cui sommità sgorgava ancora un'acqua satura di bicarbonato calcare, traverso la quale si sprigionavano frequenti bolle di gas solfidrico, sorto lo si direbbe da poche settimane appena.

Ed invero, molle e pastosa erane tuttora la massa che rinvenni constare di sottilissime incrostazioni di carbonato di calce con qualche interposizione di solfo libero. Rimovendo poi con il mio martello siffatte incrostazioni, vi rinvenni incluse – prova non dubbia di formazione recentissima – di molte foglie di lentisco ancor verdi.

Evidentemente cotesta rapidissima formazione accenna ad una abbondante emissione locale di prodotti endogeni, tra quali copiosissimi l'idrogene solforato e il gas acido carbonico. Dal quale gas sature e compresse le acque della circolazione sotterranea, s'inalzano alla superficie disciogliendo la calce dalle roccie attraversate e traboccando danno luogo, per successive incrostazioni, alla formazione dei coni suddetti. Molto verosimilmente pertanto di simili emissioni potrebbero connettersi alle grandi commozioni vulcaniche delle nostre regioni, e la formazione del piccolo cono da me osservato corrispondere al periodo sismico manifestato dal disastroso terremoto di Casamicciola. Ma comunque sia il vero, la regione dei vulcanetti di fango presso Civitavecchia è cotal punto di osservazioni di non lieve interesse per i fenomeni di meteorologia endogena che quivi si svolgono, e che perciò mi prendo la libertà di segnalare alla S. V. Illma.

E poichè sono a parlare di fenomeni che tanto da presso riguardano la bella scienza da Lei promossa aggiungerò inoltre che verso la fine del testè decorso mese di agosto, epoca corrispondente alle ultime scosse di Casamicciola ebbi a rimarcare una straordinaria e sensibilissima salsedine nell'acque di alcuni pozzi che rinvengonsi poco discosti dal lido, seguendo la spiaggia tra Civitavecchia e la Torre di Orlando. Fenomeno questo ben facile a spiegarsi e precursore forse di movimenti sismici; imperocchè le stesse cause che per dilatazione di meati sotterranei, o per compressione sugli strati acquiferi, possono meccanicamente dar luogo ad una variazione di livello nelle acque di certi pozzi, potranno qui produrre una infiltrazione di acque marine.

Di questa mia lettera, Illmo Sig. Professore, Ella terrà poi quel conto che crede.

Ed in questa occasione ho l'onore di dichiararmi coi sensi della più distinta stima

Della S. V. Illma

Allumiere 8 Settembre 1883.

Dmo ed obligmo
Adolfo Klitsche de la Grange.

Il riferente Prof. de Rossi indicò come per meglio appurare la verità dei fatti proponesse alcuni dubbi e quesiti per ulteriori verifiche al diligente e sagace osservatore Ing. Klitsche de la Grange, dal quale ebbe la seguente risposta:

Allumiere 14 Dec. 1883.

Chiarissimo Sig. Professore

La contrada ove trovansi i vulcanetti di fango presso Civitavecchia, è luogo del tutto deserto e disabitato, anche a motivo dell'aria malsana. Quivi solo praticano guardaboschi e pastori; ma costoro già da me più volte interrogati, solo mi dissero dello scoppio talvolta avvenuto di cotesti vulcanetti: di altri fenomeni meno tumultuosi nulla seppero dirmi.

Certo, come Ella dice, manca la certezza assoluta di una emissione fangosa, qui presso Civitavecchia, contemporanea al periodo sismico di Casamicciola. Purtuttavia è un fatto che, verso la fine dell'Agosto ultimo passato, sui fianchi della piccola prominenza eruttiva, costituita già sin dal 1878, erasi formato un nuovo cono la cui massa tuttora molle e pastosa intercludeva di molte foglie di lentisco ancor verdi, da me rinvenute alla profondità di circa 12 centimetri.

Di ritorno poi sul posto verso la metà di novembre prossimo passato, più non vi rinvenni indizio di emissione alcuna: il piccolo cratere erasi ostruito, e perfettamente rassodato il nuovo cono. Rottane con il mio martello la crosta superficiale, vidi scaturire al disotto un'acqua piuttosto limpida, alquanto satura peraltro di gas solfidrico.

Attinta una bottiglia di quest'acqua, volli sapere se contenesse calce, e con lo ossalato di ammoniaca ne ottenni in fatti un sufficiente precipitato. Ciò nullameno la quantità di calce che detta acqua contiene nelle *condizioni normali*, non sarebbe tale da dar luogo a formazioni tanto rapide, come quella dell'ultimo cono. Ritengo pertanto – la qual cosa avvenir potrebbe anche di altre scaturigini incrostanti – che di simili formazioni potranno compiersi soltanto in *circostanze telluriche anormali*, stante uno straordinario concorso di gas carbonico in soluzione nell'acqua che, a sua volta, discioglie elementi calcari dalle roccie attraversate; onde non fanghi, strettamente parlando, ma si generano di veri travertini. Nulla quindi di più probabile, anche rapporto a coincidenza di date, di una concomitanza tra siffatti emissioni e i disastrosi fenomeni di Casamicciola.

Non trascurerò del resto – se possibile – attingere informazioni dai campagnuoli, come Ella desidera; ma prevedo che secondo il solito, nulla costoro sapranno dire. Intanto faccia pur l'uso che crede della presente e de' nuovi ragguagli che le sommetto.

E pregandola voler accogliere i più sinceri ossequi ho l'onore di rassegnarmi

Devm̃o ed obligm̃o Servo
Ad. Klitsche de la Grange

Boncompagni, B. B. – *Presentazioni di memorie manoscritte e di pubblicazioni*:

Il ch. sig. Principe D. B. Boncompagni presenta 1° da parte dell'autore socio corrispondente P. Teofilo Pepin l'originale manoscritto di un suo lavoro intitolato: *Théorie de la décomposition des nombres en une somme de cinq carrés*; 2° da parte dell'autore socio corrispondente prof. Eugenio Carlo Catalan l'originale manoscritto d'un suo lavoro intitolato: *Mémoire sur quelques décompositions en carrés*. Questi importanti lavori sono pubblicati nel presente fascicolo.

Il medesimo presenta anche all'Accademia 1° da parte dei Sigg. Dott. C. Le Paige e Dott. E. de Candèze un esemplare del volume intitolato: *Mémoires de la Société royale des sciences de Liége, Deuxième série, tome X*, – 2° da parte dell'autore sig. Prof. Aristide Marre un esemplare delle due seguenti tirature a parte 1° Recensione del volume intitolato: *Jornal de sciencias mathematicas et astronomicas, publicado pelo Dott. F. Gomes Teixeira*, vol. IV, – 2° *Coup d'oeil sur le district montagneux de l'Arakan et sur le tribus sauvages qui l'habitent, suivi d'un vocabulaire comparatif des langues des Tchîns, des Tchandôos et des Kramîs, d'après le Major Gwynne Huges etc.*

Il medesimo presenta anche all'Accademia un esemplare di ciascuno dei fascicoli luglio-dicembre 1882, gennaio 1883 della raccolta intitolata: *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche ec.*

Castracane, Conte Ab. F. – *Presentazione di pubblicazioni*:

Il Presidente signor conte Ab. F. Castracane presentò da parte degli autori le seguenti pubblicazioni: 1° *Analyse micrographique des eaux par E. Certes*: 2° Memorie della Società Crittogamologica italiana vole I, *Phycologia Mediterranea* di Francesco Ardissone: Parte prima, *Florideе*.

De Rossi, Prof. M. S. – *Presentazione di pubblicazioni*:

Il Segretario presentò da parte degli autori le seguenti pubblicazioni: 1° *Actes passés à Famagouste de* 1299 *à* 1301 *par devant le notaire Genois Lamberto de Sambuceto, publiées par le chevalier* Carlo De Simoni: 2° *Quatre titres des propriétés de Genois à Acre et à Tyr* (Cornelio De Simoni). 3° *Istruzioni per le osservazioni della luce zodiacale in Italia, del P.* Alessandro Serpieri. 4° *Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau et les machines hydrauliques à colonnes liquides oscillantes. Première partie, et seconde partie: par le M.r* Anatole de Caligny.

Presentò anche da parte del Sig. E. de Jonquières le seguenti note: 1° *Note sur un point de la théorie des fractions continues périodiques* 2° *sur la compositions des périodes des fractions continues périodiques*:

3.° *Addition aux communications précédentes sur les fractions continues périodiques*: 4.°–6.° *Loi des périodes*: 7.° *Sur les fractions continues périodiques dont les numérateurs diffèrent de l'unité*: 8.° *Étude des identités qui se présentent entre les réduites appartenant, respectivement, aux deux modes de fractions continues périodiques*: 9.° *Lois des coïncidences entre les réduites des fractions périodiques de deux modes*: 10° *Lois des identités entre les réduites de fractions périodiques des deux modes*: 11° *Lois des identités entre les réduites des deux modes*: 12° *Lois des identités entre les réduites des deux modes.*

COMUNICAZIONI DEL PRESIDENTE E DEL SEGRETARIO

1. Il Presidente diè il doloroso annunzio della morte del socio corrispondente barone di Wullerstorf.

2. Il Segretario annunziò parimente la morte dei soci onorari D. S. Vespasiani e Can. D. E. Fabiani, e dei soci corrispondenti Conte G. B. Ercolani, e D. Serafino Balestra.

COMITATO SEGRETO

Dopo le letture l'Accademia si riunì in Comitato Segreto. Vennero proposti a soci corrispondenti i signori Prof. de Jonquières, Prof. Marcellino Venturoli, P. Raffaele Piccinini, e a socio onorario il Comm. Giulio Sterbini. Fatta la votazione vennero tutti eletti a pieni voti.

Venne approvato il cambio dei nostri Atti colle pubblicazioni dell'Accademia Stanislas di Nancy, e l'invio della serie dei medesimi dall'anno XXIV in poi alla Biblioteca Nazionale Vittorio Emanuele di Roma.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI: Conte Ab F. Castracane, Presidente. – Mons. F. Regnani. – Comm. C. Descemet. – P. F. S. Provenzali – P. G. Foglini. – Dott. M. Lanzi – Prof. A. Statuti – Prof. G. Tuccimei. – Dott. D. Colapietro. – P. G. Lais – P. G. S. Ferrari. – Prof. F. Ladelci. – Principe D. B. Boncompagni. – Prof. M. S. De Rossi, Segretario.

CORRISPONDENTI: P. G. Egidi – A. de Andreis.

AGGIUNTI: D. F. Bonetti. – Marchese L. Fonti.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* — *Aus dem Jahre* 1882. Berlin, 1883. In-8°
2. ARNAUD (A.) — *Due parole ai benemeriti signori maestri elementari della provincia di Cuneo in occasione dell'apertura delle conferenze pedagogico-agrarie.* Cuneo, 1883. In-8.°
3. *Atti del Collegio degli ingegneri ed architetti in Roma.* — Anno VII, fasc. unico: Anno VII fasc. 1 e 2. Roma, 1883. In-8.°

4. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — Anno CCLXXX 1882—83. — Serie Terza — Transunti — Vol. VII. — fasc. 13—15. — Roma, 1883. In-4°
5. *Atti della Accademia Olimpica di Vicenza,* 1° e 2° semestre 1881. Vol. XVI. Vicenza, 1880. In-8°
6. *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.* — Vol. XVIII, — disp. 5—7. — Torino, 1883. In-8°.
7. *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti.* — Tomo I — Serie VI^a — Dispensa 7—9. — Venezia, 1882—83. In 8°.
8. BACHMETIEFF (B. E.) — *Meteorologische Beobachtungen ausgeführt am Meteorologischen Observatorium der Landwirtschaftlichen Academie zu Moskau.* Moskau, 1883. In-4°
9. *Boletin de la Academia nacional de ciencias en Córdoba.* — T. V. — Entrega 3ª. — Buenos Aires, 1883. In-8°
10. *Bollettino dell'Osservatorio della Regia Università di Torino.* Anno XVII. (1882). — Torino, 1883. In-4°
11. *Bullettino della R. Accademia Medica di Roma.* — An. IX°, n. 4 e 5. — Roma, 1883. In-8°
12. *Bullettino del Vulcanismo italiano.* — A. X, fasc. 3—5. — Roma, 1883. In-8.°
13. *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni, ecc.,* — Tomo XV. — Luglio—Dicembre 1882: to: XVI, Gennaio 1883. — Roma, 1882. In-4°
14. *Bulletin Astronomique et météorologique de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro* — Avril-Septembre 1883, N° 4—9.. — Rio de Janeiro, 1883. In 4.°
15. *Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou.* Année 1882, n. 2, livrais. 1, 2. N. 3. — Moscou, 1882. In-8.°
16. CATALAN (E). — *Recherches sur la constante* G, *et sur les intégrales Eulériennes.* — St. Pétersbourg, 1883. In-4°
17. CERTES (A.) — *Analyse micrographique des eaux.* Paris, 1883. In-8°
18. DE CALIGNY (A.) — *Recherches théoriques et expérimentales sur les Oscillations de l'eau et les machines hydrauliques à colonnes liquides oscillantes* 1ère et 2e partie. Paris, 1883. In-8°
19. DE JONQUIÈRES (E). — *Note sur un point de la théorie des fractions continues périodiques.*
20. —— *Sur la composition des périodes des fractions continues périodiques.*
21. —— *Additions aux Communications précédentes sur les fractions continues périodiques.*
22. —— *Loi des périodes.*
23. —— *Loi des périodes.*
24. —— *Loi des périodes.*
25. —— *Sur les fractions continues périodiques dont les numérateurs diffèrent de l'unité.*
26. —— *Etudes des identités qui se présentent entre les réduites appartenant, respectivement, aux deux modes de fractions continues périodiques.*
27. —— *Lois des coïncidences entre les réduites des fractions périodiques de deux modes.*
28. —— *Lois des identités entre les réduites des fractions périodiques des deux modes.*
29. —— *Lois des identités entre les réduites des deux modes.*
30. —— *Lois des identités entre les réduites des deux modes.*
31. DE SIMONI (C.) — *Quatre titres des propriétés des Génois à Acre et à Tyr.*
32. —— *Actes passés à Famagouste de 1299 à 1301 par devant le notaire Génois « Lamberto de Sambuceto.* — Gênes, 1883. In-8°
33. DORNA (A.) — *Sulla rifrazione.* — Torino, 1882. In-4°
34. HILDEBRANDSONN (H.) — *Samling af bemärkelsedagar, techen, märken, ordsprak och skrock rörande väderleken.*
35. *Iahrbuch über die Fortschrifte der Mathematik, etc.* Iahrgang 1881. Heft 1. Berlin, 1883. In-8°.
36. *Iahreshefte des vereins für Vaterländische Naturkunde in Vürttemberg. Neununddreissigster Iahrgang.* Stuttgart, 1883. In-8°

37. *Journal de la société physico-chimique russe à l'Université de St. Pétersbourg* — Tome XV, n° 6 e 7. — St. Pétersbourg, 1883. In-8.°
38. *La Civiltà Cattolica.* — Anno Trigesimo quarto — Serie XII, vol. III, quaderno 793—798. Vol. IV, quad. 799—804. Firenze, 1883. In-8°
39. *La Palestra Aternina.* Vol. I. Anno I. Giugno 1883, fasc. 6° — Aquila, 1883, In-8°
40. MARRE (A.) — *Journal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira.* — Vol. IV. Coimbra 1882—83. Rivista. — Paris, 1883.
41. —— *Coup d'oeil sur le district montagneux de l'Arakan, etc.* — Louvain, 1883. In-8.°
42. *Memorie della Società Crittogamologica Italiana.* — Vol. 1° — Varese, 1883. In-8°
43. *Osservazioni meteoriche fatte all'osservatorio della R. Università di Genova.* — Ottobre, —Dicembre, 1882: Gennaio—Marzo 1883. In-f.°
44. *Polybiblion — Revue bibliographique universelle — Partie littéraire* — IIme Série — Tome XVIIIe. — XXXVIIIe de la collection. — 1, 2, 3, 5 livraisons, — Paris, 1883. In-8.°
45. —— *Partie technique.* — IIe Série. — Tome XIXe. XXXIXe de la collection. — 7, 8, 9, 11 livraison. — Paris, 1883. In-8°
46. *R. Comitato Geologico d'Italia* — 1883 — Bollettino, N. 5, 6, 7 e 8 — Roma, 1883. In-8.°
47. *Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche* (sezione della Società reale di Napoli) Anno XXII, fasc. 6—9. — Napoli, 1883. In-4°
48. ROBINSKI (S.) — *Zur Kenntniss der Augenliuse und deren Untersuchungs-methoden.* — Berlin, 1883, In-8°
49. SERPIERI (P. A.) — *Sul terremoto dell'isola d'Ischia del 28 Luglio* 1883. Rimini, 1883. In-8° piccolo.
50. —— *Istruzioni per le osservazioni della luce zodiacale in Italia.* Torino, 1883. In-8° picc.
51. *Sitzungsberichte der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. I—XXXVII,* Berlin, 1883. In-8.°
52. SMITH (F.) — STONE (O.) — *Observations of the Transit of Venus made December* 6, 1882, *at the University of Virginia.* — Virginia, 1883. In-8°
53. STONE (O.) — *Micrometrical measurements of* 455 *Double Stars.* — Cincinnati, 1882. In-8°
54. *The scientific Proceedings of the Royal Dublin Society.* — Vol. III, August 1882. Part. V. Dublin, 1882. In-8°.
55. *The scientific Transactions of the* Royal *Dublin Society.* — Vol. I (Series II) January, February, April, August, November 1882. Dublin, 1882. In-4.°
56. VALANSESE (D.) — *Nella terza secolare ricorrenza della riforma del Calendario.* — Reggio Emilia, 1883. In-8°
57. *Verhandlungen und Mittheilungen des Siebenburgischen Vereins für Naturwissenschaften in Hermannstadt XXXIII. Iahrgang.* Hermannstadt, 1883. In-8°
58. ZANON (G.) — *Esito del concorso al premio della Fondazione Querini Stampalia per l'anno* 1883. — Venezia, 1883. In-8.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE IIª DEL 20 GENNAIO 1884

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

DI ALCUNE RECENTI ESPERIENZE SULL'ACQUA ANTILITIACA DI ANTICOLI (CAMPAGNA) DENOMINATA DI *FIUGGI*

NOTA

DEL PROF. AUGUSTO STATUTI

Il progressivo aumento che si verifica annualmente nell'esportazione dell'acqua di *Fiuggi* non meno che il concorso ognor più frequente dei forestieri che nella stagione propizia accorrono in Anticoli per giovarsi sul posto della medesima e sopratutto i favorevoli risultati ottenuti coll'uso della detta acqua segnatamente nelle malattie delle vie orinarie, formano ormai, se mal non mi appongo, una prova incontestabile che le proprietà fisiologiche e terapeutiche di quelle sorgenti hanno tale un'efficacia in alcune specifiche affezioni morbose da assicurare ad Anticoli in un non lontano avvenire uno dei primi gradi fra le Stazioni idroterapiche italiane.

Non si può certamente disconoscere che al buon esito delle molte cure che si operano sopra luogo col semplice trattamento di quelle acque, debbano pure in qualche modo influire, e forse anche energicamente contribuire, le felici condizioni climateriche di quella regione eminentemente sana ed igienica e per conseguenza capace di dare vivo impulso alle grandi funzioni dell'organismo, ciononpertanto non è egli men vero, per comune assenso dei dotti, che i benefici effetti che ritraggonsi da quelle

cure, siano in massima parte dovuti agli elementi costitutivi delle acque stesse. Mentre però gli esercenti l'arte salutare sono pienamente concordi nell'ascrivere alle dette acque una vera ed efficace utilità curativa nelle malattie suaccennate, non tutti s'accordano in fatto sul modo di operare delle medesime, ritenendosi dai più che queste acque, *non dispiegando alcuna virtù dinamica sulla condizione patogenetica o chimica e dissolvente sui calcoli*, agiscano in via meramente *risolvente ed espulsiva*.

Sopra questo apprezzamento, all'appoggio di varie osservazioni ch'ebbi l'agio di eseguire parecchi anni indietro, mi permisi di esporre alcuni rilievi in una mia antecedente Memoria pubblicata nel 1878 (1), e fu in seguito a questo primo studio, che concepii allora il disegno di praticare delle apposite esperienze partitamente sulle diverse polle che formano il capo d'acqua denominato di *Fiuggi*, per esplorarne le rispettive facoltà dissolventi.

D'appresso i soddisfacenti risultati di queste esperienze, che resi di pubblica ragione nel 1883 (2), surse in me vivo e spontaneo il desiderio di sottoporre altresì all'azione diretta delle dette acque dei veri calcoli, per verificare se ed in qual misura fossero elleno in grado di spiegare anche su questi la loro azione corrosiva, ampiamente già in precedenza constatata tanto sulle calcari in natura, quanto sui metalli. Mercè la gentile annuenza dell'Autorità municipale di Anticoli proprietaria delle ripetute sorgenti e giovandomi dell'utile ed intelligente cooperazione dei sigg. dottori Morfino e Lang, l'uno professore sanitario del Comune e l'altro distinto esercente in Roma, non mi fu difficile di porre ad atto il suindicato mio progetto. Ed infatti predisposto quanto occorreva per assicurarsi della stabilità degli apparecchi ai quali vennero raccomandati i materiali da sottoporsi ad esperimento, il giorno 1° agosto 1882, unitamente ad alcuni ciottoli di pietra calcare del luogo, ed a parecchie laminette di zinco e rame furono immersi sotto un battente di due centimetri circa, nella 1ª, 2ª e 3ª polla che sgorgano nel bottino di presa, quattro calcoli di un discreto volume, racchiusi ciascuno in apposite gabbiette tessute in filo d'argento dei quali due di ossalato e due di urato di calce. Tanto dei suddetti calcoli quanto degli altri materiali fu premessa un'esatta, anzi scrupolosa determinazione dei rispettivi pesi, su di che venne redatto apposito processo verbale debitamente firmato dai Professori sullodati. Trascorso all'incirca un anno e precisa-

(1) Sulla sorgente dell'*Acqua Antilitiaca* di Anticoli (Campagna) denominata di *Fiuggi*. (Atti dell'Accademia Pontificia dei nuovi Lincei. Anno XXXI, sess. IVª del 14 aprile 1878).

(2) Nuove osservazioni sulle sorgenti dell'*Acqua antilitiaca di Fiuggi* pubblicate nel Periodico *Gli Studi in Italia*. Anno VI, vol. I, fasc. V, 1883.

Veggasi anche il giornale di Milano *L'Italia termale*. Anno II, n. 40 del 30 decembre 1883.

mente il giorno 7 agosto 1883, dopo aver verificato che gli apparati d'immersione durante questo lasso di tempo non aveano subìto alterazione o spostamento alcuno, si procedette all'estrazione di tutti i precitati materiali, i quali sottoposti ad una nuova pesa, confermarono nel modo più assoluto ed ineccezionabile che la nostra acqua di *Fiuggi* possiede realmente in genere una virtù intrinseca dissolvente, ed in ispecie che questa virtù si esercita eziandio sopra le vere pietre calcolose.

Unisco qui appresso la distinta delle cifre che rappresentano in ragguaglio la perdita per $_0|^0$ di peso verificata, affinchè chiunque possa formarsi un' idea chiara e precisa sul grado d'intensità corrosiva spiegata dalle singole sorgenti di *Fiuggi* sopra i detti calcoli.

Num. d'ordine	QUALITÀ DEI CALCOLI	1ª VENA	2ª VENA	3ª VENA	MEDIE numeriche
1	Ossalato	71,15	»	»	69.66
2	Idem	»	68.18	»	
3	Urato	»	41.11	»	56.85
4	Idem	»	»	72.60	

A maggiore intelligenza poi delle risultanze ottenute in complesso sopra i diversi materiali sottoposti ad esperimento nel 1882-1883 a raffronto con quelle già dedotte dalle antecedenti esperienze del 1880-1881 e 1881-1882, potrà consultarsi il seguente prospetto nel quale ho riportato le medie delle perdite di peso subite dai diversi materiali mantenuti costantemente immersi nelle dette acque per un anno.

Num. d'ordine	QUALITÀ DEI MATERIALI	MEDIE DEGLI ANNI			
		1880-1881 e 1881-1882		1882-1883	
1	Calce carbonata (in natura) .	44	83	71	02
2	Calcoli di ossalato di calce . .	»	»	69	66
3	Calcoli di urato di calce . .	»	»	56	85
4	Zinco	23	32	24	16
5	Rame	1	49	1	84

Dall'esame del presente quadro si desume:

1.° Che la facoltà dissolvente di cui è dotata l'acqua di *Fiuggi* si esercita più attivamente sul carbonato di calce in preferenza che sui metalli, e ciò in piena conferma di quanto venne già enunciato in base ai rilievi fatti negli anni 1881 e 1882; (1)

2.° Che i calcoli di ossalato ed urato di calce esposti all'azione diretta delle dette acque, tuttochè alla loro temperatura naturale di soli 13° centig: circa sono anch'essi ineccezzionabilmente attaccati, sebbene in una misura alquanto inferiore alla calce carbonata;

3.° Che gli ossalati vengono disciolti nelle ridette sorgenti, ed in ispecie dalla 2ª, con maggior facilità degli urati.

Non sarà poi senza interesse di conoscere lo stato in cui furono rinvenuti i detti calcoli dopo l'immersione. È noto che le concrezioni calcolose si formano ed acquistano volume per la successiva sovraposizione di tanti piccoli strati perfettamente concentrici di urato, fosfato od ossalato i quali si depositano attorno ad un nucleo centrale unendosi saldamente gli uni sopra gli altri a mezzo di un *mucus* speciale: or bene in atto dell'estrazione dei quattro calcoli che vennero sottoposti ad esperimento fu notato che l'acqua non solamente avea disgregati e disgiunti i diversi straterelli fra loro, ma ne avea perfino sensibilmente rammollita la materia di guisa che mentre i detti calcoli prima dell'immersione presentavano una durezza assolutamente lapidea, dopo l'estrazione invece si trovarono inteneriti a segno da essere friabili sotto la pressione anche leggiera delle dita.

Dall'assieme delle suindicate osservazioni sembra pertanto che si possa ormai ritenere per accertata l'esistenza di una virtù specifica dissolvente nelle diverse vene dell'acqua antilitiaca di *Fiuggi*: ma poichè potrebbe rimaner tuttavia il sospetto che l'ottenuta diminuzione di volume nei calcoli di cui è parola fosse in qualche modo attribuibile all'azione meccanica dell' attrito delle molecole fluide scorrenti sopra i nominati corpi solidi, mi cade in acconcio di riferire qui un altro esperimento, che io reputo decisivo in proposito, eseguito nell'estate decorsa dal prelodato Medico di Anticoli.

Profittando questi della circostanza che un individuo sottoposto alla cura idropatica di *Fiuggi* avea emesso 24 piccoli calcoli urici della grossezza ognuno all'incirca di un seme di *campanula medium* depose la metà dei suddetti calcoletti entro una piccola carafa di vetro della capacità di un millilitro circa piena di acqua comune di cisterna, e l'altra metà in una

(1) Veggasi la memoria succitata pubblicata nel 1883.

simile carafa egualmente di vetro che fu riempita coll'acqua di *Fiuggi*. Sigillati quindi regolarmente gli orifizii, tenne in custodia scrupolosa ambedue le bottigline per soli 12 giorni, decorsi i quali si procedette, me presente, alla verifica delle medesime. Ora in questa verifica avemmo la soddisfazione di constatare che i dodici calcoletti immersi nell'acqua potabile comune di cisterna si erano mantenuti presso che inalterati, laddove gli altri infusi nell'acqua di *Fiuggi* si erano completamente disciolti, avendo tinto in color arancio tutta l'acqua contenuta nella carafa stessa, e ciò giova notarlo tuttochè gli urati per loro natura non siano molto solubili. (1)

Di fronte a questo fatto come mai potrebbe ulteriormente dubitarsi che l'operosità delle dette acque possa esser dovuta all'azione meccanica *di trascinare le materie solide che incontra* secondo che venne già asserito?

Ma qui mi è d'uopo prevenire un obbiezione che potrebbe essere sollevata in proposito delle surriferite esperienze. Ho detto che i calcoletti di acido urico tenuti in bagno per soli 12 giorni in pochissima quantità di acqua proveniente dalla fonte di *Fiuggi* (2) furono trovati affatto disciolti, laddove i due immersi isolatamente nella 2ª e 3ª sorgente si rinvennero in gran parte ma non interamente corrosi, dopo essere stati tenuti in infusione per un intero anno! A primo aspetto questa differenza di risultato potrebbe insinuare una qualche idea di contradizione o per lo meno d'inesattezza ed irregolarità di metodo nell'uno o nell'altro dei due esperimenti. È per altro a sapersi che le deposizioni uratiche tanto più facilmente sono attaccate e distrutte dall'acqua Antícolana quanto più fresca e recente è la loro formazione: il che posto svanirà di leggieri ogni rimarco sulla differenza succitata, sol che si consideri che i calcoletti adoprati dal dottor Morfino oltrechè essere, come già dissi, di un volume assai piccolo erano stati emessi per le vie orinarie lo stesso giorno in cui vennero posti in infusione nell'acqua, laddove i due calcoli dei quali io mi valsi nelle esperienze fatte alle sorgenti, presentavano ciascuno un volume pari a quello di una grossa nocchia e quel che più monta, erano stati tolti a mezzo di operazione ben sedici anni indietro, conforme mi venne assicurato dall'esimio professore da cui mi furono gentilmente forniti.

Dopo ciò riferendomi integralmente a quanto già ebbi a dichiarare altra

(1) È noto che per sciogliere una parte di urato occorrono per lo meno 1720 parti di acqua.

(2) L'acqua sgorgante dal boccaglio della Fontana di Fiuggi (che è appunto quella di cui si fa uso comunemente) rappresenta l'efflusso delle diverse sorgenti riunite insieme, che pullulano a poca distanza dalla fonte medesima.

volta, (1) dal fatto posto ormai fuor di contestazione che le acque di *Fiuggi* allorchè sono esperimentate allo stato naturale ed all'esterno sono realmente in grado di esercitare una energica azione dissolutiva sopra i calcoli, non intendo già debba dedursene che queste acque mantengano una pari intensità di azione e possono quindi spiegare la medesima virtù operativa nei calcoli latenti nell'interno dell'organismo. Sarebbe una vera follia il sostenere una conseguenza di tal fatta! Ciononpertanto, ammesso che quelle acque posseggano una tal quale facoltà di *operare specificamente per proprie condizioni,* sembra che mal non si apporrebbe chi amasse tuttavia di ritenere che le medesime conservino, se non altro in qualche grado, la loro virtù specifica, anche allorquando agiscono nell'interno della vescica o sul filtro renale.

Del resto non è qui mio còmpito di tessere l'istoria delle molte cure antilitiache seguite da favorevoli risultati dovuti esclusivamente all'uso delle nostre acque, (risultati che potrei pur allegare in appoggio della suesposta opinione) e solo mi limiterò a citare un caso che a mio avviso può avere una grand'importanza in proposito. Nella stagione decorsa io stesso fui testimonio in Anticoli dell'emissione spontanea di una scaglia o frammento di pietra della forma all'incirca di un seme di cocomero rimasta nella vescica di un malato, il quale era stato in precedenza sottoposto ad un' operazione di litontrisia riuscita felicemente. Prescindo dal fatto dell'espulsione materiale del detto frammento per le vie orinarie, dovuta probabilmente ad una eccitazione delle pareti muscolari della vescica, prodotta dalla quantità dell'acqua ingerita a dosi piuttosto elevate; ciò su cui mi è d'uopo richiamare l'attenzione si è la circostanza che la detta scaglia, la quale come che prodotta dal litontritore dovea senza meno presentare originariamente delle punte e dei spigoli veri e più o meno taglienti, allorchè venne emessa (notisi bene) senza verun incomodo del paziente, avea perduto d'appresso l'uso della nostra acqua ogni sua asprezza ed osservata colla lente addimostrava chiaramente che le punte erano smusse e che tutti i spigoli si erano sensibilmente arrotondati.

Potrei far seguito a questo esempio con altri molti a conferma sempre del principio suesposto che cioè le acque di *Fiuggi* conservano in qualche misura anche allorchè vengono adoperate per uso interno un tal quale principio mineralizzatore neutralizzante che un' accurata analisi potrà senza meno esattamente determinare.

Nel por termine però a questo mio scritto non posso esimermi dal far men-

(1) Veggasi la prima Memoria pubblicata nel 1878.

zione di un assai pregevole ed erudito lavoro pubblicato dall'illustre dottor Taberlet di Francia sul valore terapeutico della tanto decantata sorgente delle acque minerali di *Evian* nello Sciablese (Savoia). Dal medesimo ho rilevato che i salutari effetti i quali si ottengono presso noi coll'uso interno dell'acque di Anticoli, si hanno, a quanto sembra, anche ad *Evian* coll'uso di quelle acque che formano oggi non solo la risorsa, ma ben può dirsi la vera ricchezza di quella piccola ma industriosa città.

Ora non è qui il caso di far dei confronti sulla maggior efficacia di una o dell'altra delle suddette due acque: ma poichè è positivo, per quanto almeno può stabilirsi in base alla suindicata pubblicazione, (1) che nelle acque di *Evian* non è stata finora non solo dimostrata ma neppure avvertita una qualsiasi proprietà dissolvente all'esterno, a me basta di aver potuto constatare pel primo che questa proprietà esiste realmente nella nostra acqua di Fiuggi anche pei veri calcoli; ben pago del resto ove le suesposte mie ricerche potessero tornare di una qualche pratica utilità per quanto riguarda in ispecie il trattamento della litiasi urica.

Roma, 20 Gennaio 1884 (2).

---

(1) *Evian, ses eaux minérales et leur valeur theurapeutique*, par le docteur Taberlet, ancien Député. Nice, 1883.

(2) Posteriormente alla comunicazione da me fatta nella Sessione Accademica del 20 Gennaio 1884 della presente memoria, venne pubblicata (coi tipi dello Sgariglia in Foligno) una importante ed accurata Monografia *dell'Acqua di Fiuggi* redatta dall'esimio Cav. G. Morfino Medico-Chirurgo in Anticoli, nella quale l'Autore dopo aver posto in evidenza le proprietà fisiche e chimiche delle dette acque, con quell'erudizione e profondità di criteri scientifici che lo distinguono, si diffonde sull'azione terapeutica delle medesime, precisando, dietro anche le sue esperienze personali ed i casi clinici da lui osservati nello spazio di ben nove anni da che esso lodevolmente esercita nel detto Comune, quali siano le più vere e le più essenziali indicazioni sull'uso delle acque stesse. In questa memoria commendevolissima anche per le molte osservazioni pratiche di cui è fornita, l'Autore si prova altresì di dimostrare il modo con cui agiscano le dette acque nella cura della litiasi, confermando formalmente il principio *dell'azione corrosiva e dissolvente* che io ho ripetutamente propugnato nei miei scritti.

Il lavoro del Morfino ha formato già il soggetto di apposite riviste che furono stampate in diverse periodiche pubblicazioni scientifiche, tra le quali cito l'Idrologia e la Climatologia di Firenze — Il Bollettino delle malattie dell'orecchio, ecc. di Firenze — il Margagni di Napoli — il Raccoglitore medico di Forlì — La Preventiva di Napoli — Il Bollettino del Manicomio di Ferrara ed altri.

Per mia parte mi associo di buon grado agli elogi che meritamente ha riportato il Cav. Morfino per l'anzidetto suo coscienzioso ed erudito lavoro, non senza peraltro tornare a far voti che il Comune di Anticoli, il quale ha il vantaggio di possedere un rimedio tanto efficace e non ancora abbastanza conosciuto, compia ANCHE NEL SUO INTERESSE l'opera sua facendo eseguire e rendendo poscia di pubblica ragione una accurata analisi chimica di quelle acque salutari.

COMUNICAZIONI

Provenzali, P. F. S. – *Sulle sostanze minerali nelle acque di pioggia* (1):

Il P. Provenzali tornò sull'argomento delle sostanze minerali da lui trovate nelle acque di pioggia degli ultimi due mesi dell'anno testè compiuto. La scarsezza di pioggie in queste ultime settimane non avendogli permesso di verificare se il deposito lasciato dall'acqua caduta la notte dal 4 al 5 decembre fosse un fenomeno isolato, dipendente da cause locali, gli convenne limitarsi all'analisi delle acque anteriormente cadute, epperò già separate dalle sostanze che vi potevano essere meccanicamente mescolate. A tale fine si provvide di una certa quantità dell'acqua raccolta sulla fine di novembre e principio di dicembre in un pluviometro collocato in campagna aperta mezzo miglio circa fuori della città. Questa acqua fatta lentamente evaporare a bagno maria fino a completa siccità, lasciò un residuo solido che scaldato più fortemente e così liberato da una piccola quantità di sostanze organiche che rimasero carbonizzate, si presentò sotto forma di una polvere cenerognola del peso di gr. 0,78 per ogni litro, ma che tenuto conto della evaporazione avvenuta durante il tempo che l'acqua rimase nel pluviometro deve essere alquanto diminuito, non però al disotto di gr. 0,65. Tale quantità è certo molto maggiore di quella che nello stato normale dell'atmosfera si ottiene dalle acque di pioggia anche nelle grandi città e nei primi periodi della caduta. Quanto alla natura del residuo solido trovò che per circa un quinto era formato di sali a base di calce e che la soluzione cloridrica trattata col ferro-cianuro di potassio non accusava la presenza del ferro. Adoperando una quantità d'acqua molto maggiore forse anche la presenza del ferro non sarebbe sfuggita all'analisi. Del resto la mancanza o scarsezza di questo metallo non si oppone all'ipotesi che attualmente si trovi nell'aria in quantità molto grande un polviglio di origine endogena, non essendo raro il caso che la parte solubile delle ceneri e sabbie vulcaniche sia esente di ferro.

Egidi, P. G. – *Presentazione di un tacheometro*:

Il ch. P. G. Egidi presentò un tacheometro grafico a riflessione per la misura degli angoli da lui immaginato e che ha il pregio della semplicità e della economia. Esso è composto di due sole alidade e uno specchietto, l'alidada fissa porta lo specchio che può girare intorno ad un asse verti-

(1) Questa comunicazione, riferendosi allo stesso argomento dall'A. trattato nella precedente sessione, è stata fusa in quella medesima Nota.

cale indipendentemente dall'alidada mobile. Questa girando intorno allo stesso asse conduce il traguardo fino sulla linea dell'oggetto riflesso dallo specchio, e sopraponendosi così l'imagine del traguardo a quella dell'oggetto viene con precisione segnato il punto che determina l'angolo formato dalla linea che dall'oggetto va al centro dello specchio, colla linea dell'alidada fissa, dalla quale si contano gli angoli.

Castracane, Conte Ab. F. – *Comunicazioni diverse*:

In seguito alla importante comunicazione del socio cav. Statuti sugli esperimenti atti a provare la virtù dissolvente delle acque antilitiache di Fiuggi, il ch. Sig. Conte Ab. Castracane riflettendo che quei calcoli lasciati nell'acqua non solo non presentavano più durezza di sorta, ma si rendevano friabili alla sola leggera pressione delle dita, emette il dubbio che sia la materia cementante delle particelle minerali che si dissolve per azione delle acque e che quindi si disgreghino le sostanze calcari. Il ch. prof. Statuti risponde esser precisamente questo che si è visto accadere nei surriferiti suoi esperimenti.

A proposito poi della natura dissolvente di talune acque, il medesimo Sig. Conte Castracane crede sarebbe interessante una ricerca scientifica sull'acqua Marcia, la quale corrode sensibilmente i rubinetti. Propone la questione se quest'acqua eserciti semplicemente un'azione meccanica dovuta alle arene che disgraziatamente entrano nell'acqua suddetta e vengono trasportate nelle condotture, ovvero sia dovuta alla grande quantità di gas acido carbonico che in essa si contiene. Il ch. P. Provenzali risponde, egli credere che sia la grande pressione alla quale è soggetta quell'acqua nelle condotture, e per conseguenza alla semplice azione meccanica delle sostanze eterogenee tenute in sospensione e convogliate dall'acqua; le quali sostanze arenose sospinte da una fortissima pressione tendono ad uscire con forza dai rubinetti, e traversandoli esercitano l'effetto di una lima sottilissima sul metallo di cui è composto il rubinetto.

Il predetto Sig. Conte Castracane disse inoltre esser opinione comune che nel fondo del Mediterraneo non vi sieno Diatomee. Difatti anche egli non ne avea mai rinvenute provenienti dal fondo, come non sono state riconosciute nè dai naturalisti inglesi nella crociera del Porcupine fatta nel 1870, nè dai naturalisti francesi, benchè il suddetto mare sia ricchissimo di Diatomee nella superficie. Però avuti cinque scandagli diversi eseguiti dal *Travailleur* nel fondo appunto del Mediterraneo, ha potuto constatare che due di essi presentavano qualche rara Diatomea, o intera o frazionata, gli altri

tre poi erano assolutamente ricchi di Diatomee. Egli die'subito conto di questo risultato al ch. micrografo A. Certes, il quale ne parlò al Sig. Milne Edward. Questi impressionato della novità di tal ritrovamento nei fondi del Mediterraneo ha deciso di inviare al riferente gli scandagli fatti dal *Travailleur* nel 1881 e 1882 e dal *Talisman* nel 1883, onde vengano esaminati. L'anomalia del non rinvenirsi le diatomee nel fondo del Mediterraneo, veniva da altri spiegata con la ipotesi che il calcare potesse avere azione dissolvente sulla silice. Il riferente fa notare esser vero che la calce allo stato caustico può attaccare e sciogliere la silice, non è però così del carbonato calcare. Nelle acque del Mediterraneo esistendo bicarbonato di calce, potrebbe forse essere questo il principio dissolvente della silice, di cui sono formate le valve delle diatomee. Prega il ch. P. Provenzali di fare qualche studio e qualche esperienza in proposito; quantunque dimostrato e riconosciuto che quella anomalia realmente non esista non ha più luogo ad esaminare la consistenza della ipotesi sopradetta.

Castracane, Cont. Ab. F. – *Presentazione di un opuscolo*:

Il Presidente presentò all'Accademia da parte dell'autore Sig. Stefano Rossi professore nel liceo Mellerio-Rosmini di Domodossola un opuscolo intitolato: Studi sulla Flora Ossolana.

COMITATO SEGRETO

Riunitasi l'Accademia in Comitato Segreto, venne fatta la proposta di cambio tra i nostri Atti e le pubblicazioni della *Society Microscopical* di Londra e della Società Reale di scienze di Edimburgo. Ambedue le proposte furono approvate.

Fu proposto a socio onorario il ch. Sig. D. Julius Schmid professore di storia nell'università di Tubbinga. Fatta la votazione venne eletto a pieni voti.

Fu presentata una memoria del Sig. Ing. A. Arnaud di Cuneo sulle briglie e sulle serre onde impedire i protendimenti dei burroni alpini, a fine di ottenere dall'Accademia un giudizio sul merito scientifico di essa. A proposta del Comitato Accademico fu nominata una Commissione composta dei soci Ing. A. Statuti, Ing. G. Olivieri, Ing. F. Guidi, Ing, V. De Rossi-Re, Prof. G. Tuccimei, acciocchè questa prenda in esame la surriferita memoria del Sig. Ing. Arnaud, e ne riferisca in seguito.

Venne decretato che il Presidente invii una lettera di ringraziamento a nome dell'intiero corpo accademico ai signori Conte Vespignani, Comm. Sterbini, prof. Boezi, per l'opera da questi prestata nella solenne Accademia

per la commemorazione del terzo centenario dalla promulgazione del Calendario Gregoriano. Al prelodato Sig. Prof. Boezi venne deciso di inviare in dono le carte musicali occorse in quella medesima circostanza.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI: Conte Ab. Francesco Castracane, Presidente. – Cav. A. Statuti. – Comm. C. Descemet. – Cav. P. Sabatucci. – Cav. G. Olivieri. – Dott. D. Colapietro. – Prof. M. Azzarelli. – P. F. S. Provenzali. – Prof. V. De Rossi-Re. – P. G. Lais. – P. G. Foglini. – Prof. M. S. de Rossi, Segretario.

CORRISPONDENTI: P. G. Egidi. – Ing. A. De Andreis.

L'Accademia apertasi legalmente alle ore 2 $^3/_4$ p. venne chiusa alle ore 5 p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. ARNAUD (A). — *Almanacco del coltivatore*. — Anno Undecimo, 1884. — Cuneo, 1883, in-8° piccolo.
2. —— *Conversazioni scientifico-economiche*. — Cuneo, 1883, in-8° piccolo.
3. *Atti della R. Accademia dei Lincei*. — A. CCLXXX, 1882—83. — Serie terza — Transunti — Vol. VII — Fasc. 16. — Vol. VIII — Fasc. 1°, 2°. — Roma, 1883, in-4.°
4. *Boletin de la Academia nacional de ciencias in Córdoba*. — Tomo IV. — Entrega II, III, IV. — Tomo V. — Entrega 1ª e 2ª. — Buenos Aires, 1882, 1883, in-4.°
5. *Bulletin de la Société Franco-Hispano-Portugaise de Toulouse*. — T. III, 1882. — Numéro 2, 3. — Toulouse, 1882, in-8.°
6. *Informe oficial de la comision cientifica de la expedicion al Rio Negro* (*Patagonia*). — Entrega I, II, III. — Buenos Aires, 1881, in-4.°
7. *La Civiltà Cattolica* — A. 35. — Serie XII. — Vol. V. — Quad. 805, 806. — Firenze, 1883, in-8.°
8. ROSSI (D.r S.) — *Studi sulla flora Ossolana*. — Domodossola, 1883, in-8.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE III[a] DEL 17 FEBBRAIO 1884

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE
DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE

DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

SUR LE DERNIER THEORÈME DE FERMAT

PAR M. E. DE JONQUIÈRES

I. – En attendant que la lumière se fasse complète sur le fameux théorème concernant l'impossibilité de satisfaire par des nombres entiers à l'équation

$$a^n + b^n = c^n \qquad (1)$$

dès que $n > 2$, les géomètres seront peut-être bien aises de voir démontrer, et même de la façon la plus élémentaire, l'exactitude de l'*affirmation* de Fermat, dans l'un des trois cas généraux qui comprennent ensemble tout l'énoncé de la proposition.

En effet, si l'on suppose les deux nombres mineurs a, b, dégagés de tout facteur commun (ce qui ne diminue en rien, comme l'on sait, la généralité de la question), et qu'on les considère alors sous le rapport de leur qualité d'être *premiers* ou *composés*, l'énoncé de Fermat ne comporte que les trois alternatives suivantes:

1º a et b premiers:
2º a ou b premier et l'autre composé ;
3º a et b composés.

C'est au premier de ces trois cas, le plus simple de beaucoup, que s'applique la démonstration qu'on va lire. Incidemment, elle fait connaître deux conditions restrictives et absolues, auxquelles les nombres b et c sont assujétis dans le deuxième cas.

II. – Soient donc a, b, c, n, quatre nombres entiers, positifs, et $n > 1$. Pour que l'équation (1) puisse être satisfaite, il faut d'abord que b diffère de a, sans quoi c ne serait pas un nombre entier. Les trois nombres a, b, c étant inégaux, supposons $a < b < c$, d'où il s'ensuit que c surpasse a d'*au moins* deux unités.

Si l'on désigne par i l'excès de c sur a, d'où $c = a + i$, l'équation (1) devient . . . .

$$b^n = (a+i)^n - a^n = nia^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} i^2 a^{n-2} + \dots + i^n.$$

i, diviseur du second membre, divise donc b^n, et puisqu'il est plus grand que l'unité, comme on vient de le dire, il faudrait, pour que b fût un nombre premier, que i fût égal soit à b, soit à une puissance de b. Or il ne peut même pas être égal à b, car on aurait alors

$$a^n + b^n = (a+b)^n,$$

équation qui n'est possible que si $n = 1$, contrairement à l'hypothèse, i devant être moindre que b est, a fortiori, plus petit qu'une puissance de b.

Ainsi le plus grand, b, des deux nombres mineurs a, b, est *toujours* tel, que sa puissance $n^{\text{ième}}$ est divisible par un certain nombre entier i, inférieur à b et plus grand que l'unité. Donc la racine b ne peut elle-même jamais être un nombre premier, et l'on a ces deux théorèmes:

Théorème I. – *La somme des puissances* n$^{\text{ièmes}}$ *de deux nombres premiers n'est* jamais *égale à la puissance* n$^{\text{ième}}$ *d'un nombre entier, si* $n > 1$.

Théorème II. – *Lorsque l'équation* $a^n + b^n = c^n$ *est satisfaite* (si la valeur de $n > 1$ permet qu'elle le soit), *le plus grand* b *des deux nombres mineurs* a, b, *est* toujours *un nombre composé, que* a *soit premier ou non*.

Les premier des trois seuls cas possibles de l'énoncé de Fermat est donc démontré et, de plus, on connait déjà une condition qualitative à laquelle les nombres a et b doivent satisfaire dans le 2$^{\text{e}}$ cas.

III. — Actuellement, posons $c = b + j$. L'équation (1) devient

$$a^n = (b + j)^n - b^n = njb^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot j^2 b^{n-2} + \ldots\ldots + j^n.$$

j, diviseur du second membre, divise a^n et d'ailleurs ne peut, par le même motif que ci-dessus (pour i et b), être égal ni à une puissance de a, ni même à a. Donc si a est premier, comme on le suppose dans le 2ème cas, j, devant lui être inférieur, ne peut être autre que l'unité, et l'on a ce troisième théorème :

Théorème III. — *Lorsque l'équation* $a^n + b^n = c^n$ *est satisfaite* (si la valeur de $n > 1$ permet qu'elle le soit), *si* a *un nombre premier, les deux nombres majeurs* b *et* c *ne diffèrent entre eux que d'une unité.*

IV. — Les théorèmes II et III se vérifient pour $n = 2$. a étant un nombre premier quelconque, l'équation (1) a toujours une solution, et une seule, donnée par la relation

$$a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2,$$

dans laquelle les nombres b, c sont exprimés, respectivement, par $\frac{a^2 - 1}{2}$ et $\frac{a^2 + 1}{2}$, qui diffèrent entre eux d'une unité seulement.

V. Cette formule, lorsque a est un nombre composé, $a = ef$ (les facteurs e, f pouvant d'ailleurs être simples ou composés), devient alors, dans le troisième cas de l'énoncé de Fermat et pour $n = 2$,

$$a^2 + \left(\frac{e^2 - f^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^2 + f^2}{2}\right)^2$$

et donne, par les diverses combinaisons binaires qu'on peut former avec les facteurs de a, toutes les solutions de la question; ce qu'on sait déjà.

Cette formule suggère la reflexion suivante.

Remarque. Les développements des carrés des binômes $\left(\frac{e^2 - f^2}{2}\right)$, $\left(\frac{e^2 + f^2}{3}\right)$ se composent chacun de *trois* termes seulement, dont les extrêmes sont respectivement identiques, tandisque les moyens, égaux en valeur absolue,

diffèrent par le signe seul, de telle sorte qu'il suffit de l'accession du terme additif a^2 au premier développement pour le rendre identique à celui du second membre. Cette circonstance permet que la relation $a^2+b^2=c^2$ soit possible en nombres entiers. Mais une pareille « bonne fortune » algébrique ne se présente plus pour $n>2$, car les binômes, quels qu'ils fussent, qu'on formerait par analogie, se composant chacun de plus de trois termes et n'offrant plus la même symétrie dans les signes, une telle identification n'est plus à *espérer*.

VI. — Quoi qu'il en soit de cette simple *remarque*, les trois théorèmes qui précèdent sont établis rigoureusement. Ils marquent donc, en tant que démonstration *générale*, un pas vers une solution complète de la fameuse et désespérante énigme léguée par Fermat à la postérité.

Paris, 1er février 1884.

E. DE JONQUIÈRES.

COMUNICAZIONI

Ferrari, P. G. S. – *Presentazione di una sua comunicazione;*

Il ch. P. G. S. Ferrari presentò una sua comunicazione sopra le relazioni fra i massimi e minimi delle macchie solari e le straordinarie perturbazioni magnetiche.

Provenzali, P. F. S. – *Sulla straordinaria luce crepuscolare del* 1883–84 (1):

Il ch. P. Provenzali dopo avere brevemente accennati alcuni nuovi fatti favorevoli all'opinione che gli straordinari crepuscoli, di cui tanto si è parlato, sieno in gran parte dovuti ad una enorme quantità di ceneri versate nell'aria dalle recenti eruzioni vulcaniche, espose il risultato dell'analisi microscopica da esso fatta di una polvere caduta colla pioggia dell'8 gennaio prossimo passato, e raccolta dal P. Ferrari al suo osservatorio astronomico sul Gianicolo. Sebbene la quantità di questa polvere fosse piccola per modo da non prestarsi all'analisi chimica, pure tenuto conto dei soli gr. 15 d'acqua d'onde fu ottenuta, corrisponde a gr. 0,67 per ogni litro d'acqua; epperò supera molto i pochi millesimi di residuo minerale che sogliono lasciare le acque di pioggia. Osservata con una lente la suddetta polvere presentava dei puntini neri di ferro magnetico, che per mezzo di una calamita furono facilmente separati dal resto. Ciò che rimase, osservato al microscopio sotto forte ingrandimento, si presentò in forma di piccole laminette, parte di colore giallo bruno e parte di colore giallo chiaro. Le prime avevano figura prismatica simile a quella della mica fogliacea, le seconde erano amorfe; e tanto le une che le altre resistettero all'azione degli acidi solforico e cloridrico. Quindi conchiuse che la polvere raccolta dal P. Ferrari sia che se ne consideri la quantità retativa, sia che se ne considerino le qualità fisiche, differisce notabilmente dai residui minerali che lasciano le ordinarie acque di pioggia.

De Andreis, A. – *Nuove esperienze di elettrostatica induzione*:

Il socio corrispondente Sig. A. De Andreis mostrò un quadro analitico da esso accuratamente redatto nell'anno 1882 concernente la comunicazione dei fili telefonici col serbatoio comune delle *nubi temporalesche*, con alcune nuove esperienze di elettrostatica induzione da lui eseguite nell'anno scorso sotto queste imponenti masse di fili telefonici. Disse che nell'ese-

(1) La trattazione di tale argomento, stante il ritardo della pubblicazione degli Atti, è stata riunita nella memoria pubblicata nel fascicolo della Iª Sessione, 16 Dicembre 1883.

guire altre esperienze, nel gran temporale del 2 settembre p. p. una scintilla d'induzione fu talmente intensa che spezzò la campana di vetro del suo elettroscopio-condensante, e fuse le due laminette di alluminio dell'istesso apparecchio. Scopo precipuo di questi studi è di poter rispondere ai due importanti quesiti, cioè

1. Queste masse considerevoli di fili telefonici che circolano al di sopra dei nostri tetti, presentano dei pericoli durante le forti scariche elettro-atmosferiche?

2. Come è che queste vere masse metalliche possono esercitare un'azione provocatrice sopra il fulmine?

Aggiunse che questo suo lungo e pericoloso lavoro risguardava solo la città di Roma per le sue condizioni speciali, e che quando lo avrà completato lo presenterà all'Accademia.

Castracane, Conte Ab. F. – *Sulle polveri raccolte nella pioggia dell'8 Gennaio* 1884:

In seguito alla comunicazione del ch. P. Provenzali il ch. Sig. Conte Ab. Castracane fece notare che le polveri raccolte nella pioggia del giorno 8 Gennaio testà decorso presentano i medesimi caratteri osservati nelle polveri meteoriche, che si è detto provenire dai deserti. Difatti queste polveri sono appunto detriti cristallini probabilmente composti di silicati, i quali non possono essere sciolti dagli acidi. Quel che trova però molto interessante è la presenza di quei piccoli punti neri, che crede anche egli essere precisamente granuli di ferro meteorico, ferro che dalle esplorazioni del Challenger è risultato formare talora una parte assai sensibile dei depositi marini, e che sottoposto ad una pressione sopra lamine d'acciaio diviene lucente. Accenna la probabilità che questo ferro meteorico possa essere detrito di stelle cadenti, come difatti suole avvenire alle epoche dei massimi di Agosto e di Novembre; nei quali periodi per parecchi giorni si raccolgono di tali polveri meteoriche. Ma nell'odierno fenomeno di tanta sovrabbondanza di polveri nell'atmosfera non vi è, che si sappia, qualche pioggia di stelle cadenti. Perciò è da supporre che anche fuori dei suddetti principali periodi possano raccogliersi in abbondanza di tali polveri.

De Rossi, Prof. M. S. – *Curiosità bibliografica*:

Il Prof. M. S. de Rossi comunicò all'Accademia una notizia relativa ad una curiosità bibliografica da esso testè rinvenuta nel commercio libraio. – Essa è un volume elegantissimo legato con le armi del Pontefice Clemente XI

Albani e proveniente dalla ben nota biblioteca Albani recentemente venduta e dispersa. Il detto volume è formato dalla completa collezione di tutti gli editti, notificazioni, inviti sacri, ordini di polizia e relazioni relative ai fatti ed alle disposizioni prese dalle autorità civili ed ecclesiastiche in conseguenza del grande terremoto avvenuto il 2 febbraio 1703. Dal titolo manoscritto di cotesto volume apparisce essere esso il secondo, formato dagli allegati citati in un primo volume manoscritto, contenente un diario di tutti i terremoti e dei fatti conseguenti avvenuti in quel periodo.

Il disserente si domandò come questo secondo volume potesse essere stato separato dal primo. La spiegazione è ovvia, considerando esser noto come della Biblioteca Albani siano stati venduti separatamente i manoscritti degli stampati, perciò questo volume rimase fra gli stampati e non seguì la sorte funesta della maggior parte dei manoscritti. I quali essendo stati venduti all'estero furono durante il viaggio inghiottiti col bastimento dalle onde marine. Il volume ora ritrovato dunque ci fa conoscere l'esistenza di un manoscritto, che oggi sarebbe prezioso per la storia dei terremoti, quantunque di questo del 1703 esistano numerose memorie. Ma un'altra ricerca viene suscitata dal curioso rinvenimento del descritto volume. Alcuni anni or sono il riferente pubblicò nel bullettino del Vulcanismo Italiano una notizia contemporanea del 1703 da esso rinvenuta, secondo la quale il Pontefice Clemente XI in seguito al gran terremoto del 2 febbraio avrebbe voluto egli stesso presiedere una congregazione di scienziati; alla quale avrebbe proposto due quesiti. L'uno riguardante la possibilità del ritorno prossimo di quel fenomeno, l'altro richiedente se vi fossero mezzi scientifici per riconoscere i segni precursori del mederimo. Al primo quesito i dotti risposero affermando la probabilità del ritorno di nuove scosse, pel secondo si dichiararono incompetenti. Ma uno di essi, il Banchieri, depose nelle mani del Papa un manoscritto contenente un programma di osservazioni, che secondo esso potevano servire alla previsione dei terremoti. Questo manoscritto inedito rimase sconosciuto; e quantunque ricercato dal riferente non se ne trovò finora traccia veruna.

Il volume stampato ora scoperto, cui manca il primo manoscritto, fa nascere il sospetto che sia questo il lavoro del Banchieri. Ma il titolo di diario che esso aveva e l'indole dagli allegati superstiti nel secondo volume escludono quasi certamente una tale supposizione. Quindi dobbiamo piuttosto concludere che il manoscritto del Banchieri finora irreperibile fu anch'esso smarrito nel mare con gli altri manoscritti della biblioteca Albani,

la quale ora sappiamo che conteneva forse almeno due diversi scritti sulle indagini sismologiche.

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

1. Presentazione da parte del nuovo socio corrispondente sig. E. de Jonquières di una nota intitolata « *Sur le dernier théorème de Fermat* », che trovasi pubblicata nel presente fascicolo.
2. Presentazione di una lettera di ringraziamento per gli Atti Accademici inviata dal bibliotecario della Comunale di Verona.
3. Presentazione di lettere dei nuovi soci Sig. de Jonquières e Sig. Comm. G. Sterbini in ringraziamento delle loro rispettive nomine.

COMITATO SEGRETO

Venne presentata la domanda di cambio coi nostri Atti fatta dalla Società reale malacologica del Belgio, la quale offre i suoi annali fino dal 1862. Venne accettata la proposta di tale cambio.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI: Conte Ab. F. Castracane, Presidente. – Monsignore F. Regnani. – P. G. S. Ferrari. – Comm. C. Descemet. – P. F. S. Provenzali. – Prof. M. Azzarelli. – Prof. G. Tuccimei. – P. G. Lais. – P. G. Foglini. – Prof. F. Ladelci. – Prof. A. Statuti. – Prof. M. S. De Rossi, Segretario.

CORRISPONDENTI: P. G. Egidi. – Ing. A. de Andreis.

AGGIUNTI: March. L. Fonti.

La seduta aperta legalmente alle ore $3\frac{1}{2}$ p., fu chiusa alle ore $5\frac{1}{2}$ p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Classe der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften*. München 1883. In-4.°
2. *Atti della R. Accademia dei Lincei*. — Anno CCLXXX 1882—83. — Serie terza. — Memorie della classe di scienze morali, ecc. — Vol. VIII, X. — Roma, 1883, In-4.°
3. —— *Transunti*. — Vol. VIII. — fasc. 4°. — Roma, 1884, in-8.°

4. *Atti della R. Università di Genova.* — Vol. VI. — Genova, 1884, in-8.°
5. *Bullettino della R. Accademia medica di Roma.* — A. IX. — n.° 6. — Roma, 1883, in-8.°
6. *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche.* — T. XVI. — Marzo 1883. — Roma, 1883, in-4.°
7. CARUTTI (D.) — *Breve storia della Accademia dei Lincei.* — Roma, 1885, in-8.°
8. *Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde.* — Jahr. 36. — Wiesbaden, 1883, in-8.°
9. *Jahrbüch über die Fortschritte der Mathematik, etc.*, — Jahr, 1883. — Heft. 3. — Berlin, 1884, in-8.°
10. *La Civiltà Cattolica.* — Serie XII, Vol. V, quad. 807, 808. — Firenze, 1884, in-8.°
11. MAZZETTI (Ab. G.) — *Una specie nuova del genere « Spatangus ».* Modena 1883, in-8.°
12. *Nova Acta regiae societatis scientiarum Upsaliensis.* — Ser. III. — Vol. XI. — fasc. II.°, 1883. — Upsaliae, MDCCCLXXXIII, in-4.°
13. *Osservazioni meteoriche fatte all'Osservatorio della R. Università di Genova.* — Aprile —Giugno 1883.
14. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — *Partie littéraire.* — IIème série, to. XIX, XLe de la collection. — Première livraison, Janvier. Paris, 1884, in-8.°
15. —— *Partie Technique.* — IIe série, to. X, XLIIe de la collection. — Première livraison, Janvier. Paris, 1884, in-8.°
16. RADLKOFER (LUDWIG) — *Ueber die Methoden in der Botanischen Systematik, insbesondere die anatomische Methode.* München 1883, in-4.°
17. *Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli.* — A. XXII, fasc. 11, 12, 1883. Napoli, 1883, in-4.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE IVª DEL 16 MARZO 1884

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE
DEGLI ANTELMINELLI

COMUNICAZIONI

Tuccimei, Prof. G. – *Studi geologici dell'Esquilino, dell'Oppio e del Celio*:
Il prof. G. Tuccimei riassumendo gli studii da lui comunicati all'Accademia nel Maggio dell'anno scorso, intorno ai terreni incontrati nei pozzi e nel gran collettore, che per cura dell'ufficio idraulico comunale si sta scavando sotto all'Esquilino, aggiunse nuove osservazioni da lui fatte ad occasione del proseguimento di quei lavori. Oltre al pozzo di Via della Polveriera, ne descrisse altri due, praticati uno nel terreno demaniale tra questa e S. Pietro in Vincoli, l'altro presso la chiesa di S. Francesco di Paola. Ambedue si abbassano alla ordinata 16m, 99, scendendo fino oltre 21m. sotto il piano stradale. Da questi risulta dimostrata la struttura geologica dell'Esquilino, consistente in un tufa decomposto, che sottogiace a uno strato di scarico e sostruzioni moderne dello spessore di oltre 3m, 50. Sotto al tufo decomposto si ha un banco di tufo litoide rosso leucitico di 2m. 05; indi 1m. 50 di tufo terroso, sotto al quale una sabbia silicea con lamelle di mica (biotite) e frammenti di pirossene (augite). Sotto questo strato vi ha una sabbia argillosa con stratarelli nerastri di forma lenticolare, alquanto inclinati verso SSE, i quali nella parte più bassa della galleria si frammischiano a noduli di argilla indurita. È l'ultimo strato raggiunto sotto la collina. Ma verso S. Francesco di Paola la galleria, che prosegue in direzione S. N. verso la via de'Serpenti, salendo con lievissima pendenza,

taglia costantemente la linea di separazione di due strati, l'inferiore di una bellissima marna turchina, omogenea, compatta con *planorbis* e *cyclostoma*; il superiore di una sabbia argillosa gialla, con stratarelli di limonite e molte *clausilia*, *helix*, *limnea*, *bulimus*. Questi due strati formano il sottosuolo della valle tra l'Esquilino e il Quirinale, e provano come alle fiancate dell'Esquilino fatte da depositi alluvionali e vulcanici (formazione laziale) si addossino in detta valle terreni lacustri di un'epoca posteriore alla corrente che scavò la valle medesima. Durante questo scavo la corrente, che affluiva nel Tevere da quella parte, addossò i suoi detriti anche sul declivio dell'Esquilino dalla parte di S. Francesco di Paola; dove il pozzo, secondo i dati forniti dagli ingegneri dell'ufficio idraulico, incontrò quasi totalmente terreni fluviali. La stessa carta di Brocchi nota in quel punto una lingua di *sabbia siliceo-fluviatile* addossata al tufo e che prolunga verso la valle del Tevere la lacinia dell'Oppio. È ovvio il dedurne che i torrenti che sboccavano tanto della valle tra l'Oppio e il Cispio, quanto da quella tra l'Oppio e il Celio, nell'aprirsi in pianura formarono in quel punto un piccolo conoide di deiezione, che prolungò il rilievo dell'Oppio.

Nella sabbia argillosa della valle, verso Via de' Serpenti, si trovarono frequenti ossami di mammiferi, rotolati e spezzati, taluni dei quali l'A. spera di determinare in seguito, essendo l'attuale comunicazione un primo abbozzo, e il periodo delle osservazioni non essendo neppur terminato pel continuarsi dei lavori. Così pure spera di tornare sull'argomento dopo aver determinato i molluschi rinvenuti, ed avere esaminato al microscopio gli stratarelli nerastri e la sabbia micacea formanti il nucleo della collina. Riguardo a quest'ultimo strato, che è alla quota di 16.m 99 sul livello del mare, l'aspetto punto omogeneo della sabbia, le traccie di mica e pirossene e l'insieme alquanto grossolano, ne fanno fin da ora escludere la origine marina. La quale poi resta definitivamente esclusa per le marne e le argille sabbiose della valle tra l'Esquilino e il Quirinale, che sono quasi alla stessa ordinata per essere la galleria pressochè orizzontale.

L'A. non mancò di far notare la differenza tra il fondo della valle in questione e quello della valle tra l'Esquilino e il Celio. In questa ultima il terreno vergine che trovasi a un livello più alto (20.m 70) è formato da tufo granulare e in qualche punto da sabbia finissima con pochi resti organici.

Da tutte queste osservazioni l'A. crede di poter stabilire due distinti periodi nella storia fisica del suolo di Roma dell'epoca quaternaria. L'uno

(alluvione antica), in cui vennero deposti i terreni fluviatili e vulcanici formanti quelle stesse colline, e che durò fino alla formazione del tufo granulare. L'altro (alluvione moderna) in cui quei terreni vennero scavati da correnti minori, per le quali si isolarono le attuali colline e finì coll'impaludarsi delle acque nella pianura da esse formata. Il prosciugamento di quelle paludi, alcune delle quali sono anche storiche, dovette compiersi in gran parte per un lentissimo sollevamento del suolo, che finì d'incanalarne le acque al Tevere e al mare.

BONCOMPAGNI, Principe D. B. – *Presentazioni diverse*:

D. B. Boncompagni presentò da parte degli autori un esemplare di ciascuna delle pubblicazioni seguenti:

NORME DI COSTRUZIONE || PER AUMENTARE LA RESISTENZA DEGLI EDIFIZI || CONTRO IL TERREMOTO || RACCOLTE || PER CURA DELL'INGEGNERE || ANTONIO FAVARO || PROFESSORE NELLA REGIA UNIVERSITA' DI PADOVA || MEMBRO EFFETTIVO DEL R. ISTITUTO VENETO || VENEZIA, || STABILIMENTO DI G. ANTONELLI || 1883 in 8° di 74 pagine, nella 2ª delle quali si legge: *Estratto dagli Atti del R. Istituto veneto di scienze lettere ed arti* || Tomo II, serie VI.

(Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* 6ᵉ année 1882) || SUR || LE PROBLÈME DE FORMER UN CARRÉ || EN AJOUTANT || UN CUBE A UN NOMBRE DONNÉ PAR || C. P. PEPIN, S. J. in 8° di 15 pagine nell'ultima delle quali si legge: « Bruxelles, – Impr. F. HAVEZ ».

NOTICE || SUR LA CARRIÈRE MARITIME, || ADMINISTRATIVE ET SCIENTIFIQUE || DU VICE-AMIRAL DE JONQUIÈRES, || GRAND OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR || DIRECTEUR GÉNÉRAL DU DEPÔT DES CARTES ET PLANS DE LA MARINE, || VICE-PRÉSIDENT DE LA COMMISSION DES PHARES, MEMBRE DE LA COMMISSION DE L'OBSERVATOIRE || PARIS, || GAUTHIER-VILLARS IMPRIMEUR-LIBRAIRE || DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, || quai des Augustins, 55 || 1883 in-4° di 28 pagine:

HUIT LETTRES || DU P. CLAUDE JAQUEMET || DE L'ORATOIRE || PUBLIÉES || PAR ARISTIDE MARRE || EXTRAIT DU *BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE* || TOMO XV. – DICEMBRE 1882. || ROME IMPRIMERIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES || Via Lata, N. 3 || 1883 in 4° di 20 pagine.

Presentò anche da parte dell'autore Sig. prof. Eugenio Carlo Catalan l'originale manoscritto della continuazione e fine del suo lavoro intitolato: « *Mémoire sur quelques décompositions en carrés* », che è stato già pubblicato nel fascicolo contenente gli Atti della Sessione Iª del 16 Dicembre 1883.

Olivieri, Ing. G. – *Sul teletopometro*:

Il ch. Sig. Ing. Cav. Giuseppe Olivieri significò all'Accademia come sarebbe stato suo desiderio di farle una relazione alquanto estesa sul *teletopometro*, che gentilmente gli venne favorito dall'autore Sig. Prof. Cerebotani per esperimentarlo praticamente allo scopo di riconoscere a qual genere di rilievi goedetici riuscisse veramente utile, e quali ne fossero i limiti dell'esattezza. Così aveva ideato di farne in due giorni consecutivi diverse applicazioni; ma costretto il prof. Cerebotani a ripartire da Roma, non era riuscito al riferente di rilevarsi che il contorno della Piazza Vittorio Emanuele e qualche altro punto a distanza, lavorando nella sola prima giornata. Ciò non ostante avrebbe in breve supplito almeno in parte con più ampia relazione sull'istrumento, traendola dai raffronti delle molte cifre che aveva registrato. E queste cifre rappresenteranno. 1° le distanze dall'istrumento dei vari punti presi di mira, verificate coll'uso del nastro di acciaio: 2. le varie letture fatte sull'istrumento: 3. le medesime o le più prossime ritrovate nelle tavole già calcolate e annesse all'istrumento: 4. le distanze fornite dalle tavole stesse corrispondenti a quelle letture. Era intanto lieto di assicurare l'Accademia che l'uso di quell'istrumento di piccola dimensione era comodo e spedito; ed aveva qualche pregio speciale per far dei rilievi, che o non si potrebbero ottenere cogli strumenti comunemente in uso, o con tempo assai più lungo.

Lais, P. G. – *Spettroscopio-fotometro*:

Il P. Giuseppe Lais nella presentazione all'Accademia dell'opuscolo del ch. socio corrispondente, prof. Domenico Ragona, *Sui crepuscoli rossi dell'autunno* 1883 *e dell'inverno* 1883-84, notò la convenienza per questi studi della costruzione di un apparecchio di misura della intensità luminosa crepuscolare. Con ciò si avrebbe il mezzo di istituire confronti per varianti contemporanee e successive.

L'odierno spirito di sottoporre tutto a scandaglio doveva già aver improntato uno strumento per dare alla posterità più esatte scientifiche notizie sulle apparizioni del 1883-84.

A tale scopo propose all'Accademia l'uso di uno spettroscopio-fotometro. Lo spettroscopio, che ci fornisce il mezzo di posare l'attenzione su raggi di diversa refrangibilità, si presta assai bene a sceverare i diversi colori crepuscolari e porceli sott'occhio sia nella loro intensità, sia nella estensione. Se pertanto lateralmente allo strumento, per mezzo di uno spec-

chietto o meglio di un prismetto collocato sulla fessura dello spettroscopio venga fatto d'introdurre nel campo dello strumento raggi di una sorgente terrestre, si avranno due spettri, in cui l'occhio è giudice della corrispondenza della intensità sotto il punto di vista di un colore speciale. La sorgente terrestre ricca di raggi del crepuscolo da osservarsi deve esser mobile, e ottenuta una coincidenza, la distanza della sorgente luminosa dallo strumento deve servire di scala per conoscere i cambiamenti. A tale scopo è necessaria la scelta di una luce invariabile. Tale potrebbe essere p. e. il platino incandescente o una lampadina elettrica di quelle ad uso microscopico, di cui per mezzo di un amperometro è commensurabile l'energia e per mezzo di un reostato è sempre riducibile a grado tipico e fisso.

Le osservazioni dovrebbero recare la data con la depressione del sole sotto l'orizzonte nell'ora in cui si osserva il crepuscolo.

Lais, P. G. – *Presentazioni diverse*:

Il Vice Segretario presentò oltre alla memoria del Prof. Ragona le seguenti note inviate dall'autore socio corrispondente E. Catalan: 1. *Notes sur la théorie des fraction continues et sur certaines séries*; 2. *Sur quelques développements de sin* nx *et de cos* nx; 3. *Sur un théorème d'Abel*; 4. *Généralisation d'une propriété des surfaces du deuxième ordre, par Jamet ecc., Rapport de M. Catalan.* Presentò in fine tutte le opere e i periodici venuti in dono o in cambio all'Accademia.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Ordinari: Conte Ab. Francesco Castracane, Presidente. – Prof. M. Azzarelli. – Comm. C. Descemet. – Ing. A. Statuti. – Ing. G. Olivieri. – Prof. G. Tuccimei. – P. F. S. Provenzali. – P. G. Foglini. – D. B. Boncompagni. – P. G. Lais, Vice-Segretario.

Corrispondenti: P. G. Egidi.

Aggiunti: Prof. Bonetti. – Prof. Persiani. – March. L. Fonti.

L'Accademia apertasi legalmente alle ore 3 3/4 p. venne chiusa alle 6 p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Actas de la Academia Nacional de ciencias en Córdoba.* — T. V. — Entr. 1. — Buenos Aires, 1884, in-4°
2. *American Journal of Mathematics.* — Vol. VI. — N. 3. — Baltimore, 1884, in-4°
3. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXI, 1883—84, — Serie terza — Transunti — Vol. VIII. — Fasc. 5, 6.

4. *Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli.* — Napoli, 1883, in-4.°
5. *Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.* — T. II. — Serie VI. — disp. 1, 2. — Venezia, 1883—84, in-8.°
6. BACHMETIEFF (B. E). — *Meteorologische Beobachtungen ausgeführt am Meteorologischen Observatorium der Landwirthschaftlichen Akademie bei Moskau.* Moskau, 1883, in-4.°
7. *Bulletin astronomique et météorologique de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro.* — Octobre 1883, n.° 10. — Rio de Janeiro, 1883, in-4.°
8. *Bullettin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou.* — A. 1882. — n.° 3, 4: 1883, n.° 1, 2. — Moscou, 1883, in-8.°
9. *Bullettino della R. Accademia medica di Roma.* — A. IX. — n. 7. — Roma, 1883, in-8.°
10. CATALAN (E.) — *Notes sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries.*
11. —— *Sur quelques développements de sin* nx *et de cos* nx.
12. —— *Sur un théorème d'Abel.*
13. —— *Généralisation d'une propriété des surfaces du deuxième ordre, par Jamet, etc.* Rapport.
14. FAVARO (A.) — *Norme di costruzione per aumentare la resistenza degli edifizi contro il terremoto.* — Venezia, 1883, in-8.°
15. *Jornal des sciencias mathematicas e astronomicas.* — Vol. III. — Coimbra, 1881, in-8.°
16. *Journal de la Société physico-chimique russe.* — T. XVI. — n.° 1. — St. Pétersbourg, 1884, in-8.°
17. *La Civiltà Cattolica* — A. 36. — Serie XII. — Vol. V. — Quad. 809. — Firenze, 1884, in-8.°
18. MARRE (A.) — *Huit lettres inédites du P. Claude Jaquemet de l'Oratoire.* Rome, 1883, in-4.°
19. *Notice sur la carrière maritime, administrative et scientifique du Vice-Amiral De-Jonquières.* Paris, 1883, in-4.°
20. PEPIN (P.) — *Sur le problème de former un carré en ajoutant un cube à un nombre donné.* — Bruxelles, 1882, in-8.°
21. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — *Partie littéraire.* — II^e^ Série, T. XIX, XL^e^ de la Collection, II^e^ livraison. — Février. — Paris, 1884, in-8.°
22. —— *Partie technique.* — II^e^ série. — T. X^e^ — XLII^e^ de la collection. — II^e^ livraison. — Février. Paris, 1884, in-8.°
23. RAGONA (Prof. D.) — *Sui crepuscoli rossi dell'autunno 1883 e dell'inverno 1883—84.*
24. *Rendiconto delle tornate dell'Accademia di scienze morali e politiche.* — Società Reale di Napoli. — A. XXII, 1883. — A. XXIII, Genn. 1884. — Napoli, 1884, in-8.°
25. *Report of Progress for 1880—81—82.* — *Maps to accompany Report of Progress, etc.* — Montreal, 1883, in-8.°
26. *Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte.* — Jah. VI. — Heft I—IV. — Stuttgart, 1884, in-8.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE V^a DEL 6 APRILE 1884

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

COMITATO SEGRETO

L'Accademia tenne adunanza in Comitato Segreto occupandosi soltanto di affari dell'Accademia e di proposte di nuovi soci corrispondenti da eleggersi nella successiva seduta.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Conte Ab. Francesco Castracane, Presidente. – P. G. Foglini. – P. G. S. Ferrari. – Comm. C. Descemet. – Dott. M. Lanzi. – Cav. G. Olivieri. – P. F. S. Provenzali. – Prof. F. Ladelci. – Prof. G. Tuccimei. – P. G. Lais. – Dott. D. Colapietro. – Prof. M. S. De Rossi, Segretario.

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE VIa DEL 20 APRILE 1884

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE
DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

LA FORMA DELL'ENDOCROMA NELLE DIATOMEE
OSSERVAZIONI

DEL DOTT. MATTEO LANZI

Nello studio delle Diatomee viventi in acqua dolce o marina, mi si offersero alcuni fatti relativi alla diversa forma, che può assumere l'endocroma ne'frustuli di una medesima specie, quali credo opportuno qui riferire. E ciò intendo di fare, mosso soltanto dal desiderio di richiamare l'attenzione dei diatomologi su tale argomento; affinchè questi riscontrando i fatti medesimi, od avendo occasione di esaminarne altri consimili; possano in virtù dei loro studi meglio diretti dei miei, mettere in sodo la verità, e recare un maggiore vantaggio alla scienza.

La mutabilità della forma dell'endocroma nello interno di un frustulo di diatomea, non è cosa nuova; poichè oltre alle mie osservazioni, quelle già eseguite da altri molto tempo innanzi, lo dimostrano a sufficienza. Kützing infatti scrisse (Bacill. p. 22) « Der Organische Inhalt der Chieselschale be-
» steht aus einen gelbbraun gefärbten Substanz, welche unter der Mikro-
» skop oft goldgelb erscheint. Sie ist anfangs fast überall homogen, wird
» später körnig, und zertheilt sich in mehrere Lappen, oder zieht sich auch
» wohl in eine grosse oder mehrere kleinere Kugeln zusammen. Die Entwic-

» kelung und Vertheilung dieser Substanz ist nicht bei allen Gruppen gleich, » aber die zu einer und derselben Gruppe gehörigen Formen zeigen in der » Entwickelung dieser innern Substanz eine grosse Uebereinstimmung ». Da ciò chiaro apparisce che, lo essere l'endocroma omogeneo e lamellare, ovvero diviso in piccole masse, granulare e simile a cocchi, è fatto subordinato alla età del frustulo stesso; benchè vi sia, come egli nota, una certa costanza di forma e di disposizione a seconda dei diversi gruppi naturali di diatomee.

Prima però di esporre le cose da me vedute rispetto alla mutabilità delle forme dell'endocroma in una medesima specie quali vennero annunciate dal Kützing; credo eziandio dovere ricordare che, già il Pritchard (History of Infusoria) alla tavola XIII^a^ fa chiaramente vedere le figure della *Synedra fulgens* e della *Rhoicosphenia curvata,* con endocroma indubitabilmente suddiviso in tante piccole masse uniformi; nella Tavola XII^a^ quelle della *Cocconeis finnica* e della *C. oceanica* e di un *Himantidium* pure con endocroma granuloso; ed in fine la *Homoecladia* (Nitzschia) *moniliformis* parimenti con endocroma configurato e disposto in siffatta guisa nella Tavola XIV^a^; abbenchè vengano tutte designate come appartenenti a generi, che hanno l'endocroma lamellare, e quale infatti lo hanno nella fase di vegetazione. Per contrario nella stessa Tavola XIV^a^ vi si scorge manifestamente la *Fragilaria capucina* con endocroma sì lamellare, che granuloso; sebbene il genere *Fragilaria* sia stato riposto fra le Diatomee Coccocromacee. Credo non sia lecito dubitare della precisione ed esattezza delle figure riprodotte da Pritchard, onde ritenere che siano errate; come non è lecito muovere lo stesso dubio sopra quelle del R. W. Smith, il quale pure ci fa vedere nelle tavole B e C posta in fine del 2° volume le figure della *Synedra radians* e del *Cocconema cistula* (fig. IV e V.) nella fase di moltiplicazione con endocroma suddiviso in piccole masse. Così ancora portando lo sguardo sulla *Scoliopleura Peisonis* delineata dal P. Rabenhorst nella figura 54. *d.* ed *e* della *Flora Europea Algarum,* si vedono i frustuli i quali contengono endocroma diviso in più feoleuciti o porzioni colorite. Ed in fine ricercando fra le figure del Kützing (Bacill.) quantunque eseguite con minore accuratezza delle precedenti; pure vi ritroviamo non pochi casi consimili a quelli testè allegati.

Il distintissimo diatomologo Conte Ab. Francesco Castracane ne'suoi scritti ha splendidamente trattato un tale argomento, ed io stesso in una nota sul Tallo delle Diatomee, pubblicata negli Annali della Società Belga di Micro-

scopia, Tomo IV° già palesai di avere veduto lo endocroma granuloso nello interno di alcuni frustuli di *Epithemia ventricosa* Ktz., di *Cymbella cistula* Hemp., e di *Gomphonema olivaceum* Ktz. Ora a quelli mi piace di aggiungere altre osservazioni con la speranza che altri si compiacciano di riscontrarli, per lo meno in quelle specie, che ora vado a nominare, ripetendo successivamente ed a più riprese le osservazioni stesse, onde sorprendere i frustuli nelle diverse fasi di evoluzione, o per dirla più semplicemente in età diverse. Ed a maggiore chiarezza premetto pure che, nel giudicare un endocroma granuloso, mi sono ben guardato dal confondere i corpuscoli o brani di vero endocroma colorato, i quali più spesso sono fra loro identici nella forma, nella grandezza, e nella distribuzione a distanza presso che eguale nello interno del frustulo; con altri corpuscoli privi di colore, più densi e rifrangenti maggiormente la luce, denominati *pirenoidi* da Schmitz; come ancora dalle goccioline oleose anch'esse scolorate e lucenti, le quali sogliono eziandio mostrarsi di varia grandezza e crescere di numero nella età anche più inoltrata del frustulo, quando cioè l'endocroma e l'intero protoplasma tende meglio a decomporsi, anzichè a dividersi in piccole masse.

Ciò premesso, vengo ora ad esporre quanto mi fu dato scorgere, in una serie di ripetute osservazioni, su alcune di quelle diatomee; che sogliono mostrare il loro endocroma lamellare, omogeneo, e quale venne esattamente descritto e figurato dai Signori Phitzer, Borscow, e Petit. In alcuni frustuli di *Synedra ulna* Rab. e nelle sue varietà *aequalis*, *splendens*, e *mesolepta* l'endocroma, a differenza degli altri era diviso in tante piccole masse uniformi, distribuite ad eguale distanza fra loro lungo l'asse maggiore. E debbo ancora notare che in tali frustuli il cingolo era in pari tempo più largo che negli altri, indizio non dubio di un accrescimento della intera massa plasmatica e di una pressione che questa esercitava dallo interno e contro le valve, tendente ad allontanarle. Una simile disposizione dello endocroma mi si fece eziandio vedere in altri frustuli propri ad altre specie di diatomee. Sono esse la *Nitzschia linearis* W. Sm., la *N. palea* W. Sm., la *N. birostrata* Grun. la *Cymbella affinis* Ktz., l'*Achnantes exilis* Ktz., la *A. brevipes* C. Agard, la *Cocconeis scutellum* Ehrn., la *C. pediculus* Ehrn., il *Gomphonema capitatum* Ehrn., il *Pleurosigma rigidum* W. Sm.

Per contrario in altri frustuli appartenenti a Diatomee già distinte col nome di coccocromacee, più volte ho osservato avere esse l'endocroma omogeneo, privo di ogni apparenza granulare, ed in tutto simile a quello ve-

duto nella prima età delle specie ora indicate. In siffatta guisa lo rinvenni senza doverne in alcun modo dubitare nella *Fragilaria construens* Grun., nella *Fr. capucina* Desmaz, nel *Diatoma vulgare* Bory, nella *Cyclotella Kützingiana* Thw., nella *Melosira varians* Ag. e nella *Melosira distans* Ktz. In una raccolta eseguita nel Golfo di Napoli in prossimità di Posilipo in molti frustuli di *Licmophora* (Podosphaenia) *Jurgensii* C. Ag. osservai che l'endocroma era rappresentato da una piccola placca omogenea di forma cuneata con angoli arrotondati, la quale occupava la parte mediana del frustulo. In altri questa era divisa in due metà da una fessura longitudinale, che lasciava nel mezzo della valva uno spazio più o meno largo, occupato da protoplasma incolore e jalino. In altri la lamella era suddivisa in quattro porzioni mediante una nuova scissione trasversale, in altri in otto, e così di seguito in numero maggiore, fino al punto di mostrare tanti granuli o cocchi di forma arrotondata, di numero variabile e sparsi nella intera cavità del frustulo. In altra raccolta fatta a Palo, mi si fecero vedere serie continue e disposte a catenella, formate dalla *Bidulphia pulchella* Gray, delle quali ciascun frustulo, mentre manteneva un movimento di rotazione placida e puramente individuale sul proprio asse maggiore, conteneva un endocroma affatto omogeneo, quale altre volte riscontrai pure nelle giovani *Amphitetras antediluviana* Ehrn. e nei *Rhabdonema adriaticum* ed *arcuatum* Ktz.

Così ancora taluni frustuli di *Coscinodiscus excentricus* Ehrn., di *Röperia tesselata* Grun., ritrovata nel mare di Sorrento, mi mostrarono l'endocroma formato da una lamella discoidale interposta alle valve in modo da occuparne la intera superficie; e mentre in alcune volte nel *Coscinodiscus minor* Ehrn., raccolto a Palo ed a Civitavecchia l'endocroma era disposto nella stessa guisa dei precedenti, in altre si mostrò diviso in due porzioni semicircolari, parimenti lamelliformi, omogenee, opposte fra loro nel lembo concavo e spinte con quello convesso verso il margine delle valve; in altre in fine suddiviso in tanti brandelli, che avendo preso la forma di cocchi, vedevansi sparsi nello interno dei frustuli e tenuti divisi da plasma jalino. Finalmente alcuni frustuli di *Asterolampra Grevillii var. adriatica* Grun., rinvenuti nel Golfo di Napoli, ottenuti e meglio osservati una seconda volta nel mare di Terracina, avevano il loro endocroma rappresentato da un dischetto lamellare, omogeneo, e situato nel centro delle valve, il cui diametro raggiungeva la quarta parte circa di quello dell'intero fru-

stulo, che nel rimanente mostrava il suo contenuto privo di colore e jalino.

Dopo avere brevemente esposto queste poche osservazioni, non viene, a mio credere, da esse menomamente infermata la importanza degli studi dapprima fatti sulle diverse forme e disposizione dello endocroma nello interno dei frustuli, e proprie ai singoli generi e famiglie di Diatomee, nè tampoco diminuito il vantaggio recato alla scienza dagli illustri diatomologi Signori Phitzer, Borscow, P. Petit, e da altri ancora, i quali per i primi ce ne dierono esatto conto. Tuttavia non piacendomi allargare il campo delle mie conclusioni, credo poterne dedurre che, per lo meno nelle specie da me nominate, come affermò il Kützing, la forma e disposizione dello endocroma siano variabili a seconda delle diverse età dei frustuli stessi.

Coordinando poi questi fatti con quelli veduti da altri, che di sopra ho già indicato, a me sembra frattanto potersi ammettere qualora fossero anche meglio confermati da studi ulteriori, che nelle Diatomee oltre alla scissione simmetrica o bipartizione, alla formazione delle Ausospore, che sembra essere un atto apogamico, alla genesi di oospore consecutiva alla conjugazione, che è quanto dire ad un atto di fecondazione isogamica; possa eziandio avvenire un altro modo di moltiplicazione sia per scissione delle feoleuciti, sia per libera formazione di cellule, che in seguito divengono spore agame nate per endogenia.

Infatti allorchè l'endocroma dapprima lamellare diviene granuloso, e ciascun granulo si riveste di una membrana sottile o dentro il frustulo stesso o dopo la sortita o deiscenza del medesimo, noi vediamo ciò avvenire nel modo più semplice, senza alcun atto precedente che accenni ad apogamia od a fecondazione isogamica, e senza una primitiva comparsa di alcun organo speciale, che indichi la nuova formazione di uno o due sporangi, come sono stati osservati in alcune specie di diatomee. Invece il fenomeno di cui tengo parola non saprei riferirlo ad altro, fuorchè ad una semplice moltiplicazione di cellule, che diventano spore. E tantoppiù ritengo che debba considerarsi sotto un tale aspetto, poichè anche in questo caso si vede il cingolo cresciuto in larghezza, come si osserva negli altri modi di moltiplicazione e di riproduzione, e quale effetto della accresciuta massa del protoplasma, il quale prima di dividersi e di andare a fare parte integrante delle nuove cellule figlie, deve esercitare, come la esercita, una pressione sulle due valve della cellula madre, le quali non potendo sem-

pre seguire il suo rapido accrescimento, è necessario che vengano per tale cagione allontanate.

Non posso dire di avere avuto la fortunata occasione di vedere in atto la deiscenza del frustulo, nè di avere assistito alla uscita delle nuove spore, come sembra che l'abbia avuta il Kützing per la *Melosira* e come la ebbe certamente il Conte Castracane per la *Podosphenia*. Sono essi fatti già noti nella scienza. Però dopo quelli da me riportati nella nota « Sul Tallo delle Diatomee » riferibili al *Gomphonema olivaceum* Ktz., alla *Epithemia ventricosa* Ktz., alla *Cymbella* (Cocconema) *cistula* Zlemp., posso ora aggiungere di avere veduto in altre specie ancora, e nella fase di loro sviluppo il più attivo, frustuli accresciuti di volume, con cingolo più largo di quello che lo fosse negli altri consimili, e con endocroma suddiviso in più feoleuciti minori; masse di protoplasma o tallo amorfo (Mucus matricalis) il quale già venuto fuori dalle cellule madri, teneva tuttora incluse cellule figlie, cioè spore e nuovi frustuli minutissimi a diverso grado di vegetazione primitiva. Fra le altre citerò una *Navicula* raccolta in Ostia, la cui massa fuori uscita conservava ancora quella forma ritenuta quale genere autonomo, cui fu dato il nome di *Phlictenia*. Una *Amphora ovalis* la quale pure presentò le stesse fasi di numerosa moltiplicazione e di evoluzione, senza precedenti fasi di fecondazione isogamica o di copulazione apogamica. In fine anche in questo anno raccolsi una massa di muco jalino, addossata ad altre alghe filamentose, che la curiosità mi spinse ad osservare al microscopio. In questa riscontrai una considerevole quantità di corpuscoli granulari coloriti, ossia spore, e di frustuli di *Nitzschia* tanto minuti da non comunicare alcun apparente coloramento al protoplasma che li accoglieva; nè la loro picciolezza permetteva il potere stabilire a quale specie appartenessero. Trascorsi due giorni, la massa mucosa mostrò all'occhio nudo di avere acquistato un colore, dovuto ai molti frustuli di *Nitzschia palea*, che vi stavano dentro maturi e mobili.

Da questa serie di fatti sembra risultare che nelle Diatomee oltre ai modi già conosciuti di moltiplicazione e di riproduzione, ve ne ha un altro ancora, a mio credere, tanto più ovvio e frequente, quanto meno messo in chiaro dagli scrittori di botanica crittogamica; il quale consiste nella moltiplicazione per mezzo di spore agame variabili nel numero e nate per endogenia, analogamente a quanto accade in alcune altre alghe e nei funghi ascosporei.

PROGRESSI DELLE APPLICAZIONI DELLA ELETTRICITÀ ALLA ESPOSIZIONE INTERNAZIONALE DI VIENNA

NOTA

DI MONSIG. GIUSEPPE PROF. BUTI

Fra le varie forze delle quali oggi il mondo si serve, non ce n'è alcuna che tali e tanti servigi abbia reso e renda ognora, come l'elettricità. Essa trasporta in un istante il frutto dell'umano pensiero a distanze incalcolabili, essa ci illumina, ed in mille altri modi si presta, con pieghevolezza straordinaria a gran parte delle necessità della vita civile. Ma non è tutto; l'elettricità è ancora bambina nel suo sviluppo; noi abbiamo bisogno tuttavia di molto studiarla, di non arrestarci al cospetto di qualsiasi difficoltà e di concorrere, ciascuno per quanto egli può, al progresso di lei.

Tale ultima idea appunto mi ha mosso a parlarvi oggi di alcuni apparecchi, di quelli cioè che nell'ultima Esposizione di elettricità in Vienna, maggiormente hanno fermata la mia attenzione. Incoraggiato inoltre da due stimoli: la fiducia che Sua Santità papa Leone XIII con estrema benignità mostrava d'avere in me, inviandomi a studiare i più recenti progressi della scienza, che nelle sale eleganti della mostra Viennese esponeva i suoi miracoli, ed il desiderio di dirvi, come in coscienza sento di potere, che l'Italia nostra, la patria del Volta e del Galilei, non è, come si vorrebbe far credere, nemmeno oggi seconda ad alcun'altra nazione, nell'invigilare, seguire e spingere ogni ramo del sapere.

Ed a provar ciò, basterebbe che io vi ricordassi, o Signori, il nome di Giuseppe Ravaglia, prete Ravennate, il quale, continuando la nobile tradizione che nel medio evo legava la scienza al cenobio, attende con i suoi lavori a far rispettato il nome dell'Italia presso gli altri popoli, come ha fatto splendidamente nell'Esposizione di cui ho proposto di parlarvi.

Ed intanto? – Intanto noi che dovremmo essere gelosi custodi delle glorie nostre, illusi spesso da vane parvenze, corriam dietro alle larve, dimenticando la vera e salda scienza e coloro che se ne fanno ministri.

Nessuno, (cosa questa, permettete che lo dica, possibile solo in Italia), si è brigato di parlar di lui e delle sue cose; quindi è che m'è parso, quasi sentir la voce intima della patria, mostrando le sue glorie sparse, esclamare con frase dantesca: *Raccoglietele al piè del triste cesto*, ed innanzi tutto ho creduto doveroso parlarvi dei tre apparecchi da lui esposti,

l' avvisatore degli incendi, *la serratura elettrica* e *l' idrometrografo elettrico*.

E per entrare subito in materia cominciando dall'*avvisatore*, sento che alcuno potrebbe dirmi, non essere questo il primo tentativo d'istrumento di tal genere. Ciò è vero, ma Voi, Signori, sapete benissimo quanto fossero imperfetti e poco utili gli apparecchi precedentemente trovati, per la pecca o di poca sensibilità o di troppa, causa spesso quest'ultima, specialmente nei teatri, di un timor panico fuor di tempo, il quale se non produce i danni di un incendio, può esser cagione di molte disgrazie.

L'istrumento del Ravaglia, ovviando con la sua precisione a tal pecca, si può adunque dire l'unico realmente pratico ed applicabile. Esso non è altro che un termometro di Leslie pochissimo modificato, tanto poco che si potrebbe opporre, non esser questa di cui parlo una novità. È proprio il caso dell'uovo di Colombo; era facile il modo di farlo star dritto, ma nessuno l'aveva trovato. Prendete uno di quei termometri, surrogate nel tubo orizzontale e nei due bracci il liquido colorato col mercurio, introducete nelle due sfere due fili di platino, i quali ambedue comunichino per una delle estremità con due conduttori elettrici, e con l'altra, uno peschi nel mercurio, l'altro si fermi a due o tre millimetri dal suo livello, vestite la sfera, nella quale il platino non tocca il mercurio di una sostanza che mal conduca il calore, ed avrete fatto l'*avvisatore elettrico* del Ravaglia. L'apparecchio è semplice; semplicissima ne è anche la funzione. Sviluppatosi il fuoco in qualsiasi parte di un teatro, l'avvisatore essendo situato in modo da incontrare la corrente calda, avverrà che l'aria contenuta nella sfera, nella quale il mercurio è a contatto col filo di platino, si dilaterà più di quella contenuta nell'altra, che, rivestita di una sostanza isolatrice, meno sente gli effetti del calore.

Essa perciò farà pressione sul mercurio, che sarà necessariamente costretto a salire nella seconda sfera, toccando il filo di platino e facendo quindi agire la suoneria elettrica, perchè in questo modo si stabilisce la comunicazione tra i due fili, cui fanno capo le due verghette di platino, i quali fili comunicano col rocchetto dell'elettromagnete del campanello.

Quest'apparecchio, ripetute volte provato, ha sempre agito con grande soddisfazione degli osservatori: ed io credo che risultati migliori se ne otterrebbero, coprendo di negrofumo la sfera, in cui il filo di platino è in contatto col mercurio, poichè in tal maniera si otterrebbe un potere assorbente maggiore e l'apparato sarebbe molto più sensibile.

Il grande incendio del Ring-Theater di Vienna, quello appunto che, avendo fatto strage di tante vittime, mosse gli scenziati a trovar modo onde salvaguardare la vita umana nei luoghi, ove, come generalmente nei teatri, essa, per la forte illuminazione necessaria, è in continuo pericolo di esser preda del fuoco; quello, che spinse il Ravaglia negli esperimenti, dei quali il descritto apparecchio è uno degli effetti, gli suggerì anche la *serratura elettrica*, d'utilità pari e forse maggiore dell'avvisatore.

Essa si compone di un robusto catenaccio, il quale portato da una forte molla tien chiusa la porta con tre leve, così mirabilmente disposte, che la loro forza è diminuita di 25000 volte e più. Tale diminuzione di forza era necessaria per rendere sufficiente al bisogno della serratura un piccolo elettromagnete; tanto che impiegando solo sei pile Leclanchè, viene attratta un'ancora per mezzo della quale, quand'essa è nelle circostanze ordinarie; son tenute ferme le leve ed il catenaccio resta chiuso. Quando poi l'àncora, a causa della trazione, si sposta, le leve cadono, la molla scatta e la porta si apre automaticamente.

In questo modo non una porta solamente, ma 10, ma 15 possono contemporaneamente aprirsi, solo che la persona messa a guardia dell'avvisatore si dia la briga di spingere il bottone elettrico, per mezzo del quale si comunica la corrente all'elettromagnete. E inutile ch'io vi dica, dover essere tanto maggiore il numero delle pile, quanto maggiore è il numero delle porte, per vincere in tal modo la resistenza dei fili conduttori. Nella funzione di questo apparecchio s'affacciava però una difficoltà. La gente affollata dietro la porta, potrebbe con la pressione e con l'attrito far si che la molla non fosse sufficiente a fare scorrere il catenaccio. Il Ravaglia, facendo l'angolo d'inclinazione del catenaccio stesso eguale al coefficiente d'attrito del ferro, ha sciolto sapientemente anche tale difficoltà.

L'inventore di questo apparecchio non si è tuttavia fermato a ciò; trattandosi di cosa delicatissima, della vita umana, ha voluto essere estremamente scrupoloso e prevedere anche il caso, nel quale o fortuitamente o per frode il filo conduttore fosse rotto. Egli quindi nel circuito principale ha introdotto un galvanometro, nel quale l'ago è deviato dalla sua posizione di equilibrio della corrente di un'altra pila, corrente che circola ancora pel filo dell'elettromagnete delle serrature e pel filo principale, con un' azione però così debole che le àncore non la risentono. Se un'interruzione per qualche causa, si verificasse nel filo, l'ago del galvanometro, tornando alla sua posizione di equilibrio, farebbe pescare una delle sue

estremità in una vaschetta contenente mercurio, ed in questo modo si chiuderebbe un circuito, di cui fa parte un filo che mette capo nell'elettromagnete di un campanello, il quale, suonando continuamente renderebbe avvisati di tale interruzione.

Ma non è prevedibile, direte Voi, che in ogni teatro ci sia una persona tanto pratica nell'uso dell'elettricità, da poter comprendere, dì per dì, se la forza sviluppata dalle pile sarebbe da tanto da fare agire, in caso di bisogno, l'apparecchio delle serrature.

È verissimo ed il Ravaglia ha pensato anche a ciò, costruendo una bilancia, ad una delle estremità della quale è situata un àncora attratta da un elettromagnete. Questa alla sua volta comunica per mezzo di un conduttore con le pile che servono alle serrature; ha quindi la medesima forza degli elettromagneti che agiscono in esse; all'altra estremità della bilancia è appeso il piatto, nel quale si può situare un peso che equivalga alla resistenza dell'àncora. Se l'elettromagnete fa valere la sua forza di trazione anche quando tal peso è nel piatto, si comprende facilmente, che l'elettricità sviluppata dalle pile basterà a fare agire l'apparecchio delle serrature.

L'ultimo trovato, del quale ho promesso di parlarvi, l'*idrometrografo elettrico* dello stesso Ravaglia, non cede in importanza agli altri ed è destinato a recare utilissimi vantaggi; poichè se i vari idrometrografi sinora adoperati, o fatti a diagramma o a quadrante, servono solo ad indicare, a chi immediatamente li osserva, il livello di un corso d'acqua qualsiasi, questo inventato del Ravaglia, dando segni alla Morse, automaticamente, non ha bisogno di un impiegato che lo invigili e può essere legato per mezzo di un conduttore alla rete telegrafica. In tal modo situando l'istrumento sopra ciascuno dei fiumi più importanti e più soliti a mutare il livello delle proprie acque si potrà avere esatta notizia dell'aumento e della diminuzione di esse telegraficamente, e prendere quindi le misure convenienti.

Nè si creda che per ottenere tal risultato il Ravaglia abbia dovuto valersi di un apparecchio molto complicato, tutt'altro. Egli si serve di un galleggiante, il quale è sostenuto da una corda che si avvolge sopra la periferia di una ruota. Questa, con un rocchetto dentato posto sul prolungamento del suo asse, mette in moto una grimagliera, che necessariamente segue le vicende del galleggiante, e fà scorrere un suo indice sopra un cilindro mosso da un macchinismo comune di orologeria. Il cilindro è rivestito di alcune laminette di metallo, le quali, venendo a contatto con l'indice della grimagliera, lasciano il passaggio alla corrente che fa agire

l'apparato ricevitore. In tal modo si dà notizia di tutto alla stazione tecnica ed a qualsiasi altro ufficio telegrafico ove trovasi l'avvisatore. Questo consiste in un semplice elettromagnete, che, stabilita la corrente dell'idrometrografo per l' incontro dell'indice della grimagliera con le lamine del cilindro, attira un'ancora e fa scattare in tal modo una piastrina a molla. Allora premendo un tasto, che fa parte dello stesso avvisatore si ha il dispaccio.

Alla stazione di arrivo trovasi anche un apparato che ogni quarto d'ora per mezzo della stessa corrente, ripete l'indicazione. Esso è semplicissimo, e consta, di una leva che periodicamente mossa da un orologio, chiude il circuito.

Questi lavori del Ravaglia, Illustri Signori, erano più che sufficienti a mantenere alto il nostro nome nella mostra Viennese. In essa il genio italiano ha mostrato ancora una volta la qualità che lo caratterizza e lo distingue, un occhio franco e sicuro, un cammino tendente sempre a risultati utili. E chi infatti, o Signori, potrà negare l'utilità grande e vera di questi apparecchi? L'acqua ed il fuoco, i due elementi più necessarî alla nostra vita, possono a volta rendersi causa di ruine e di morte; l'illustre sacerdote Ravennate si è sforzato di trovare le armi, con le quali l'uomo potrebbe combattere quegli elementi, quando da causa di benessere si mutano in apportatori di strage, e gli sforzi di lui furono coronati da felice successo.

Ora è tempo che io passi a farvi noto un'altro apparecchio: parlo della ruota fonica, ciò che per ultimo mi sono oggi proposto, abusando forse della vostra attenzione. Prima però ho il debito di aggiungere, che anche l'Amministrazione dei Telegrafi del Regno d'Italia esponendo materiali di costruzione nostra, e specialmeute le sue pile, gli apparati scientifici per le misure elettriche, i vari telegrafi, e fra gli altri quello dell'Hugues modificato dal Ferrero, le stazioni Morse a circuito aperto o chiuso e da campagna ed il *duplex* secondo il sistema del Vianisi, del Mattioli e del Francesconi arricchivano di utilissimi apparecchi la nostra sezione.

Uscendo dal campo assegnato alla patria nostra credo debito di giustizia parlare di un'altra invenzione, a parer mio, fra le più importanti dell'Esposizione Viennese. Questa è dovuta alle pazienti ricerche di un professore di Copenaghen il chiarmo Signor La-Cour.

Egli aveva già osservato con sorpresa la uniformità ed invariabilità mi-

rabile che presentano le correnti intermittenti prodotte dalle vibrazioni di un diapason, e pensò di utilizzare questa proprietà costruendo una *ruota* che potesse esser messa in movimento uniforme e determinato dalle correnti stesse.

Noterò dopo l'utilità grande di questa macchina, che l'autore chiamò *ruota fonica*,, parlando delle moltissime applicazioni che può avere; ora voglio esporre i primi risultati che il Sig. La-Cour seppe ottenere dalle sue diligenti ricerche e comincerò dalle correnti fono-elettriche.

Sarebbe inutile che io spiegassi a questo colto uditorio in quanti modi può costruirsi un ponte intermittente; basta il dire che il Sig. La-Cour ottenne il suo, ponendo un contatto in presenza di un diapason, in modo che a ciascuna vibrazione si stabilisce una comunicazione tra il primo e il secondo. Se questo ponte intermittente viene introdotto in un circuito costituito da una sola pila, e che non abbia alcuna resistenza d'induzione, la corrente elettrica intermittente che verrà a formarsi, prenderà la forma di linee spezzate rettangolari: mentre invece introducendo qualche resistenza di induzione, ovvero ponendo diversamente i contatti, la corrente prenderà forma diversa, che, se si volesse rappresentare graficamente, potrebbe essere indicata da linee curve. Ora due pile intercalate in due ponti in modo che l'una sia sorgente d'elettricità positiva, l'altra negativa, faranno sì che il corpo vibrante e il filo conduttore siano percorsi da una corrente fono-elettrica, ogni onda della quale è di segno contrario a quella che viene appresso.

Un elettromagnete introdotto ingegnosamente nel filo che conduce la corrente, le farà subire una notevole modificazione, perchè la corrente, appena sensibile quando il ponte rimane chiuso, crescerà e verrà interrotta prima che essa sia giunta al massimo della forza.

Qualora la corrente fono-elettrica debba essere impiegata come corrente costante si può ottenere la più grande energia intercalando fra le spire dell'elettro-calamita uno *shunt*, del quale la resistenza sia eguale a quella del filo dell'elettro-magnete, e per questo filo la scintilla sarà allontanata dal ponte. Rimarrà la scintilla della pila; ma adoperandosi pile Lalande essa sarà tanto debole da non recare quasi alcun inconveniente.

Però dovendo la corrente conservare il proprio carattere di *fonica* lo *shunt* deve essere intercalato nel ponte intermittente e in tal guisa servirà di conduttore alla scintilla d'induzione e a quella della pila. Il La-Cour pone ordinariamente lo *shunt* nel sostegno stesso dell'apparato avvolgendolo

con le bombine d'un reostato, e così può rendere quasi nulla la sua resistenza d'induzione.

I risultati ottenuti dall'egregio professore nelle molte esperienze da lui fatte sopra le correnti fono-elettriche vengono dal medesimo formulate nel modo seguente a guisa di leggi:

1° Introducendo una corrente fono-elettrica in una elettro-calamita, il diapason vibrerà, purchè sia all'unisono della corrente fono-elettrica; se al contrario il diapason differisce fino a 1 vibrazioni per secondo si avranno vibrazioni più deboli, e non se ne avranno se la differenza aumenta.

2° Un diapason messo in vibrazione da una corrente fono-elettrica eseguisce esattamente una vibrazione per onda.

3° Un diapason più acuto della corrente fono-elettrica che lo fa vibrare può avanzare fino a $\frac{1}{2}$ vibrazione un diapason all'unisono con la corrente, e quest'ultimo può avanzare altrettanto un altro più grave.

4° Diminuisce il numero delle vibrazioni avvicinando i poli del diapason o rinforzando la corrente; aumenta rendendo i contatti più duri o avvicinandoli al diapason.

5° Si ottiene anche un numero minore di vibrazioni aumentando la temperatura del diapason.

Ed ora vengo alla descrizione di quell'apparato che le correnti fono-elettriche mettono in movimento, intendo dire la ruota fonica. È semplicissimo: consiste in una ruota dentata di ferro dolce. I denti vengono periodicamente attratti un dopo l'altro da un elettro magnete per cui passa una corrente fono elettrica, e per mezzo di questa non solo il primo potrà esercitare quelle periodiche attrazioni che metteranno la ruota in movimento; ma la ruota stessa rimarrà in equilibrio stabile sia quando è in riposo, sia quando si muove, e, molto più, quando percorre uno spazio eguale alla distanza che corre fra un dente e l'altro. Le esperienze del Signor La-Cour hanno confermato le sue previsioni, ed egli ha potuto accertarsi che la sua ruota, ricevuto mediante una corrente della specie accennata, un moto di rotazione, per cui ad ogni onda passi dinnanzi ai poli dell'elettromagnete un dente della ruota, questa conserverà tale moto, che bene a ragione vien detto *regolato*. Anzi se una causa esterna venisse a rimuovere la ruota da questo movimento regolato, la corrente fono-elettrica tenderà a ricondurvela. E se questa forza rimanesse costante, la ruota, conservando anche la sua velocità di rotazione, prenderà un'altra posizione di equili-

brio mobile, la durata della quale sarà più o meno lunga, secondo il valore della forza e la sua direzione rapporto al senso di rotazione.

Ma la velocità della ruota fonica può essere anche maggiore e, come dimostra il La-Cour, essa può restare in movimento con velocità che sono sottomultiple e multiple di quella che è più prossima al movimento regolato, e che possono essere anche eguali a $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$ della medesima. E queste ultime velocità sarebbero appunto quelle che avrebbe la ruota messa in movimento regolato dalle nominate correnti fono-elettriche delle quali il suono fosse più grave o più acuto d'una *quinta*.

La ruota fonica, se non viene disturbata da resistenze esterne, può anche crescere di velocità per causa di qualche resistenza interna, che sempre deve vincere; ma in questo caso il valore della forza motrice diminuisce colla durata dell'onda. Perchè, se le onde durano meno, incontreranno, come è chiaro, una più grande resistenza d'induzione nell'elettro calamita, epperciò si troverà il massimo di velocità che può acquistare una ruota di una data forma e di determinata forza d'attrazione. Dunque, dalla costruzione è dipendente il limite della velocità, e questa sarà maggiore, quando, come ha praticato l'egregio Sig. La Cour, in vicinanza della ruota calamitata che gira si porranno fili conduttori percorsi da una corrente d'induzione la cui resistenza aumenterà colla velocità.

Ma di tutto questo non si appagò il diligente scienziato e si diede a migliorare e perfezionare il suo apparecchio. Per togliere in gran parte le variazioni di velocità e rendere meno difficile il mettere la ruota in movimento regolato, egli vi applicò una capsula a mercurio. Non spenderò molte parole per provare che gli effetti che ne risultarono furono ben altro che un semplice aumento del momento d'inerzia; poichè se poniamo fuori della sua posizione d'equilibrio la ruota fornita della capsula a mercurio vedremo che essa si muoverà in modo diverso da quello che farebbe se il suo asse avesse il punto d'appoggio in un corpo solido. Infatti l'esperienza ha mostrato, che il mercurio accumulando in sè stesso la forza modera in modo sensibilissimo le oscillazioni della velocità.

Rimane mostrare la preziosissima qualità della ruota fonica che è il perfetto sincronismo. Se perciò, noi collochiamo più ruote, aventi lo stesso numero di denti, in guisa che tutte vengano tenute in movimento regolato da una stessa corrente fono-elettrica, la quale percorra in eguale spazio di tempo e successivamente le elettro calamite, sarà fisicamente impossibile che queste ruote non abbiano rotazioni perfettamente sincrone. Ed ora, o signori,

da questa qualità, come già dissi, preziosissima, ben si scorge che la ruota fonica può avere utili e svariate applicazioni; e di questo, o meglio, delle principali fra queste passo in ultimo a dare un brevissimo cenno. Quel che notai parlando dell'avvisatore degli incendi si verifica nei cronografi. Innumerevoli sono gli apparati a cui si diede il nome di *cronografi* e *cronoscopi*; ma nessuno rispose all'aspettativa, primo perchè tutti riuscirono più o meno inesatti, sia si ricorresse per regolare il movimento ai *volani*, sia ai *pendoli conici*, ecc.; secondo, perchè, causa la loro complicata costruzione, si guastano presto. Invece la ruota fonica, semplice come è, può servirci essa stessa di cronografo. Il professor La Cour, già più volte lodato, ha fatte molte esperienze per mostrare la regolarità con cui la ruota fonica fa girare un cilindro montato sul suo asse e ricoperto di carta, sulla quale in un modo qualunque sono indicati i tempi determinati. Da tali prove risulta che un *secondo* viene rappresentato da una lunghezza di $5{,}000^{mm}$ e che i punti segnati non potranno avere un errore maggiore di $0^{mm},2$. L'esattezza dunque di questo apparato sorpassa quella di tutti gli altri cronografi conosciuti; bisogna però avvertire che il suo movimento, come quello di tutti gli altri, può essere influenzato dalla temperatura, dalla densità dell'aria e da altre cause che facciano variare il numero delle vibrazioni del diapason, e conseguentemente la velocità della ruota.

Per questa ragione non si deve tralasciare, secondo che suol praticarsi con gli altri istrumenti dello stesso genere, di determinare il movimento del cronografo prima e dopo l'esperienza.

Ormai si dispera di recar perfezionamento essenziale ai cronometri ed orologi fabbricandosene incontrastabilmente di perfettissimi; ma in circostanze speciali potrebbe anche riuscir utile la ruota fonica, basata sopra un principio affatto diverso. Il La Cour perciò non ha tralasciato tale applicazione del suo apparato ed è riuscito a costruire istrumenti esattissimi, poichè il diapason può far l'ufficio di pendolo. Dal diapason infatti vengono determinate le onde della corrente, la quale mette la ruota fono-elettrica e le altre che ingranano con essa in movimento regolato. L'autore fa notare le seguenti particolarità della ruota fonica impiegata come orologio:

a) Le diverse parti dell'apparato possono venir collocate isolatamente e comunicare fra loro per mezzo d'un filo conduttore.

b) Si potranno applicare all'apparato parecchi contatori che funzionino in luoghi diversi per mezzo di una sola corrente, ed aver così indicazioni perfettamente *síncrone*.

c) L'indice dei secondi, ed anche un altro che abbia movimento più celere, gira sul quadrante equabilmente e senza scosse.

La ruota fonica può infine utilmente venire applicata a contare il numero delle vibrazioni del suono e ciò nella maniera più semplice. L'asse della ruota porta una vite perpetua che mette in movimento un contatore, il quale ha questo vantaggio, di poter seguire il sistema decimale o centesimale; in modo che la differenza tra due osservazioni dà direttamente il numero delle onde, che hanno percorso l'elettro magnete della ruota, nel tempo trascorso tra la prima osservazione e la seconda. Non fa bisogno che io dica che in simile esperienza differenti sono i processi che debbono adoperarsi dipendendo, come è chiaro, dalla differente specie dei corpi sonori di cui vuol misurare il numero delle vibrazioni.

Se il corpo su cui si esperimenta può per qualche tempo mantenersi in vibrazione, e in tal modo dar luogo a un ponte intermittente fra esso stesso ed un contatto, basterà semplicemente farlo traversare da una corrente fono elettrica, e così mettere in movimento il contatore. Con questo metodo per avere con la più grande precisione il numero delle vibrazioni sarà sufficiente osservare il contatore ed il cronometro prima e dopo l'operazione.

Nel caso poi che il corpo non avesse la proprietà indicata di sopra, il prof. La Cour si serve del seguente metodo, che è semplicissimo, e per la sua precisione deve essere preferito ad ogni altro.

L'apparato a diapason viene accordato col corpo sonoro, ma più basso o più alto di esso, affinchè i battimenti siano piuttosto lenti; quindi facendo muovere per mezzo dello stesso diapason una ruota fonica, fornita del proprio *contatore*, si potrà prestare orecchio al suono abbastanza forte del primo e nello stesso tempo contare i battimenti del corpo su cui esperimentiamo, se si ripeterà per parecchie volte l'operazione contando le vibrazioni durante lo stesso tempo si avrà un numero medio di battimenti, di cui l'errore non potrà essere che lievissimo. Per avere poi le vibrazioni del diapason basta osservare il contatore ed il cronometro al principio e alla fine dell'esperienza. In modo che, il La Cour ha calcolato, l'altezza di un suono debolissimo può essere misurato con un esettezza di 0,02 di vibrazione ogni secondo. Giova poi notare che con questo metodo il numero delle vibrazioni del corpo sonoro non è affatto turbato durante l'esperienza non seguendo esso alcun movimento meccanico. E quindi si potrà anche avere l'altezza di un suono debolissimo, il quale non potendo fare alcun lavoro meccanico non potrebbe in altro modo essere misurato. L'unità di misura non si riferisce (nè que-

sto è piccolo vantaggio) ad un diapason fissato, soggetto a cambiamenti per la temperatura e per altre cause conosciute; ma è determinata con un semplice numero. Infine nel corso dell'esperienza l'altezza del suono non dipende dall'invariabilità d'una corrente d'aria, nè dall'equabilità d'un attrito come nella *Sirena,* o come nella *Ruota dentata di Savart,* da un altro movimento. Perciò quel che non si è potuto ottenere con i metodi usati fino ad oggi può in non poca parte aversi coll'apparato del Sig. La Cour, il quale, a mio credere, potrà giovare specialmente a chiarire le leggi che determinano l'influenza della temperatura, della pressione atmosferica e delle altre cause note, sull'altezza di un suono.

Il Prof. La Cour ha impiegato il suo apparato anche come contatore di altri movimenti; ma io temo di aver già troppo abusato della vostra attenzione, e termino dando un breve cenno di quell'applicazione senza dubbio più utile nella pratica, voglio dire la telegrafia.

Il problema finora non risoluto di trovare apparati perfettamente *sincroni* per la telegrafia a impressione ed a trasmissione multipla, trova una soddisfacente soluzione nell'invenzione della ruota fonica. Potrebbe è vero citarmisi il sistema a trasmissione multipla del Gray che fu stabilito all'Esposizione Internazionale di Elettricità di Parigi nel 1881: ma permettetemi, o signori, di dirvi che se pure questo non viene superato dalla ruota fonica nella perfezione, lo è certamente nella semplicità, epperciò dal lato economico e scientifico preferibile.

Ecco dunque come il Sig. La Cour ha applicata la sua invenzione alla telegrafia. La ruota fonica provvista di trenta denti è racchiusa in un cilindro d'ottone che serve di sostegno, nella parte superiore di questo è fissato un anello d'avorio a cui sono attaccate sessanta piastrine metalliche eguali, equidistanti ed isolate tra loro. Altrettanti morsetti isolati da essi e corrispondenti sono stabiliti alla base dell'apparato e disposti in due ordini, in modo che le piastrine comunicano per mezzo di sessanta fili conduttori alternativamente con un morsetto dell'ordine inferiore ed uno dell'ordine superiore. Un contatto fissato sull'asse della ruota scorre sulla superficie levigata delle piastrine. Da un lato del sopporto è collocato l'elettromagnete, di guisa che, i poli di questo traversando il primo, la ruota viene messa in movimento regolato ogni qualvolta la corrente fono-elettrica percorre il filo del rocchetto. Dopo ciò vi sarà facile, o signori, immaginare in qual modo la ruota fonica agisca. Il tempo ne sospinge, ed io ho troppo sperato nel vostro compatimento per osare di aggiungere più parole.

COMUNICAZIONI

Statuti, Ing. A. – *Sulla Malacologia del Lazio*:

Il ch. sig. cav. prof. Augusto Statuti togliendo argomento da una nota sulla Malacologia fluviatile del Lazio, fatta dall'esimio naturalista francese sig. E. Droüet in una sua recente pubblicazione sulle Unionidi dell'Italia, espose alcune sue riflessioni sulla ricerca delle Naiadi nei laghi di Albano, Nemi, Bolsena, Bracciano, Martignano, Vico, Paola e Fogliano.

A stornare poi qualsiasi men retta interpretazione, a cui avrebbero potuto dar luogo alcune parole del ridetto illustre scienziato relativamente allo stato delle cognizioni scientifiche sulla Malacologia del Lazio, il disserente comunicò all'Accademia un importante corredo di documenti, all'appoggio dei quali si studiò di provare che fin da tempi remotissimi anche presso noi fu tenuto in onore lo studio delle scienze naturali, tra le quali fu sempre compreso anche il ramo concernente la Malacologia.

Tale lavoro e stato inserito nel 1° vol. delle *Memorie dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei.*

Castracane, Conte Ab. F. – *Presentazione di una nota*:

Il Presidente presentò all'Accademia da parte del socio corrispondente signor Adriano Certes una nota a stampa *Sur la culture, à l'abri des germes atmosphériques, des eaux et des sédiments rapportés par les expéditions du* Travailleur *et du* Talisman, 1882-83, *par* A. Certes.

Lais P. G. – *Presentazione di pubblicazioni*:

Il vice-segretario presentò da parte del socio ordinario ch. sig. Principe D. B. Boncompagni il *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni,* Tomo XVI, Giugno 1883: da parte del socio corrispondente sig. L. E. Bertin la seguente nota: *Sur le principe des navires à flottaison cellulaire et les premiers projets de bâtiments de guerre étudiés d'après ce principe par* M. L. E. Bertin.

COMITATO SEGRETO

L'Accademia si riunì in Comitato segreto per procedere alla nomina già annunziata nella precedente sessione dei seguenti scienziati a soci corrispondenti, cioè S. E. Monsig. Guglielmo Meignan Arcivescovo di Tours, Sig. Antonio d'Abbadie, R. P. A. Renard, Sig. Prof. Raffaele Roig y Torres. Fatta la votazione vennero tutti eletti a pieni voti.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI: Conte Ab. F. Castracane, Presidente. - Prof. M. Azzarelli. - Ing. A. Statuti. - Dott. M. Lanzi - P. F. Ciampi - Prof. V. De Rossi-Re - Cav. P. Sabatucci - Prof. G. Tuccimei. - Prof. F. Ladelci. - P. F. S. Provenzali. - Comm. C. Descemet. - P. G. Lais vice-segretario.

CORRISPONDENTI: P. G. Egidi.

AGGIUNTI: March. L. Fonti.

La seduta aperta legalmente alle ore $4\frac{1}{4}$ p., fu chiusa alle ore $6\frac{1}{2}$ p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*: a) *Mémoires*, T. XLIII, XLIV. b) *Mémoires couronnées et autres Mémoires*, T. XXXI, XXXIV, XXXV. c) *Mémoires couronnées et Mémoires des savants étrangers*, T. XLIV, XLV. d) *Bulletins*, 3me Série, T. I—V. e) *Tables générales du recueil des bulletins*, 2e Série, T. XXI à L. f) *Annuaire*, 1882, 1883.
2. *Atti della R. Accademia dei Lincei*. — A. CCLXXXI, 1883—84, — Serie terza — Transunti — Vol. VIII. — Fasc. 7, 8, 10. — Roma, 1884, in-4°
3. *Atti della Reale Accademia Lucchese di scienze, lettere ed arti*. — T. XXI, XXII. Lucca, 1882, 1883, in-8°
4. *Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie*. 1884. — N. 3, Leipzig, 1884, in-8°
5. BERTIN (L. E.) — *Sur le principe des navires à flottaison cellulaire et le premiers projets de bâtiments de guerre étudiés d'après ce principe*. — Paris, 1884, in-4°.
6. *Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg*. — T. XXVIII, n° 4. — T. XXIX, n° 1. — St. Pétersbourg, 1883, In-4°
7. *Bulletin de la Société Franco-Hispano-Portugaise de Toulouse*. — T. IV, — Numéro 2. — Toulouse, 1883, in-8°
8. *Bullettino della R. Accademia medica di Roma*. — A. X. — n° 1. — Roma, 1884, in-8°
9. *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*. — T. XVI. — Giugno 1883. — Roma, 1883, in-4.°
10. CERTES (A.) — *Sur la culture, à l'abri des germes atmosphériques, des eaux et des sédiments rapportés par les expéditions du* Travailleur *et du* Talisman, 1882—83. Paris, 1884, in-4.°
11. DE CALIGNY (I. A.) — *Mémoires inédits sur la milice des Romains et celle des Français, précédés d'une notice historique sur l'auteur et sur le corps francais du génie par M. A. Ripa de Meana*. — Turin, 1868, in-8°
12. FAYE (M.) — *Controverses, au XVIIIe siècle, au sujet des trombes à propos d'une Note de M. J. Luvini*. — Turin, in-8°
13. *Journal de la Société physico-chimique russe*. — T. XVI. — n° 2, 3. — St. Pétersbourg, 1884, in-8°

14. LABOULAYE (Ch.) — *Encyclopédie tecnologique. Dictionnaire des Arts et manufactures et de l'Agriculture (Nouvelle édition)* Prospectus. Paris, in-8°
15. *La Civiltà Cattolica* — A. 36. — Serie XII. — Vol. V. — Quad. 810. — Firenze, 1884, in-8°
16. MANSI (I. D.) — *Sacrorum conciliorum nova et amplissima collectio.* — Prospetto. — Parisiis et Romae, M.DCCC.LXXXIV, in-4°
17. *Osservatorio Meteorologico della R. Università di Genova.* — A. 1881—82—83. Genova, 1884, in-f°
18. *R. Comitato Geologico d'Italia.* — 1883. — Bollettino n. 11, 12: 1884, n° 1 e 2. Roma, 1883, 1884, in-8°
19. *Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli.* — A. XXIII, fasc. 1°, 2°. Napoli, 1884, in-4.°
20. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — *Partie littéraire.* — II° Série, T. XIX, XL° de la Collection, III° livraison. — Mars. — Paris, 1884, in-8°
21. —— *Partie technique.* — II° série. — T. X° — XLII° de la collection. — III° livraison. — Mars. Paris, 1884, in-8°
22. *Sitzungberichte der Königlich Prussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* — XXXVIII—LIII. Berlin, 1883, in-8°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE VIIª DEL 18 MAGGIO 1884

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE
DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

ÉTUDE ARITHMÉTIQUE
D'UNE ÉQUATION INDETERMINÉE DU TROISIÈME DEGRE

PAR M. E. DE JONQUIÈRES

I. L'équation entre les deux indéterminées x, y qu'il s'agit de résoudre en nombres entiers positifs, se rencontre dans la théorie du contact des surfaces algébriques. (*Voir le* Traité de calcul différentiel de M. Serret, T. I. et le *Cours d'analyse* de M. Hermite, page 145). Cette équation est la suivante:

$$\frac{(x+1)\ (x+2)\ (x+3)-6}{6}=\frac{(y+1)\,(y+2)}{2}.$$

L'arithmétique supérieure ne donnant aucune méthode pour cet objet, on peut au moins désirer savoir s'il existe pour l'une des inconnues, x par exemple, certaines *formes* déterminées auxquelles cette inconnue doive appartenir, à l'exclusion de toutes autres, et, par suite, trouver, avec le moindre nombre de calculs et d'essais numériques, quelques unes des valeurs conjuguées de x et de y qui satisfont à l'équation proposée.

Tel est le but restreint de la présente Étude.

II. Posant, pour abréger,

$$\frac{(x+1)\ (x+2)\ (x+3)-6}{6}=a$$

et développant le second membre en y, il vient

$$y^2+3y-2(a-1)=0, \quad \text{d'où } y=\frac{-3+\sqrt{8a+1}}{2},$$

la valeur négative du radical étant écartée comme manifestement étrangère à la question.

Puisque y doit être un nombre entier, il faut qu'on ait, z étant un nombre entier *impair* :

$$8a+1=z^2.$$

Il s'ensuit d'abord, z^2 ne pouvant avoir pour chiffre des unités que 0, 1, 5 ou 9, que x ne peut se terminer par aucun des chiffres 2, 3, 4, 7, 8, 9.

En effet, $8a=\frac{4}{3}(x+1)\ (x+2)\ (x+3)=\frac{4}{3}(x^3+6x^2+11x)$, et il est facile de voir que le numérateur x^3+6x^2+11x est toujours divisible par 3; quelle que soit celle des trois formes $3u$, $3u+1$, $3u+2$, qu'ait x. Cela posé, si x se terminait par le chiffre 2,

Le chiffre des unités de x^3 . . . serait 8,
celui de x^2 serait 4, et celui de $6x^2$ . . 4
enfin celui de $11x$ 2

La somme de ces trois nombres se terminerait donc par 4, et son quadruple, c'est-à-dire le numérateur en question, par 6, dont le tiers, c'est-à-dire $8a$ se terminerait par 2. Donc enfin $8a+1$ aurait 3 pour chiffre des unités, ce qui ne peut convenir à un carré z^2. Ainsi x ne peut se terminer par le chiffre 2, et l'on arrive au même chiffre terminal 3 pour $8a+1$ et à la même conclusion relative à x, si on suppose x terminé par 3, 4, 7, 8 ou 9; ce qui justifie cette première proposition.

III. En second lieu, la terminaison 9, quoique possible en général pour un carré impair, doit être écartée dans le présent cas, où ce carré doit être égal à $8a+1$. Car, pour qu'elle se présentât, il faudrait que $8a$ se terminât par 8, donc que le chiffre des unités de a fût 1 ou 6. Or cela est impossible, car on vérifie aisément, en essayant pour x les seules terminaisons 0, 1, 5, 6, qui lui conviennent (II), que celles correspondantes de a sont: 5, 3, 5, 3 ou 8, mais jamais 1, ni 6. Ainsi les terminaisons 0, 1, 5 peuvent seules convenir ici à z^2 et, par conséquent, x ne peut avoir pour

chiffre des unités que l'un des quatre chiffres 0, 5, 1, 6, c'est-à-dire que x ne peut être qu'un multiple, pair ou impair, de 5, ou un multiple pair de 5 augmenté de l'unité, ou enfin un multiple impair de 5 augmenté de l'unité. Mais ces conclusions peuvent être rendues plus précises.

IV. – 1° Lorsque x se termine par 0 ou 5, $8a+1$ se termine (ainsi qu'on le vérifie aisément) par l'unité, précédée au rang des dizaines par un chiffre *pair*. Cette dernière condition, que remplit tout carré z^2 terminé par 1, étant donc satisfaite quel que soit le chiffre des dizaines de x, il ne se présente, dans ce cas, aucune limite plus étroite pour x, dont la forme générale est $5t$, t étant un entier $\geqq 1$.

2° Lorsque x est un multiple de 5 augmenté de l'unité, $8a+1$ se termine par 5, comme il est aisé de le reconnaître. Mais il ne suffit pas qu'un nombre se termine par 5 pour qu'il puisse être un carré z^2; il faut, en outre, que le chiffre des dizaines soit 2. Il s'ensuit que le chiffre des ***dizaines*** de x ne peut être que 0 ou 5, car si ce chiffre est 1 ou 6, $8a+1$ se termine par 05

. . . .	2 . 7,	 85
. . . .	3 . 8,	 65
. . . .	4 . 9,	 45
. . . .	0 . 5,	. . . . 25.

Donc il ne suffit pas que x soit un multiple de 5 augmenté de 1, il faut qu'il soit un multiple *pair* de 25 augmenté de 1, c'est-à-dire de la forme $2t.5^2+1$, t étant un entier >0.

Ce n'est pas encore tout. Un nombre terminé par 25 ne peut être un carré, que si le chiffre des centaines est 0, 2, ou 6, et l'on vérifie sans peine (par un procédé qui sera indiqué ci-après) que cette nouvelle condition exclut de la formule $x=2t.5^2+1$ toutes les valeurs de t qui ont pour chiffre des unités 1, 2, 6 ou 7.

3° Si x est un multiple *impair* de 5 augmenté de l'unité, $8a+1$ se termine, comme ci-dessus 2°, par 5; mais, pour que le chiffre des dizaines soit 2, il faut que le chiffre des dizaines de x soit 2 ou 7.

En effet, si ce chiffre est 1 ou 6, $8a+1$ se termine par 45

. . . .	3 . 8,	 05
. . . .	4 . 9,	 85
. . . .	5 . 0,	 65
. . . .	2 . 7,	. . . . 25.

ainsi x doit être un multiple impair de 5^2, et non pas seulement de 5, augmenté de l'unité, c'est-à-dire avoir la forme $(2t+1)5^2+1$.

Mais il y a, comme dans le cas précédent, une nouvelle restriction relative au chiffre des centaines, en vertu de laquelle on doit exclure de la formule qui vient d'être écrite toutes les valeurs de t qui ont pour chiffre des unités 3, 4, 8 ou 9, ce qui correspond aux valeurs suivantes de $x = 176, 226, 426, 476, 676, 726, 926, 976, \ldots$ etc.

V. Pour le démontrer, soit par exemple $t = 10l + 3$, d'où $x = 50\,(10l + 3) + 26$, l étant un entier $\overline{\overline{>}}\, 0$.

Formant d'abord la somme $A = x^3 + 6x^2 + 11x$, x étant exprimé en fonction de t $(x = 50t + 26)$, on trouve

$$A = 125\,000\,t^3 + 210\,000\,t^2 + 117\,550t + 21918,$$

d'où

$$\tfrac{4}{3}\,A + 1 = 8a + \tfrac{1}{3}\,(500\,000t^3 + 840\,000\,t^2 + 170\,200t) + 29225.$$

Le coefficient du terme en t^2 étant un multiple de 3000, son tiers sera un multiple de 1000. Donc, quel que soit t, ce terme n'aura aucune influence sur le chiffre des centaines de la somme des termes en t^3, t^2 et t, et il n'y a à s'occuper que de la somme des deux autres. Pour ceux-ci, il faut tenir compte de la forme de t par rapport au module 10. Nous supposons ici, comme nous l'avons dit, $t = 10l + 3$. Cela étant, on a $t^3 = 1000\,l^3 + 3^2 . 100l^2 + 3^2 . 10\,l + 3^3$, et comme chacun des trois derniers termes de cette somme est un multiple de 3, le tiers de cette somme multipliée par le coefficient 500 000 sera toujours, quel que soit l, un multiple de 1000 qui ne saurait influer sur le chiffre des centaines du résultat. En résumé, il n'y a à considérer, sous ce rapport, que la somme

$$\tfrac{1}{3}\,(500\,000\,l^3 + 170\,200\,(10l + 3)).$$

Or l ne peut être, par rapport au module 3, que de l'une des trois formes $l = 3q$, $l = 3q + 1$, $l = 3q + 2$, qu' il faut examiner isolément :

1^er^ cas $l = 3q$. – Les deux premiers termes sont des multiples de 3000, dont le tiers est un multiple de 1000, et par suite sont, quel que soit q, sans influence sur le chiffre des centaines. Ce chiffre ne dépend donc que du dernier terme $3 . 170\,200$, dont le tiers est 170 200, et comme le chiffre des centaines y est 2, le chiffre des centaines de $8a + 1$ sera 4, puisque celui du nombre 29 225, indépendant de t, est lui-même 2.

Ainsi, dans ce 1^er^ cas, $8a + 1$ ne peut jamais être égal à un carré z^2.

2.^e^ cas $l = 3q + 1$. – Dans ce cas, $500\,000\,l^3$ est évidemment égal à $500\,000\,(27.q^3 + 27q^2 + 9q + 1)$, c'est-à-dire à un multiple de 3000, augmenté de 500000,

qui n'est pas un multiple de 3. Le tiers sera donc un multiple de 1000, augmenté de $\frac{500\,000}{3}$. Quant à 170200 $(10l + 3)$, il devient 170 200 $(30q + 13)$, c'est-à-dire un multiple de 3000, augmenté de $\frac{170\,200 \times 13}{3}$.

En résumé, il n'y a à considérer, au point de vue qui nous occupe, que la somme $\frac{1}{3}(500\,000 + 170\,200.13) = \frac{2712600}{3} = 904\,200$, où le chiffre des centaines est, comme dans le 1[er] cas, 2 qui, ajouté à celui 2 du nombre constant 29225, donnera 4 pour le chiffre des centaines de $8a + 1$. Donc encore $8a + 1$ n'est pas un carré z^2.

3[e] cas $l = 3q+2$. — Dans ce cas, 500 000 l^3 est égal à 500 000 $(27q^3+2.27q^2+4.9q+8)$, c'est-à-dire à un multiple de 3000, augmenté de $500\,000 \times 2$, qui n'est pas un multiple de 3. Le tiers sera donc un multiple de $1000 + \frac{500\,000 \times 2}{3}$.

Quant à 170 200 $(10l + 3)$, il devient 170 200 $(30q + 23)$, c'est-à-dire à un multiple de 3000, augmenté de $\frac{170\,200 \times 23}{3}$.

En résumé, il n'y a à considérer que la somme partielle

$$\frac{1}{3}(500\,000 \times 2 + 170\,200 \times 23) = \frac{4914600}{3} = 1\,638\,200,$$

où le chiffre des centaines est 2, comme dans les deux cas précédents, ce qui prouve que $8a + 1$ ne peut encore pas être un carré.

Ainsi la démonstration est générale. Elle s'appliquerait d'ailleurs, sauf les variantes résultant de la valeur du chiffre des unités, aux trois autres valeurs de $t = 10l + 4, 8, 9$. On trouverait alternativement, que le chiffre des centaines est 6 et 2 qui, ajouté à celui de 29 225 donne soit 8, soit 4, pour celui de $8a + 1$, qui ne peut, par conséquent, dans aucun de ces cas, être un carré z^2, comme il a été dit.

Les quatre cas d'exclusion relatifs à la valeur du chiffre des unités de t dans la 2[ème] forme de $x = 2t.\,5^2 + 1$ (IV. 2°), se démontrent par un procédé analogue et, par conséquent enfin, la légitimité des trois formes

$$x = 5t,\ \ x = 2t.\,5^2 + 1,\ \ x = (2t + 1)\,5^2 + 1$$

est rigoureusement établie. On y remarquera l'intervention prépondérante du nombre 5.

VI. Lorsqu'on applique le calcul numérique à ces trois formes, on trouve que

1° Les seules solutions de la forme $x = 5t$, jusques et y compris $x = 300$, sont

$$x = 5, \text{ conjuguée à } y = 9$$

$$x = 20, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = 58\,;$$

2° L'unique solution de la forme $x = 2t \cdot 5^2 + 1$, jusques et y compris $x = 1001$, correspond à $t = 0$ et est

$$x = 1, \text{ conjuguée à } y = 3.$$

3° Enfin il n'existe, en dessous de $x = 1000$, aucune solution de la forme $x = (2t + 1)\, 5^2 + 1$.

Remarque. La solution $x = 5$ est mentionnée dans le *Cours d'analyse* précité de M. Hermite et a donné lieu, pour ce qui regarde le contact des surfaces (contact du 9ème ordre), à une savante étude de M. Halphen, dans le tome III du *Bulletin de la société mathématique*, page 28, année 1875.

Paris, *le* 27 *avril* 1884.

SULLA FOSFORESCENZA FISICA

SECONDA COMUNICAZIONE

DEL P. F. S. PROVENZALI, D. C. D. G.

In una delle precedenti sessioni (1) mi studiai di mostrare che la fosforescenza fisica, cioè non accompagnata da mutazioni sostanziali, è prodotta dai tremori eccitati nelle molecole pesanti della luce o da altro agente capace di scuotere quelle molecole. Trattandosi di fenomeni, strettamente connessi coll'origine dei colori permanenti dei corpi e coi cangiamenti di rifrangibilità delle radiazioni, ho creduto bene di tornarci sopra un'altra volta per meglio dichiarare la mia tesi e far vedere quanto sia essa conforme ai risultati della osservazione e della sperienza.

Sebbene i fisici non siano ancora bene d'accordo sulla causa della fosforescenza, pure al presente tutti convengono nell'ammettere che i fenomeni della luce sono prodotti da vibrazioni, e che l'etere, ossia un fluido sottilissimo sparso per tutto anche nell'interno de'corpi, è il mezzo di comunicazione di questo e di tutti gli altri movimenti che si trasmettono da corpo a corpo senza il concorso della materia pesante.

Ciò posto se si ammette che l'agitazione molecolare di un corpo luminoso per se stesso si comunica all'etere che lo circonda e per mezzo di questo ai corpi da esso illuminati, dovremo pure ammettere che ogni qual volta un corpo è sotto l'azione della luce non solo l'etere esistente in quel corpo, ma anche le molecole del corpo medesimo vengano scosse dalle onde eteree. Certo che da un solo impulso dell'onda eterea non potrà destarsi una velocità apprezzabile nelle molecole ponderabili, le quali hanno masse tanto maggiori; ma ciò che non può fare un impulso unico lo potrà fare una serie d'impulsi che con andamento ritmico si succedano gli uni agli altri molti milioni di volte in un secondo, a quel modo che vediamo accadere nelle risonanze delle corde armoniche, spesso prodotte da ondicelle aeree debolissime e tanto meno celeri delle onde eteree. Il paragone delle risonanze acustiche colla fosforescenza considerata come un effetto dei tremori destati dalla luce nelle molecole pesanti, poteva sembrare poco a proposito nei tempi andati, quando la proprietà di splendere all'oscuro per insolazione si credeva solo appartenere ad alcune sostanze privilegiate. Ora

(1) Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei. Anno XXXIV. Sess. 1ª.

poi che una più delicata osservazione ha mostrato che la maggior parte dei corpi possono per tal modo divenire fosforescenti, vede ognuno che, se suono e luce oggettivamente considerati consistono in vibrazioni di un mezzo elastico, la comunicazione del movimento luminoso non deve gran fatto differire dalla comunicazione del movimento sonoro, e come sotto l'impressione del suono le molecole de'corpi si mettono in moto, così faranno per l'azione della luce.

Ma venendo ai fatti, molti sono i fenomeni che ci mostrano questo scambio di moto fra l'etere e le molecole della materia pesante. Quando p. e. un corpo caldo collocato nel vuoto il più perfetto si raffredda per raggiamento senza il contatto immediato colla materia ponderabile, e mentre esso si raffredda i corpi lontani si scaldano, dobbiamo dire che l'agitazione molecolare di quel corpo diminuisce non per altro se non perchè una parte del suo moto si comunica all'etere che lo circonda e per tal mezzo passa nei corpi lontani, che alla lor volta si scaldano a spese del moto ricevuto dall'etere interposto. Parimenti allorchè vediamo che un corpo esposto alle radiazioni solari si scalda e spesso anche si altera chimicamente e che in ambedue queste operazioni l'intensità della radiazione solare diminuisce nel rapporto del riscaldamento prodotto e dell'azione chimica esercitata, dobbiamo dire che l'intensità della radiazione solare diminuisce perchè la forza viva che l'etere riceve dal Sole viene impiegata nel primo caso ad aumentare l'escursioni delle molecole ponderabili, e nel secondo a disfare i gruppi molecolari già formati ed a formarne dei nuovi.

Senonchè ciò che meglio ci fa intendre lo scambio di moto fra l'etere e la materia pesante è il rovesciamento degli spettri de'corpi incandescenti mediante l'assorbimento de' vapori de' corpi stessi. Il sodio p. e. bruciando dà uno spettro formato di una sola zona gialla, che si cambia in oscura sempre che fra il sodio che brucia ed il suo spettro s' interpone del vapore di sodio. Ciò significa che il sodio, dicasi lo stesso delle altre sostanze semplici, nell'atto di bruciare comunica all'etere circostante quella stessa specie di movimento che il suo vapore estingue nelle ondulazioni eteree. Questi fatti non solo mettono fuori di controversia il reciproco scambio di moto fra l'etere e le molecole pesanti, ma inoltre ci fanno intendere che tale scambio segue le stesse leggi della comunicazione del moto fra l'aria ed i corpi sonori, i quali tanto più facilmente sono messi in moto dalle onde aeree, quanto più queste sono d'accordo col periodo di vibrazione dei corpi medesimi.

Allorchè dunque un corpo viene sottoposto all'azione di una sorgente di luce, le onde eteree prodotte da codesta sorgente devono comunicarsi tanto alla materia pesante di quel corpo quanto all'etere misto alla materia stessa, di maniera che un corpo in ordine all'etere circostante vuole essere considerato come una doppia origine di scuotimento indipendente l'una dall'altra. Lo scuotimento prodotto dalla materia pesante in generale sarà più lento e però meno atto ad agire sull'organo della vista; ma come accade nell'urto di masse elastiche disuguali, durerà anche dopo cessata l'azione del corpo illuminante. Al contrario lo scuotimento cagionato dall'etere misto alla materia pesante a parità di circostanze sarà più rapido epperò meglio adattato a destare la sensazione della luce; ma conforme alle leggi della comunicazione del moto fra masse elastiche uguali, comincerà e cesserà nell' istante medesimo in cui comincia e cessa la causa dello scuotimento, cioè l'azione del corpo illuminante. Stando dunque alle leggi della comunicazione del moto fra i corpi elastici potremo stabilire le tre leggi seguenti.

1. La *diffusione ordinaria*, cioè la luce che emana dai corpi illuminati solo finchè dura l'azione della sorgente illuminante, è prodotta dalle vibrazioni destate nell'etere misto alla materia dei corpi stessi.

2. La *diffusione fosforica*, ossia la luce che continua ad emanare da un corpo dopo cessata l'azione della causa illuminante è dovuta alle vibrazioni eccitate nelle molecole del corpo medesimo.

3. Affinchè un corpo seguiti a splendere cessata l'azione della causa che lo illuminava altro non si richiede se non che i tremori destati nelle sue molecole dalla radiazione esteriore sieno celeri abbastanza ed abbastanza energici da produrre in noi la sensazione della luce.

Quanto alla prima di queste proposizioni oltre la prova che ce ne dà il fatto accennato di sopra, voglio dire la simultaneità dell'istante in cui comincia e cessa la diffusione ordinaria col cominciare a cessare l'azione del corpo illuminante, ne abbiamo un' altra nella rifrangibilità della luce diffusa paragonata con quella della luce incidente. Analizzando per mezzo del prisma la luce diffusa da un corpo inattivo rapporto alla fosforescenza, non mai vi si trovano de' raggi di una rifrangibilità che non si trova fra gli elementi della luce incidente. Ed è appunto per questa ragione che un corpo capace di diffondere la sola luce p. e. rossa o gialla non può essere illuminato da una luce priva di raggi rossi o gialli. Avviene cioè nella diffusione ordinaria quello che accade nelle risonanze prodotte dall'aria contenuta nei tubi aperti da una estremità e chiusi dall'altra. Quando la parte

aperta di uno di questi tubi si presenta ad un corpo vibrante, il suono non viene rinforzato se la profondità del tubo non sia tale che l'aria in esso confinata possa vibrare d'accordo col corpo sonoro. In somigliante maniera l'etere, che misto alla materia pesante non può come l'etere libero eseguire ogni specie di vibrazioni di qualunque lunghezza esse sieno, ma solo alcune determinate, se queste manchino nella radiazione incidente, rimane in quiete o si muove con altra specie di moto non luminoso: la qual cosa non potrebbe generalmente verificarsi se la luce diffusa fosse generata dalle vibrazioni di una materia d'altra natura di quella per cui mezzo si propaga la luce incidente.

Alla medesima conclusione siamo condotti dal rapporto che passa fra la luce diffusa e la luce trasmessa. Nella massima parte de' corpi trasparenti, sotto piccola spessezza la luce diffusa presenta il colore medesimo della luce trasmessa. E se crescendo la spessezza cambia il colore della luce trasmessa, ciò deve unicamente attribuirsi all'assorbimento, che in uno stesso corpo è diverso pei diversi raggi, onde avviene che fra gli elementi che compongono la luce trasmessa alcuni si estinguono prima ed altri dopo. È vero però che alcuni corpi, come p. e. l'oro e l'argento ridotti a fogli tenuissimi nel trasmettere la luce le comunicano un colore molto diverso dal colore che presentano per diffusione. Ma ciò non significa altro se non che quei corpi, nelle circostanze ordinarie, hanno un gran potere assorbente per alcuni raggi determinati. Ho detto nelle circostanze ordinarie, perchè i foglietti d'oro, d'argento e d'altri metalli, se vengano scaldati quanto fa d'uopo per ricuocerli, acquistano maggiore trasparenza e perdono in gran parte la facoltà di assorbire prontamente certi raggi. Ma ciò che più fa al caso nostro è che nei corpi diafani di qualunque spessezza la luce trasmessa e la diffusa o hanno lo stesso colore o sono una complementaria dell'altra. Quando p. e. si fa passare un fascetto di luce bianca attraverso uno strato d'acqua la cui spessezza vada progressivamente crescendo, si osserva che la luce trasmessa da prima bianca a poco a poco volge al giallo al ranciato e quindi al rosso; mentre la luce diffusa dall'acqua stessa dal biancc passa al violaceo, all'azzurro e finalmente al verde. Sembra dunque doversi conchiudere la luce diffusa essere prodotta da vibrazioni eccitate nello stesso mezzo per cui si propaga la luce trasmessa. Che poi la luce nell'interno de' corpi si trasmetta mediante l'etere e non mediante la materia pesante, come alcuni hanno creduto, è cosa che al presente non può negarsi, non solo perchè la velocità con cui la luce attraversa i corpi

è tale che supera di molto l'elasticità della materia pesante, ma molto più perchè dopo le sperienze di M. Fizeau intorno all'influenza del movimento de'corpi sulla velocità della luce, sappiamo che se il corpo attraversato dalla luce venga animato da un movimento comunque rapido, la velocità della luce non aumenta o diminuisce di tutta la quantità dovuta al moto del corpo per cui si propaga, come dovrebbe accadere se la propagazione della luce si facesse mediante la materia del corpo stesso. Sia dunque che nella ordinaria diffusione si consideri il suo cominciare e finire nell'istante medesimo in cui comincia e finisce la radiazione esteriore, sia che se ne consideri la natura paragonata con quella della luce incidente e trasmessa, siamo condotti alla conclusione che la luce che ci fa vedere i corpi illuminati coi loro propri colori è dovuta alle vibrazioni dell'etere misto alla materia dei corpi stessi. Ciò però non toglie che anche le vibrazioni delle molecole pesanti possano renderci visibili i corpi (ed è in ciò che diciamo consistere la fosforescenza); ma la luce prodotta da coteste vibrazioni per lo più è si debole che mentre dura la diffusione ordinaria riesce per noi affatto insensibile. V'ha però dei casi nei quali le vibrazioni delle molecole pesanti concorrono con quelle dell'etere ad esse frammisto a produrre in noi la sensazione dei colori. Uno di questi casi ce lo presentano certi diamanti che alla luce del giorno o dell'arco voltaico mostrano una tinta azzurrognola, che non apparisce alla luce delle altre sorgenti artificiali. In grado anche più eminente lo stesso fenomeno ci è offerto da moltissime sostanze dotate della fosforescenza di breve durata o come suol dirsi *fluorescenti*, quali sono p. e. il bisolfato di chinina, il vetro d'uranio, la soluzione alcoolica di clorofilla, ecc., specialmente quando sono illuminate da sorgenti ricche di raggi chimici. In tutti questi casi però il colore proprio dei corpi rimane sempre più o meno alterato; onde possiamo dire con tutta verità che i corpi illuminati li vediamo coi loro propri colori solo per virtù dell'etere che contengono.

Dalle cose dette fin qui apparisce che la diffusione ordinaria e la diffusione fosforica hanno proprietà tanto diverse l'una dall'altra che non è possibile farle derivare ambedue dalla medesima origine. La diffusione ordinaria infatti non esige tempo per manifestarsi e cessa nell'istante medesimo che cessa la radiazione esteriore, nè mai presenta degli elementi d'altra natura di quelli della luce incidente. Al contrario la diffusione fosforica spesso richiede tempo per manifestarsi e continua anche per più ore dopo cessata la causa eccitante, nè quasi mai si compone de'raggi stessi della luce che l'ha de-

stata, ma un corpo a fosforescenza p. e. gialla o ranciata, come suole essere il diamante, lo spato d'Islanda ecc., diviene luminoso anche per l'azione de'raggi verdi, bleu, violacei od ultra violacei. E se a ciò si aggiunga che l'intensità della diffusione fosforica è sempre debolissima relativamente alla diffusione ordinaria, chiaramente si vede che la fosforescenza non ha certo origine dalle vibrazioni dell'etere misto alla materia di corpi e per conseguenza non potersi ragionevolmente attribuire che ai tremori eccitati dalle radiazioni esteriori nelle molecole pesanti, che è la seconda delle tre proposizioni sopra enunciate.

Una bella conferma di questa proposizione l'abbiamo dal confronto fra la durata dell'emissione luminosa per fosforescenza ed il progressivo raffreddamento dei corpi per radiazione. È noto che la formola esponenziale stabilita da Newton per calcolare il raffreddamento de' corpi, sebbene non sia rigorosamente esatta, pure entro certi limiti di temperatura è prossimamente vera e frequentemente adoperata. Ora M. E. Becquerel ha dimostrato con numerosi sperimenti (1), che per la maggior parte de' corpi quella formola si applica egualmente bene tanto alla diminuzione della luce per fosforescenza che al disperdimento del calorico per radiazione. Le anomalie che presentano alcune sostanze, le quali dopo impressionate dalla luce emettono de' raggi d' ineguale durata o tanto deboli da non potersene valutare l' intensità luminosa, non sono diverse da quelle che si osservano nel raffreddamento de' corpi; epperò non si oppongono anzi aggiungono un nuovo grado di probabilità all'opinione che ambedue le predette classi di fenomeni procedano dallo stesso principio. A quel modo pertanto che nello stato attuale delle nostre cognizioni non ci è permesso di assegnare al calorico altra causa che l'agitazione delle molecole pesanti, così neppure ci sarà permesso di assegnarne un'altra alla diffusione fosforica.

Anche l'azione del calorico sulle sostanze fosforescenti ci fa intendere che la diffusione fosforica ed il calorico hanno la stessa causa. Molti corpi scaldati all'oscuro anche nel vuoto il più perfetto divengono fosforescenti ad una temperatura molto inferiore a quella in cui tutte le sostanze divengono incandescenti. Anzi alcuni di essi acquistano la facoltà di splendere solo che vengano immersi nell'acqua bollente, e la varietà di spato fluore appellata *clorofane* spesso diviene luminosa ad una temperatura inferiore ai 30.° Nè siffatto splendore può attribuirsi alla stessa causa per cui quei corpi

(1) La Lumière par M. E. Becquerel T. 1. pag. 273 e seg.

splendono quando sono illuminati. Nell'uno e nell'altro caso la natura della luce che emettono è diversa e le circostanze che fanno variare una di tali luci spesso non alterano affatto l'altra. Lo spato fluore violaceo a cagione di esempio scaldato all'oscuro emette una luce azzurrognola, che poi passa al bleu carico, e lo spato fluore verde nelle medesime circostanze ora apparisce di colore ranciato, ed ora di colore azzurro o violaceo. E se prima di scaldarlo si divide in frammenti, l' intensità della luce che emette ciascun frammento è tanto maggiore quanto la sua massa è minore; al contrario della durata che per eguale riscaldamento cresce col crescere della massa. In generale come non v'è alcun rapporto fra le circostanze che fanno variare la fosforescenza prodotta dal calorico e la luce emessa da un corpo illuminato, così neppure alcuno ve ne ha fra il colore proprio di un corpo e quello che acquista divenuto fosforescente per l'azione del calorico o di qualunque altro agente capace di scuoterne le molecole.

Qui però si ha da notare che se ad una certa temperatura un corpo acquista la fosforescenza, la può perdere ad un'altra più elevata; anzi se la temperatura di un corpo divenuto fosforescente per il calorico va sempre crescendo, arriva finalmente un punto in cui quel corpo perde la facoltà di splendere per azione del calorico. Ciò bene s'intende se si osserva che a rendere un corpo fosforescente non basta, come a scaldarlo, che le sue molecole vengano comunque agitate; ma è necessario che l'agitazione sia tale da produrre nell'etere circostante delle onde capaci di agire sull'organo della vista. Durante il riscaldamento i vincoli molecolari sono soggetti a continue variazioni per modo che le molecole di un corpo in ordine all'attitudine di vibrare con un periodo anzi che con altro debbono paragonarsi a delle corde sonore la tensione delle quali varia continuamente. È dunque del tutto conforme all'origine che abbiamo assegnato alla fosforescenza che un corpo ad una certa temperatura possa divenire luminoso, mentre non lo può ad un altra più o meno elevata. E così vediamo che i corpi i quali per eccesso di riscaldamento hanno perduto la proprietà di diventare fosforescenti per l'azione del calorico, spesso la riacquistano per una temperatura anche più elevata o per l'azione della luce ovvero delle scariche elettriche o di qualsivoglia altra forza capace di modificare i vincoli molecolari.

Quindi anche si fa manifesto come avvenga che l'ignizione e la fosforescenza sebbene ambedue prodotte dai tremori eccitati nelle molecole pesanti, pure differiscano tanto fra loro sì nella durata che nella intensità

e rifrangibilità della luce che ne risulta. Nell'ignizione la forza viva del calorico è sì energica che non ostante i legami molecolari non ancora distrutti, si destano nelle molecole delle vibrazioni di tutte le lunghezze (tranne forse le più corte generatrici delle azioni chimiche, le quali sembrano richiedere uno stato di libertà molecolare quasi perfetto) onde gli spettri de'corpi incandescenti sono continui. Al contrario nella fosforescenza eccitata dal calorico, per la minor forza con cui vengono scosse, le molecole non possono vibrare che dentro i limiti corrispondenti alla loro tensione, cioè al loro stato di aggregazione, sicchè variato questo variano anche le lunghezze delle ondulazioni; e così gli spettri sono discontinui ed il corpo sottoposto al riscaldamento varia spesso di colore variando la temperatura, e di attivo che era rapporto alla fosforescenza diventa inattivo e per converso.

Se questi ragionamenti sono esatti anche la fosforescenza destata dalla luce e dalle altre cause di scuotimento molecolare dovrà essere notabilmente modificata dal calorico. E così è di fatto che nella maggior parte dei minerali fosforescenti ad ogni variazione di temperatura corrisponde qualche alterazione o nella natura o nella intensità o nella durata della luce fosforica che emettono, e talvolta anche nell'attitudine ad essere impressionate piuttosto da alcune che da altre radiazioni incidenti. Il solfuro di stronzio p. e. esposto per alcuni istanti alla luce solare e poi recato in luogo oscuro, alla temperatura ordinaria splende di un bel colore violaceo, che ai 20° volge all'azzurro ed ai 40° diviene azzurro chiaro. Continuando a crescere la temperatura verso i 70° l'azzurro si cambia in verde, ai 90° passa al giallo ed in fine al ranciato. In questo caso la rifrangibilità della luce va scemando a misura che cresce il calorico; l'intensità invece diminuisce col crescere la temperatura. In altre sostanze p. e. nel solfuro di bario, accade il contrario che la rifrangibilità cresce crescendo la temperatura, ed in alcune come in certe varietà di solfuro di calcio la rifrangibilità rimane sensibilmente la stessa e solo cambia l'intensità e la durata della fosforescenza. Nulla di somigliante si osserva nella diffusione ordinaria e, salvo il caso che per l'azione del calorico i corpi sieno chimicamente alterati ovvero divengano sorgenti di luce per se stessi, il colore e l'intensità della luce che emettono durante il tempo che sono illuminati o non variano per variazioni anche grandi di temperatura o se variano ciò si fa indipendentemente dalle modificazioni prodotte nella fosforescenza.

Questa ultima osservazione è di grande importanza, perchè sapendosi che il calorico e la luce in certe circostanze alterano le qualità ottiche dei corpi, potrebbe nascere il sospetto che dall'azione del calorico sulle sostanze fosforescenti nulla si potesse inferire a favore dell'origine della fosforescenza. Il sospetto svanisce se si considera che le modificazioni prodotte dal calorico nella fosforescenza sono indipendenti da quelle che in forza del calorico hanno luogo nelle altre qualità ottiche dei corpi. Dicasi lo stesso di un'altra specie di modificazioni operata dal calorico nelle sostanze fosforescenti, che differisce dalle già indicate in quanto che i cangiamenti in forza del calorico avvenuti nella struttura molecolare de' corpi sono permanenti, onde l'effetto continua sebbene sia cessata l'azione della causa che l'ha determinato. A questa specie di modificazioni appartiene l'aumento della virtù fosforogenica che si osserva in molti corpi dopo che furono convenientemente scaldati. Anzi v' ha de' minerali che sebbene non sieno fosforescenti per azione della luce, pure lo divengono e poi si conservano indefinitamente tali, se vengano sottoposti a notabile riscaldamento. Nel secolo passato questa proprietà fu osservata da M. de Grosser in alcuni diamanti, i quali d' inattivi che erano in ordine alla fosforescenza diventarono e si mantennero attivi dopo essere stati per lungo tempo immersi in un bagno di borato di sodio fuso (1). Più recentemente la proprietà di acquistare col riscaldamento la fosforescenaa per insolazione fu scoperta nell' allumina, nella magnesia ed in non pochi altri minerali. Anche la calce che ottenuta dalle pietre calcaree nei forni comuni non si mostra sensibilmente fosforica, se venga per molte ore scaldata in un forno alimentato da forte corrente d'aria, acquista la virtù di emettere allo scuro una debole luce giallastra; senza che però rimanga alterato il colore che presenta la calce sotto l'azione della luce, come non rimane alterato il colore della magnesia, dell'allumina e di altri corpi che in forza del calorico acquistano la fosforescenza per insolazione. Che poi un tale effetto sia prodotto dal calorico in quanto che modificando esso la disposizione delle molecole fa che queste possano concepire certe specie di vibrazioni, che altrimenti o non sarebbero possibili o riuscirebbero troppo deboli, è confermato dal fatto che nei

(1) Duraute questa operazione, mentre i diamanti acquistano la fosforescenza per insolazione perdono la facoltà di diventare luminosi per l'azione del calorico oscuro. Forse questa è la ragione per cui alcuni diamanti lavorati non si mostrano fosforescenti per riscaldamento; perchè i lapidari onde accrescerne la lucentezza sogliono talvolta sottoporli ad una molto elevata temperatura. Credo che non andrebbe lungi dal vero chi dicesse la maggiore lucentezza che acquistano alcuni diamanti col riscaldamento derivare almeno in parte dalla diffusione fosforica che dopo tale operazione si aggiunge alla diffusione ordinaria.

corpi per tal modo modificati dal calorico rispetto alla fosforescenza si sono alle volte notati dei cangiamenti nelle forme cristalline, nel calorico specifico, nella densità ecc. (1); ma per lo più questi cangiamenti debbono essere tanto poco sensibili che solamente per analogia si possono estendere a tutti i casi nei quali la fosforescenza si trova permanentemente alterata dal calorico.

Ma per rimuovere ogni dubbio che ancora potesse rimanere intorno alla indicata origine della fosforescenza valgono sopra tutto la sperienza detta dei *prismi incrociati*, ed il fatto che l'attività fosforogenica si può trasmettere al di là dei punti impressionati dalla luce. La sperienza dei prismi incrociati consiste nell'osservare la luce diffusa da uno spettro orizzontale mediante un prisma disposto cogli spigoli orizzontali. Se la sostanza su cui si è ricevuto il primo spettro sia inattiva in ordine alla fosforescenza per azione della luce, altro non si vede che un secondo spettro inclinato all'orizzonte, perchè la luce diffusa dal primo spettro entrando nel secondo prisma soffre una rifrazione crescente dal rosso al violaceo. Che se quella sostanza sia attiva (nulla importa di quale specie di attività, se a lunga o breve durata o anche solo istantanea) apparisce un terzo spettro orizzontale compreso fra gli altri due, ma meno assai luminoso. Questo terzo spettro, in cui ora si veggono tutti i colori ed ora no, evidentemente dimostra cha sotto l'azione della luce da ciascun punto di una sostanza fosforescente partono due sistemi di onde, che certo non hanno la stessa origine, perchè formate una dei soli elementi omogenei che illuminano quel punto e l'altro da elementi eterogenei molto vari ed in generale meno rifrangibili. Nel primo dei suddetti sistemi consiste la diffusione ordinaria, la quale come si disse è dovuta alla vibrazioni dell'etere misto alla materia; il secondo che spesso continua anche dopo cessata l'azione del corpo illuminante e costituisce la diffusione fosforica, non può avere altra causa che i tremori destati dalla luce nelle molecole pesanti.

Per ciò che riguarda la trasmissione dell'attività fosforogenica al di là dei punti impressionati dalla luce, ecco che cosa abbiamo dalle sperienze di Biot e Becquerel (2), sperienze che anche da me sono state più volte ripetute. Se per mezzo di una lente o in altro modo si concentra un fa-

(1) M. Regnault trovò un poco diverso il calorico specifico dello spato fluore prima e dopo che la sua facoltà di divenire fosforescente per l'azione della luce era stata modificata del calorico. V. Ann. de chemie et de phys. 3, Serie T. 1.

(2) V. Becquerel. — Traité d'électricité T. VI. p. 297. Questo fisico per eccitare la fosforescenza su di una piccolissima parte della superficie di un corpo faceva uso della scintilla elettrica.

scetto di luce su di un corpo fosforescente, spesso accade che cessata l'azione della luce la diffusione fosforica a poco a poco si estende nelle parti circostanti che non ricevettero l'azione della luce, di maniera che dopo breve tempo la superficie splendente nell'oscurità apparisce notabilmente amplificata. E se il corpo su cui si sperimenta sia piuttosto sottile, sebbene sensibilmente opaco, come p. e. una laminetta di solfuro di calcio della spessezza di qualche millimetro, la diffusione fosforica non apparisce solo alla superficie scossa della luce, ma si propaga per l'interno della sostanza fino alla faccia opposta, che diviene essa pure fosforescente. Questo fatto quanto è facile ad intendersi posto che la causa della fosforescenza sieno le vibrazioni delle molecole pesanti, altrettanto riesce inconcepibile nell'ipotesi che la diffusione fosforica abbia la stessa origine della diffusione ordinaria. Qualunque sia l'intensità della luce che parzialmente illumina un corpo, la diffusione *reale* (1) non mai si estende alle parti circostanti e molto meno alle lontane. Non già che nell'etere, come in ogni altro mezzo elastico i tremori non si propaghino lateralmente ed in ogni verso; ma perchè attesa l'estrema sua tenuità le onde che si generano nell'etere, fuori dell'involucro parallelo alla superficie ove hanno sede gli scuotimenti sono troppo dilatate ed isolate, epperò incapaci di agire sull'organo della vista. Non è così nelle molecole pesanti, le quali avendo masse molto maggiori presentano all'etere circostante molti punti che oscillando assieme anche fuori dello spazio scosso dall'agente esteriore possono eccitare delle onde abbastanza condensate da destare la sensazione della vista. Ciò che accade in tal caso è affatto simile a quello che avviene nei corpi parzialmente esposti ad una radiazione oscura, che divengono sorgenti di calorico raggiante anche nei punti che non sono immediatamente scossi dalla radiazione esteriore. La differenza sta unicamente nella lunghezza e rapidità delle onde generate dalle molecole pesanti, che nel caso della diffusione fosforica sono comprese dentro i limiti di sensibilità della retina, laddove nel caso della radiazione oscura d'ordinario sono fuori di quei limiti.

La terza ed ultima delle suddette proposizioni, cioè che la fosforescenza per insolazione avviene sempre che i tremori eccitati dalla luce nelle molecole de' corpi sono abbastanza rapide ed energiche da destare in noi la

(1) L'epiteto reale si è aggiunto per distinguerla dalla diffusione *apparente* cioè ingrandita dalla irradiazione, fenomeno soggettivo che appena può aver luogo nella debole luce fosforica, e che nettamente si distingue dalla propagazione laterale della fosforescenza, perchè quella non ci fa vedere le parti vicine ma solo amplifica la superficie illuminata, senza che si possa distinguere la figura e il colore delle parti circostanti.

sensazione della luce, non ha bisogno di prove speciali, ma è conseguenza necessaria di quanto si è detto precedentemente. Se la causa della fosforescenza sta nelle vibrazioni delle molecole pesanti, e se queste sotto l'impulso delle onde luminose concepiscono delle vibrazioni, è cosa manifesta che un corpo diventerà sorgente di luce più o meno sensibile e durevole ogni qualvolta quelle vibrazioni sieno comprese nei limiti della sensibilità dell'occhio. Alla difficoltà d'intendere come sia possibile che le onde eteree scuotano tanto violentemente le molecole pesanti quanto si richiede a destare la sensazione della vista, si è già risposto di sopra. Qui solo aggiungeremo il fatto della *calorescenza* ossia della ignizione prodotta da' raggi oscuri. In questo fatto non solo abbiamo che le ondulazioni dell'etere comunicano alle molecole ponderabili un movimento capace di agire come luce; ma inoltre vediamo che questo movimento è più rapido di quello che costituisce la radiazione incidente. Al contrario di ciò cha accade nella fosforescenza, che all'assorbimento di vibrazioni più rifrangibili epperò più rapide per parte delle molecole pesanti, succede l'emissione di vibrazioni meno rifrangibili e meno rapide. La ragione di tale diversità di effetti prodotti dalla medesima causa sembra doversi attribuire alla diversa intensità delle radiazioni che li producono, a un dipresso come si fece di sopra per dare ragione della differenza fra la fosforescenza prodotta dal calorico e l'incandescenza. Finchè le radiazioni ricevute da un corpo sono relativamente deboli, le sue molecole non possono vibrare che col periodo dovuto alla loro tensione ed alle loro masse tanto maggiori delle molecole eteree; onde la luce fosforica è sempre più debole e d'ordinario anche meno rifrangibile della luce che l'ha destata. Ma se le radiazioni a cui un corpo è sottoposto sieno sì energiche che il moto ad ogni istante acquistato dalle sue molecole superi la perdita che soffrono per raggiamento, le vibrazioni di quelle molecole si faranno sempre più celeri ed intense, di maniera che il corpo finalmente apparirà luminoso. A quel modo pertanto che le radiazioni più rifrangibili e luminose per l'intermedio della materia pesante si trasformano in radiazioni meno rifrangibili ed oscure nel riscaldamento, ma luminose nella fosforescenza; così le radiazioni meno rifrangibili oscure quando sono molto intense possono trasformarsi in radiazioni più rifrangibili e luminose. Tale fenomeno, che suole manifestarsi fra i 480° ed i 500°, differisce dalla fosforescenza non solo per la maggiore intensità della luce, ma perchè non dipende dall'attitudine delle molecole a vibrare con uno anzichè con altro periodo di vibrazioni.

COMUNICAZIONI

Ladelci, Prof. F. – *Illustrazione della storia della botanica in Roma*:

Il Prof. Ladelci presentò un nuovo suo lavoro che è l'illustrazione della Storia della Botanica in Roma, della quale lesse un breve sunto per far rilevare come da questa storia chiaramente appariscono due incontrastabili fatti, cioè: 1. la grande opera che gl'Italiani hanno dato per la formazione ed il progresso della botanica come scienza; 2. che questo risultato è dovuto alla cooperazione, che i Romani Pontefici hanno successivamente usato per il progresso ed il retto ordinamento de'buoni studi; dal che viene dimostrato ancora come sia stato improvvido, ingiusto e dannoso l'aver tolta la suprema direzione degli studi stessi alla competente autorità ecclesiastica; per la qual cosa non solo gli studenti, ma l'intera società ancora ne vanno esperimentando deplorevolissime conseguenze. Il lavoro esteso è stato inserito nel 1° volume delle *Memorie dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei.*

Lanzi, Dott. M. – *Presentazione di una nota*:

Il ch. Dott. M. Lanzi presenta all'Accademia una nota inviata dal Sig. Professore Reinsch di Erlangen, e notifica il contenuto. In tale nota sono riportate alcune osservazioni istituite dal Reinsch sullo strato che riveste le monete di bronzo, di rame, di argento ed anche quelle di oro, che furono già in corso da più di un anno, o durante un tempo maggiore. Raschiando con la punta d'una lama monete provenienti da vari luoghi, cioè dalla Germania, dall'Austria, dalla Ungheria, dall'Italia e dall'America del Nord; asportando le incrostazioni che sogliono riempire le concavità delle impronte, e ponendo siffatte abrasioni nell'acqua distillata, potè scorgere, con l'aiuto del microscopio, che vi si contenevano microrganismi unicellulari di varie forme, cementati da materia organica, e riferibili a Micrococchi, Batteri e Spirilli. Rinvenne pure in alcune monete di bronzo e di argento alghe unicellulari, cioè Palmelle, Pleurococchi, Croococchi, spore di alghe superiori ed ifi di funghi. Egli reputa tali ricerche utili al punto di vista igienico, in quanto che le monete possono essere un mezzo di diffusione nei contagi e nelle malattie epidemiche in virtù dei corpuscoli di sostanza organica e dei parassiti che tengono aderenti. Le interessanti osservazioni del Reinsch vennero convalidate del parere dello illustre prof. Martin Duncan, Presidente della società di microscopia di Londra (Journal of Microscopical Society, N. 39, april 1884) il quale disse doversi ritenere come vere; poichè da altri eziandio furono veduti parassiti e corpuscoli organici se-

non nelle monete, tuttavia contenute nello strato che riempie gli incavi dei manichi di utensili diversi, delle pinzette e di altri ordigni adoperati da lungo tempo nelle arti e negli usi domestici.

Castracane, Ab. F. – *Presentazione di una nota:*

Il Presidente Sig. Conte Ab. F. Castracane presentò da parte del socio corrispondente A. Certes una nota intitolata *De l'action des hautes pressions sur la vitalité des micro-organismes d'eau douce et d'eau de mer, par A. Certes.* In questa nota l'autore, che si sta ora occupando attorno ai materiali pescati a grandi profondità dal *Travailleur* e dal *Talisman* nelle loro scientifiche e ben conosciute spedizioni, espose brevemente il risultato di ulteriori esperienze da lui fatte sopra diversi organismi microscopici, sottoponendoli ad alte pressioni per un lasso di tempo che varia da sette ore a sette intieri giorni.

Noi sappiamo che tutti gli organismi terrestri si appropriano le spoglie di altri organismi disfatti, per poi cederli anche essi ad altri successivi fino a ridursi allo stato inorganico. Così può inferirsi dover accadere qualche cosa di simile anche nel fondo del mare. Ed il Certes ritiene che questo passaggio della materia dallo stato di perfetta organizzazione allo stato inorganico nel fondo del mare, venga fatto per opera di infusorii. Il Regnard peraltro è di parere che gli infusorii che vivono alla superficie del mare non possono vivere nelle profondità, a meno che essi si vadano lentamente abituando alla grande pressione del fondo marino e che per questi organismi esista colaggiù una speciale fauna abissale, come per tutti gli altri, per essere alimentati. Il Certes conviene in questo col Regnard, ed a provare la possibilità del passaggio degli infusorii dalla superficie al fondo del mare senza morire, fece delle concludentissime esperienze per ricercare qual'è l'effetto delle alte pressioni sugli organismi unicellulari, infusorii e microbi, che vivono alla superficie delle acque.

Determinate dapprima le specie d'infusorii e di micro-organismi, che egli sottoponeva alla pressione, trovò che alla pressione di 100 e 300 atmosfere mantenute per 7, 24, 48 e 72 ore, alcuni organismi rimanevano uccisi; altri uscivano dall'apparecchio così vivaci come vi erano entrati; altri infine cadevano in una specie di letargo. A 450 e 500 atmosfere il numero degli organismi viventi diminuisce; aumenta invece il numero degli organismi uccisi o caduti in letargo. Non è dunque impossibile che taluni organismi della superficie sottoposti a più forti pressioni e per un tempo anche più

prolungato non rimangano viventi. In seguito a così interessanti studi il Castracane narrò come tempo indietro ebbe da Edimburgo la notizia che in una cava di pietre sommersa e rimasta perciò inattiva e formante ora un piccolo porto chiuso, una società ha impiantato una stazione marina per lo studio di animali diversi. Nel mezzo di tale porto chiuso ha costruito uno stabilimeuto galleggiante con appositi laboratorii e gabbie parimenti galleggianti, ove si tiene dietro alla vita di molteplici e svariati esseri.

Egli crede potersi ivi eseguire importantissime esperienze anche per lo studio delle Diatomee. Espose il modo facile e prattico da lui più volte adoperato nella raccolta di quei minimi organismi; e consigliava di collocare per qualche tempo la melma raccolta a grandi profondità, in bacini molto larghi tenendoli esposti per un giorno non direttamente ai raggi del sole, ma soltanto alla luce. Per tal modo le Diatomee viventi verranno tutte alla superficie non solo, ma allo stato purissimo, e così si potrebbero avere senza fatica Diatomee viventi a grandi profondità; e mediante l'accennato processo verrebbero a conoscersi eziandio le leggi di riproduzione di tali micro-organismi.

Boncompagni, D. B. – *Presentazioni diverse*:

Il ch. Sig. Principe D. B. Boncompagni presenta all'Accademia da parte dell'autore vice-Ammiraglio Sig. Ernesto de Jonquières il manoscritto d'un lavoro intitolato: « *Étude arithmétique d'une équation indéterminée du troisième degré* » che viene stampato negli Atti della presente sessione. Il medesimo presenta anche da parte degli autori un esemplare diretto all'Accademia di ciascuna delle pubblicazioni seguenti: *Sur le problème de former un carré en ajoutant un cube à un nombre donné, par le* P. Pepin, S. J. – *Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif, par* Ph. Gilbert. – *Démonstration simplifiée des formules de Fourier, par* Ph. Gilbert: e da parte del P. Francesco Denza un esemplare dei fascicoli seguenti: *Bollettino decadico pubblicato per cura dell' Osservatorio centrale del real callegio Carlo Alberto in Moncalieri*, A. XII, n. 8–10. Bollettino mensuale pubblicato per cura dell'Osservatorio centrale del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri, Serie II, vol. III, n. VII, IX, XI: vol. IV, n. I e II.

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

1. Presentazione di lettera di ringraziamento e di ricevuta degli Atti da parte dell'Harvard College.
2. Id. da parte della Smithsonian Institution di Washington.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Ordinari: Conte Ab. Francesco Castracane, Presidente. – Prof. F. Ladelci. – P. F. S. Provenzali. – Prof. V. De Rossi Re. – D. B. Boncompagni. – Comm. C. Descemet. – Ing. A. Statuti. – Prof. G. Tuccimei. – P. G. Lais. – Dott. M. Lanzi. – P. G. Foglini.

Corrispondenti: P. G. Egidi.

Aggiunti: Ing. G. Giovenale. – March. L. Fonti.

L'Accademia apertasi legalmente alle ore 5 1/4 p. venne chiusa alle 7 p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Associazione meteorologica italiana. — Bollettino mensuale.* — Serie II, Vol. III, Num. VIII, IX, XI. Vol. IV, Num. I, II. Torino, 1884, in-4°.
2. —— *Bollettino decadico.* — A. XII, 1882—83, n. 8—12. Torino, 1884, in-8°.
3. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — Anno CCLXXXI 1883—84. — Serie terza. — Transunti, Vol. VIII, Fasc. 9, 11, 12. — Roma, 1883, In-4.°
4. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.* Vol. XIX, disp. 1, 2. Torino, 1883, in-8°.
5. *Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.* — T. II. — Serie VI. — disp. 3. — Venezia, 1883—84, in-8°
6. *Bulletin astronomique et météorologique de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro.* — Septembre 1881, n° 3. — Rio de Janeiro, 1881, in-4°
7. *Bullettin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou.* — A. 1883. — n° 2. — Moscou, 1883, in-8°
8. *Bullettino della R. Accademia medica di Roma.* — A. X. — n. 2. — Roma, 1884, in-8°
9. CERTES (A.) — *De l'action des hautes pressions sur la vitalité des micro-organismes d'eau douce et d'eau de mer.* Paris. 1884, in-8°
10. GILBERT (Ph.) — *Démonstration simplifiée des formules de Fourier.* — Bruxelles, 1883, in-8°
11. —— *Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif.* Bruxelles, 1883, in-8°.
12. *Il primo secolo della R. Accademia delle Scienze di Torino. Notizie storiche e bibliografiche.* 1783—1883. Torino, M.DCCC.LXXX.III, in-4°
13. *Johns Hopkins University Circulars.* — Vol. III, — N. 29. Baltimore, March 1884, in-4°.
14. *Journal de la société physico-chimique russe.* — T. XVI, n° 4. — St. Pétersbourg, 1884, in-8°
15. *La Civiltà Cattolica.* — Serie XII, Vol. VI, quad. 813, 814. — Firenze, 1884, in-8.°
16. LUVINI (G.) — *Sullo stato sferoidale.* — Torino, 1884, in-8.°
17. *Mémorie della Reale Accademia delle scienze di Torino.* — Serie Seconda, T. XXXV. — Torino MDCCCLXXXIV, in-4°.
18. *Osservazioni meteoriche fatte all'Osservatorio della R. Università di Genova.* — Ottobre —Decembre 1883.
19. PEPIN (Th.) — *Sur le problème de former un carré en ajoutant un cube à un nombre donné.* Bruxelles, 1882, in-8°.
20. *Polybiblion. — Revue bibliographique universelle. — Partie littéraire.* — II° série, to. XVIII, XL° de la collection. — IV° livraison, Avril. Paris, 1884, in-8.°
21. —— *Partie Technique.* — II° série, to. X, XLII° de la collection. — IV° livraison. — Avril. Paris, 1884, in-8°
22. REINSCH (P. F.) — *Beobachtung von Bakterien und einzelling Algen auf der Oberfläche der Kursirenden Geldmunzen.* Erlangen, 1884, in-8°.
23. *Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche* (Sezione della Società Reale di Napoli). A. XXIII, fasc. 3°. Marzo 1884, Napoli, 1884, in-4.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE VIIIª DEL 15 GIUGNO 1884

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

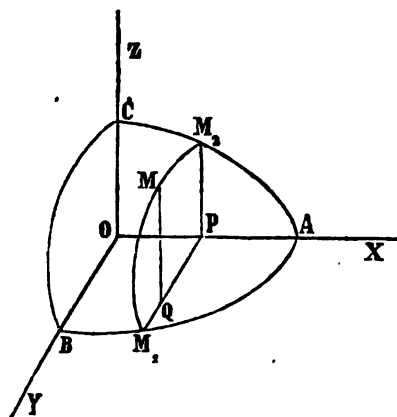
EQUAZIONI DELLE SUPERFICIE DI 2° ORDINE DEDOTTE DALLE LORO GENESI

NOTA

DEL PROF. MATTIA AZZARELLI

1. In questa breve nota ci proponiamo ricavare dalla genesi per moto geometrico di linee l'equazioni delle superficie di second'ordine.

Ellissoide

2. Sopra i piani coordinati xy, xz immaginiamo tracciate due ellissi le quali abbiano il centro all'origine delle coordinate, il semi-asse maggiore $OA = a$ comune, ed i semi-assi minori sieno respettivamente $OB = b$, $OC = c$.

Questi semi-assi sieno al tempo stesso quelli di una ellisse posta sul piano yz: immaginiamo ora che questa ellisse si stacchi dal piano, e conservandosi col suo piano parallela al piano zy, si muova col suo centro lungo l'asse delle x, e coi suoi vertici scorra lungo i perimetri delle due ellissi AM_1B,

AM_2C, che diremo direttrici, mentre la ellisse variabile sarà la generatrice. Per questo movimevto geometrico si genera una superficie, detta ellissoide a tre assi disuguali, e della quale si dimanda l'equazione.

La ellisse generatrice si consideri nella posizione qualunque M_1MM_1 onde i suoi semi-assi sieno al tempo stesso le ordinate delle ellissi direttrici corrispondenti ad una medesima ascissa. Sulla generatrice si prenda un punto qualunque M, che appartiene ancora alla superficie generata.

Sieno x, y, z le coordinate del punto M: è chiaro che per la ellisse generatrice avremo l'equazione

$$\frac{y^2}{\overline{PM}_1^2} + \frac{z^2}{\overline{PM}_2^2} = 1 \qquad (1)$$

e per le direttrici

$$\frac{\overline{PM}_1^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1; \quad \frac{\overline{PM}_2^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1. \qquad (2)$$

Dalle (2) deduciamo

$$\overline{PM}_1^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right); \quad \overline{PM}_2^2 = c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

che sostituiti nella (1) ne ricaviamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (3)$$

la quale rappresenta la superficie generata. Se in questa equazione poniamo

$$b = c$$

abbiamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

che è la ellissoide di rivoluzione intorno l'asse delle x: e se poniamo qui $x = a_1$ otteniamo

$$y^2 + z^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - a_1^2)$$

che rappresenta una circonferenza di raggio

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - a_1^2}$$

il quale è reale finchè è $a_1 < a$.

Se poi poniamo

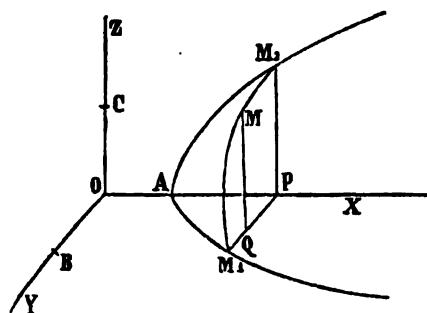
$$a = b = c$$

otteniamo

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad (3)$$

che rappresenta la sfera coll'origine delle coordinate al centro.

IPERBOLOIDE ELLITTICA A DUE FALDE.

3. Sopra i piani xy, xz s'intendano tracciate due iperbole il centro delle quali sia all'origine delle coordinate ed abbiano il semi-asse principale comune $OA = a$, ed i semi-assi secondari sieno respettivamente $OB = b$, $OC = c$.

S'intenda guidato un piano parallelo ad yz e ad una distanza OP maggiore di a; questo colle sue tracce ci darà le due ordinate corrispondenti ad una medesima ascissa quali sono PM_1, PM_2 delle due iperbole direttrici: si prendano queste due ordinate, per semi assi di una ellisse, che intenderemo essere destinata col suo centro a percorrere l'asse delle x, e coi suoi vertici di strisciare lungo le iperbole direttrici. Con questo movimento geometrico si genera una superficie detta iperboloide a due falde, mentre si deve intendere ripetuto il medesimo processo dalla parte delle ascisse negative.

Ponendo essere

$$OP = x, \quad PQ = y, \quad QM = z$$

le coordinate di un punto qualunque M della ellisse generatrice, e perciò della superficie generata, avremo per essa

$$\frac{y^2}{\overline{PM}_1^2} + \frac{z^2}{\overline{PM}_2^2} = 1 \qquad (4)$$

e per le iperbole direttrici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\overline{PM}_1^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{\overline{PM}_2^2}{c^2} = 1 \qquad (5)$$

dalle quali ricavati i valori di $\overline{PM}_1^2$, $\overline{PM}_2^2$ e sostituite nella (4) se ne deduce

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (6)$$

che rappresenta la iperboloide ellittica a due falde ed a tre assi disuguali.

Se porremo

$$b = c$$

otterremo l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

che appartiene alla iperboloide di rotazione intorno l'asse delle x.

Se infine facciamo

$$a = b = c$$

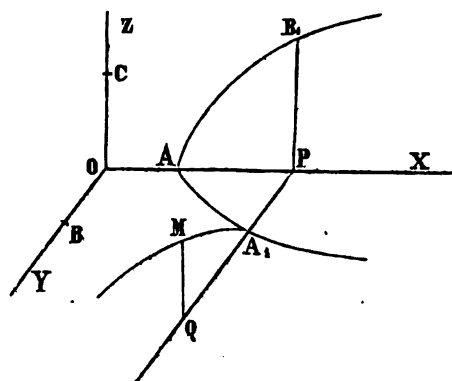
risulta

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

che è l'iperboloide ellittica ed equilatera.

Iperboloide iperbolica a due falde.

4. Sopra i piani coordinati xy, xz s'intendano costruite due iperbole, come nel caso antecedente, e sopra di un piano parallelo ad yz una iperbole che abbia per semi-assi variabili PA_1, PB_1 cioè le ordinate delle iperbole direttrici. Sulla iperbole generatrice si prenda un punto qualunque M di coordinate x, y, z.

Per la iperbole generatrice abbiamo

$$\frac{y^2}{\overline{PA}_1^2} - \frac{z^2}{\overline{PB}_1^2} = 1 \qquad (7)$$

e per le iperbole direttrici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\overline{PA}_1^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{\overline{PB}_1^2}{c^2} = 1 \qquad (8)$$

dalle quali

$$\overline{PA}_1^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right); \quad \overline{PB}_1^2 = c^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$

e quindi per la (7) troviamo facilmente

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (9)$$

Se qui poniamo $b = c$ abbiamo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 - z^2}{b^2} = 1$$

nel quale caso le iperbole direttrici sono eguali.

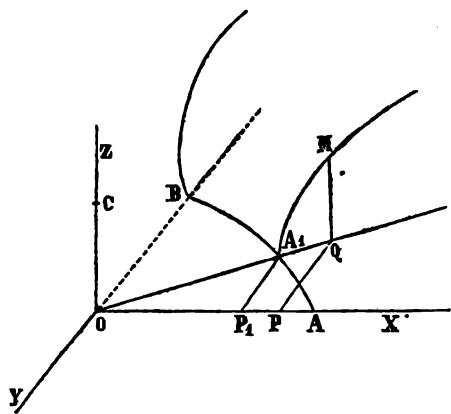
Crediamo notare che se nella (9) si pone $y = b$, si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{b_1^2}{b^2}$$

la quale rappresenta una ellisse di semi-assi determinati.

Iperboloide ad una falda.

5. Sul piano xy s'intenda costruita una ellisse di semi-assi.

$$OA = a, \quad OB = b.$$

Per l'asse z si conduca un piano qualunque COQ; questo colla sua traccia OQ taglia la ellisse in A_1; quindi intendiamo che sul piano medesimo, che dovrà ruotare intorno l'asse z, venga descritta una iperbole, il vertice della quale si debba trovare sempre sulla ellisse direttrice, ed abbia per semi-asse principale la distanza del punto A_1 del centro, e secondario $OC = c$. Con questo movimento geometrico si genera una superficie detta iperboloide ed una falda della quale si domanda l'equazione.

A questo fine sulla iperbole generatrice si prenda un punto qualunque M di coordinate

$$OP = x, \quad PQ = y, \quad QM = z$$

e così per essa avremo

$$\frac{\overline{OQ}^2}{\overline{OA}_1^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (10)$$

e per la ellisse direttrice, e poi triangoli simili

$$\left.\begin{aligned}\frac{\overline{OP}_1^2}{a^2}+\frac{\overline{P_1A}_1^2}{b^2}=1\\ \frac{P_1A_1}{OP_1}=\frac{y}{x}\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

dalle quali ricaviamo prontamente

$$\overline{OP}_1^2=\frac{x^2}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}};\quad \overline{P_1A}_1^2=\frac{y^2}{\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}}$$

le quali addizionate ci danno

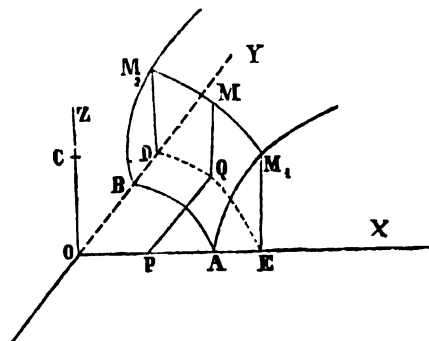
$$\overline{OA}_1^2=\frac{x^2+y^2}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}=\frac{\overline{OQ}^2}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$$

e quindi

$$\frac{\overline{OQ}^2}{\overline{OA}_1^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

e la (10) per questo valore diventa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\qquad(12)$$

che è l'equazione dimandata.

6. La generazione della iperboloide ad una falda può intendersi che avvenga ancora per mezzo di una ellisse variabile.

Poichè sul piano zx immaginata una iperbole di semi-assi

$$OA=a,\quad OC=c$$

e sul piano zy un altra iperbole di semi-asse principale $OB=b$, e secondario quello stesso c dell'altra iperbole, e facciamo quindi scorrere lungo l'asse delle z il centro di una ellisse variabile, conservandosi sempre in piani tra loro paralleli, ed i suoi vertici si muovano lungo le due iperbole direttrici, così viene generata la superficie iperboloide ad una falda.

Per avere l'equazione, sia M un punto qualunque della superficie generata, e nello stesso tempo della ellisse generatrice, per esso avremo

$$\mathrm{OP} = x,\ \mathrm{PQ} = y,\ \mathrm{QM} = z.$$

La ellisse ...M_1MM_2... ha sul piano xy una projezione ÈQD la quale è identica alla generatrice: dunque per essa abbiamo

$$\frac{x^2}{\overline{\mathrm{OE}}^2} + \frac{y^2}{\overline{\mathrm{OD}}^2} = 1;$$

per la iperbole direttrice sul piano zx

$$\frac{\overline{\mathrm{OE}}^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e per l'altra sul piano zy

$$\frac{\overline{\mathrm{OD}}^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dalle quali si trae

$$\overline{\mathrm{OE}}^2 = a^2\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right);\quad \overline{\mathrm{OD}}^2 = b^2\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)$$

che sostituiti danno l'equazione (12).

Se nella (12) facciamo $a = b$ avremo l'iperboloide a gola circolare

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

se la generatrice è la iperbole equilatera avremo

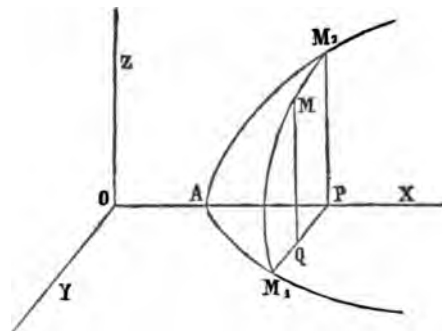
$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2.$$

Paraboloide ellittico.

7. Sopra i piani coordinati xy, zx s'intendano tracciate due perabole l'una AM_1 di parametro $2p$ e d'altra AM_2 di parametro $2p_1$, le quali abbiano il vertice nel medesimo punto A dell'asse delle x, e si ponga $OA = h$.

S'intenda guidato un piano parallelo a zy, il quale colle sue tracce segna le due ordinate PM_1, PM_2 delle parabole direttrici.

Le due ordinate si riguardino come semi-assi di una ellisse, e poniamo che questa si muova col suo centro lungo l'asse x, e coi suoi vertici sia

obbligata di percorrere le parabole direttrici, conservandosi sempre in piani paralleli a zy; per la ellisse generatrice abbiamo

$$\frac{y^2}{\overline{PM}_1^2} + \frac{z^2}{\overline{PM}_2^2} = 1 \qquad (13)$$

e per le parabole direttrici è

$$\overline{PM}_1^2 = 2p\,(x-h);\ \overline{PM}_2^2 = 2p_1\,(x-h) \qquad (14)$$

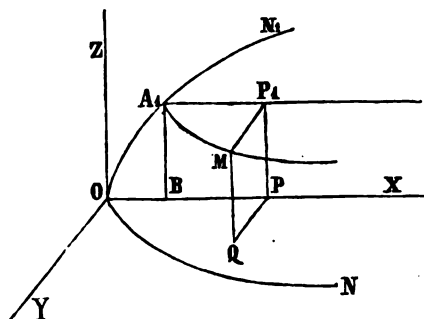
che sostituite nella (13) ci danno

$$\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2p_1} = x - h. \qquad (15)$$

Se qui poniamn $p = p_1$ la (15) si muta in

$$y^2 + z^2 = 2p\,(x-h)$$

che rappresenta il paraboloide di rotazione.

Il paraboloide ellittico si può intendere generato ancora dal movimento della parabola ...ON... di parametro $2p$ colla condizione che il suo piano si conservi parallelo al piano xy, e col suo vertice vada scorrendo lungo la parabola OA_1... di parametro $2p_1$. Si prenda un punto qualunque M sulla parabola generatrice, avremo evidentemente

$$OB + BP = x.$$

Ora per la parabola direttrice è

$$z^2 = 2p_1 \times OB$$

e per la genetatrice

$$y^2 = 2p \times BP$$

dalle quali

$$OB = \frac{z^2}{2p_1};\quad BP = \frac{y^2}{2p}$$

dunque, per la prima equazione, deduciamo

$$\frac{y^2}{2p} = \frac{z^2}{2p_1} = x.$$

PARABOLOIDE IPERBOLICO

8. Sul piano xy immaginiamo una parabola ON.... di parametro $2p$, e sul piano zx dalla parte delle ascisse negative un altra parabola OO_1... di parametro $2p_1$. Dopo ciò la parabola ON... generatrice, conservandosi sempre in piani paralleli ad xy, si faccia scorcol suo vertice lungo la parabola OO_1... e si supponga essere in una qualunque sua posizione O_1M.... Un punto M apparente nello stesso tempo alla generatrice ed alla superficie generata, ed essendo x, y, z le coordinate, avremo per la generatrice

$$y^2 = 2p \times O_1P_1 = 2p \times RP$$

e per la direttrice

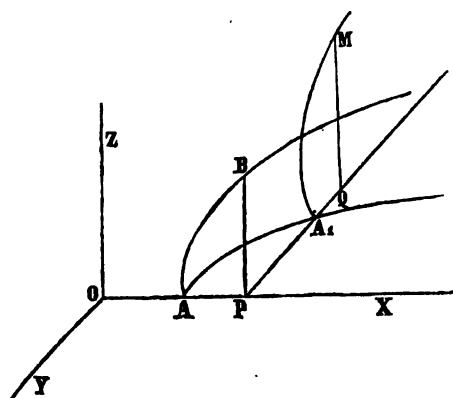
$$z^2 = 2p_1 \times OR :$$

ma

$$x = RP - RO$$

dunque sostituendo abbiamo

$$\frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2p_1} = x$$

Una equazione della stessa forma può appartenere ancora ad una superficie generata come segue.

Siano due parabole l'una sul piano xy come AA_1.... e l'altra sul piano zx. Per un punto qualunque P dell'asse delle ascisse si conduca un piano parallelo a ap, che colle sue tracce ci dà le due ordinate PA_1, PB.

Su questo medesimo piano immaginiamo una iperbole di semi-asse principale PA_1 e secondario PB.

Ora se facciamo percorrere alla iperbole l'asse delle x col suo centro, e coi suoi vertici la parabola che giace sul piano xy, otterremo una superficie della quale si domanda l'equazione.

Ritenute le solite denominazioni per la iperbole generatrice abbiamo

$$\frac{y^2}{\overline{PA}_1^2} - \frac{z^2}{\overline{PB}^2} = 1 \qquad (17)$$

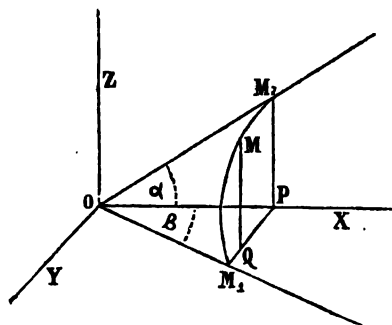
e per le due parabole direttrici

$$\overline{PA}_1^2 = 2p\,(x-h), \quad \overline{PB}^2 = 2p_1\,(x-h)$$

e quindi per la superficie generata

$$\frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2p_1} = x - h \qquad (18)$$

Cono ellittico

9. Siano due retti OM_1, OM_2 le quali facciano coll'asse delle x gli angoli α, β trovandosi sopra i piani xy, zx. Per qualunque punto P s'intenda guidato un piano parallelo al piano zy, ed esso cole sue tracce ci darà le ordinate PM_1, PM_2 alle due rette. Se queste rette le prenderemo per semi-assi di una ellisse, e quindi intendiamo che questa col suo centro si muova lungo l'asse delle x, e coi suoi vertici sia obbligata di trovarsi sempre sulle due rette, verrà generato il cono ellittico del quale si dimanda l'equazione.

Preso un punto qualunque M sieno x, y, z le sue coordinate; per la generatrice avremo

$$\frac{y^2}{\overline{PM}_1^2} + \frac{z^2}{\overline{PM}_2^2} = 1 \qquad (19)$$

e per le direttrici

$$PM_1 = x \operatorname{tang}\alpha; \quad PM_2 = x \operatorname{tang}\beta \qquad (20)$$

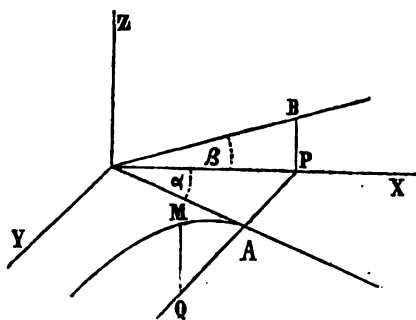
onde per l'equazione dimandata risulta

$$\frac{y^2}{\operatorname{tang}^2\alpha} + \frac{z^2}{\operatorname{tang}^2\beta} = x^2. \qquad (21)$$

Se poniamo qui $\alpha = \beta$, il cono ellittico passa ad essere circolare, e la sua equazione è

$$y^2 + z^2 = x^2 \operatorname{tang}^2\alpha$$

Cono iperbolico.

10. Poste le medesime rette direttrici, ed immaginato il piano parallelo a zy, i segmenti delle sue tracce PA, PB si prendano per semi-asse principale l'uno e secondario l'altro di una iperbole che col suo centro debba scorrere lungo l'asse delle x e coi suoi vertici lungo le rette direttrici. In questo movimento geometrico della iperbole si genera una superficie conica e per avere la sua equazione, osserveremo che la iperbole generatrice ci dà

$$\frac{y^2}{\overline{PA}^2} - \frac{z^2}{\overline{PB}^2} = 1. \qquad (22)$$

e per le rette direttrici

$$PA = x\operatorname{tang}\alpha; \quad PB = x\operatorname{tang}\beta \qquad (23)$$

che sostituiti nella (22) si ha

$$\frac{y^2}{\operatorname{tang}^2\alpha} - \frac{z^2}{\operatorname{tang}^2\beta} = x^2. \qquad (24)$$

Se $\alpha = \beta$ la iperbole generatrice diventa equilatera ma variabile, perchè tale è il suo semi-asse, e l'equazione si muta in

$$y^2 - x^2 = x\operatorname{tang}^2\alpha.$$

Cono parabolico.

11. Conservate le medesime denominazioni sul piano parallelo a zy s'immagini che una parabola col suo fuoco vada scorrendo lungi l'asse delle x e col suo vertice lungo la direttrice OA.

Per la generatrice abbiamo

$$z^2 = 4AP \times AQ \qquad (25)$$

e per le direttrici

$$AP = x\tan g\alpha; \quad AQ = AP - PQ = x\tan g\alpha - y \qquad (26)$$

e finalmente

$$z^2 = 4\tan g\alpha\,(x^2\tan g\alpha - xy) \qquad (27)$$

sarà l'equazione che rappresenta la superficie generata.

12. Fin qui abbiamo considerate le superficie di second' ordine nelle quali la generatrice era una linea del medesimo ordine; ora ci proponiamo assegnare una superficie di second' ordine per la quale le direttrici e le generatrici sono rette.

Siano due rette BM_1, CM_2 non parallele, e giaceuti in due piani differenti, cioè l'una sul piano xy, e l'altra sul piano zx.

Si ponga

$$OB = b, \quad OC = c$$

ed α, β siano le inclinazioni di esse rette all'asse delle x. S'immagini che una retta, conservandosi sempre parallela al piano zy, scorra lungo le due direttrici BM_1, CM_2 e pervennta nella posizione qualunqne M_1M_2 venga preso in essa un punto qualunque M di coordinate

$$OP = x, \quad PQ = y, \quad QM = z$$

Condotte le rette, come alle figura, dai triangoli simili abbiamo

$$\frac{PM_1}{PM_2} = \frac{PM_1 - PQ}{QM}; \qquad (28)$$

ma

$$PM_1 = b + x\tan g\alpha; \quad PM_2 = c + x\tan g\beta$$

e sostituite nella (28) ci danno, ponendo per comodo

$$\tan g\alpha = m, \quad \tan g\beta = n$$

la seguente

$$mnx^2 - mzx - nxy + (bn + cm)\,x - cy - bz + bc = 0) \qquad (29)$$

che rappresenta una superficie di secondo ordine, e precisamente un iperboloide. Se questa superficie si seziona per mezzo di un piano parallelo a zy, ponendo $x = h$, abbiamo

$$(nh + c)\,y + (mh + b)\,z - (mnh + bn + cm)\,h - bc = 0$$

che appartiena ad una retta: e quando si faccia $h + 0$ essa diventa

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

che è la retta generatrice, lorquando trovasi sul piano zy

Se facciamo una sezione parallela al piano zx col porre $y = k$ per la (29) avremo

$$mnx^2 - mzx + (bn + cm - nk)\,x - bz + bc - nk = 0$$

che appartiene ad una iperbole.

Quando si pone $k = 0$ si ottiene

$$mnx^2 - mzx + (bn + cm)\,x - bz + bc = 0$$

la quale facilmente si pone sotto la forma seguente

$$(mx + b)\;(nx + c - z) = 0$$

dalla quale

$$x = -\frac{b}{m};\; z = nx + c$$

che sono tutti i punti della superficie esistenti sul piano zx, perchè la prima ci dà il punto nel quale la direttrice BM_1 incontra l'asse delle x, e l'altra tutti i punti della direttrice CM_2.

Ponendo $z = l$ taglieremo la superficie con un piano parallelo ad xy, e per la linea d'intersecazione avremo

$$mnx^2 - nxy - (bn + cm - lm)\,x - cy + bc - bl = 0$$

che è un altra iperbole; e se qui poniamo $l = 0$ ne risultano le due seguenti

$$nx + c = 0;\quad mx + b - y = 0$$

la prima delle quali determina il punto R_2 e l'altra la direttrice BM_1 che sono tutti i punti che la superficie ha comuni col piano xy.

Se finalmente le due direttrici BM_1, CM_2 partono da un punto comune dell'asse delle x esse sono allora in uno stesso piano, e la superficie (29) deve ridursi ad un piano. Ora affinchè le due direttrici partano da uno stesso punto deve essere

$$OR_1 = OR_2 \text{ ovvero } \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$$

della quale

$$b = \frac{m}{n} c$$

Se questo valore si sostituisce nella (29) otteniamo

$$mnx^2 - mzx - nxy + 2mcx - cy - \frac{m}{n} cz + \frac{m}{n} c^2 = 0$$

la quale prende con facilità la forma seguente

$$(nx + c)\ (mnx - ny - mz + mc) = 0$$

che dà le due equazioni

$$nx + c = 0;\ mnx - ny - mz + mc = 0.$$

la prima ci dà un punto sull'asse delle x, e la seconda un piano ben determinato.

INTORNO AD UN'OPUSCOLO DI MONS.[re] BARTOLOMEO GRASSI-LANDI

NOTA

DEL P. F. S. PROVENZALI, D. C. D. G.

Il nuovo opuscolo che ha per titolo « *L'armonia dei suoni col vero corista o diapason normale. – Considerazioni di M.r B. Grassi-Landi* » (1) di cui vengo oggi a dare un breve conto all'Accademia, vuole essere considerato come la continuazione degli altri due opuscoli del medesimo Autore (2) già noti all'Accademia, perchè io stesso ebbi l'onore di presentarglieli indicandone sommariamente il contenuto (3). In queste due pubblicazioni aveva il Grassi solidamente stabilite le basi di una teoria scientifica della musica, dimostrando che la formazione dei suoni armonici si fa sempre conforme alla legge dei suoni di periodo o vogliamo dire di *ottava*; colla sola differenza che nei suoni di periodo la coincidenza degli impulsi ricevuti dall'organo dell'udito avviene dopo un numero doppio, quadruplo di vibrazioni, mentre negli altri accordi perfetti tale coincidenza si effettua dopo il doppio, il quadruplo ecc., o la metà, il quarto ecc., di una frazione del numero delle vibrazioni che costituiscono il suono fondamentale: così rimaneva determinata la causa fisica della sensazione piacevole che destano in noi le consonanze musicali.

Dopo ciò era bene da aspettarsi che l'A. non si sarebbe arrestato davanti a quelle molte e gravi questioni, che sebbene lungamente discusse dai più valenti cultori della musica, pure non hanno ancora ricevuta una completa soluzione. Di tali questioni quella che presenta un interesse tutto speciale è la scelta del corista *normale*, cioè di un corista da cui tutti possano e debbano prendere le mosse per regolare l'accordo dei diversi strumenti fra loro e colle voci. Recentemente siffatta questione fu ripresa con grande ardore da molte Accademie ed Istituti musicali, tanto in Italia che in Francia, Germania, Belgio ed in altri luoghi, ove anche i Governi nominarono Commissioni e Comitati affine di agevolarne la soluzione. Ma i risultati finora ottenuti non sono molto soddisfacenti e solo fanno vedere sempre più chia-

(1) Roma — Tipografia Vaticana 1885.

(2) Descrizione della nuova tastiera cromatica ed esposizione del nuovo sistema di scrittura musicale, invenzione del Sac. Bartolomeo Grassi-Landi. Roma Tipografia di Roma 1880. — L'armonia considerata come vera scienza ossia dimostrazione delle leggi fisiche dell'Armonia. Milano, Calcografia Musica Sacra 1881.

(3) V. Atti dell'Accad.[a] Pont.[a] de'Nuovi Lincei. Anno XXXV. Sess. 1[a], Dec. 1881.

ramente quanto sia necessario che si adotti ovunque un corista unico e tale che secondo le leggi fisiche dei suoni possa servire di norma sicura ed invariabile per l'accordatura delle voci e degli strumenti. Le ragioni del poco successo che hanno avuto le diverse Commissioni incaricate di scegliere il corista normale vengono indicate dal Grassi nella prima parte del nuovo Opuscolo, nella quale dimostra che le vie fin qui tenute da quelle Commissioni non potevano condurre al termine desiderato, perchè i loro punti di partenza furono i dati della pratica e dell'arte, sempre incerta e soggetta a variare a seconda delle circostanze e dei tempi.

Nella seconda parte l'A. passa a mostrare che per decidere la questione del corista normale non basta tener conto della gravità ed acutezza del suono in ordine alle voci ed agli strumenti; ma bisogna sopratutto avere in mira le relazioni che hanno i diversi suoni fra loro, di maniera che il suono reso dal corista soddisfi perfettamente alle proprietà naturali o leggi fisiche di tutti gli altri suoni che concorrono a formare gli accordi e le armonie. Coteste leggi furono scoperte dal Grassi e quanto al principio fondamentale, come di sopra indicai, furono esposte da Lui e dimostrate nelle precedenti pubblicazioni. Solo gli rimaneva di generalizzare la sua scoperta applicando quel principio alle diverse proporzioni o *ritmi* corrispondenti a tutti gli accordi tanto maggiori che minori. A tale scopo è diretta la terza parte dell'Opuscolo, nella quale l'A. partendo dai risultati ottenuti coi corpi sonori e specialmente col *monocordo*, riduce a tre le diverse specie di ritmo musicale. Nella prima specie, oltre i suoni di periodo, comprende i suoni frazionari che si succedono per raddoppi di quarti, quali dimostra essere la *quinta* ed il suo *rivolto* cioè la *quarta*, e la *terza* ed il suo *rivolto* ossia la *sesta*. Infatti dividendo una corda in tre parti eguali, ciascuna di queste parti od una di esse raddoppiata produce un suono che nella scala cromatica rappresenta il settimo intervallo e nella diatonica la *quinta maggiore*. Per conoscere il ritmo di vibrazione di questa quinta basterà osservare che paragonata col suono fondamentale e coi suoni di periodo si hanno i rapporti $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{12}{8}$,... e per conseguenza che il numero delle vibrazioni della *quinta* si ottiene aggiungendo una sua metà al numero delle vibrazioni del suono di periodo.

Che se invece di dividere la corda in tre parti si divida in cinque parimenti eguali, ciascuna di esse od il suo raddoppio dà un suono intermedio fra il suono fondamentale e la *quinta*, che corrisponde ad un quarto grado della scala cromatica ed alla *terza maggiore* della diatonica. La proporzione delle vibrazioni di questa terza dovendo essere media aritmetica

fra quella del suono fondamentale e della *quinta*, nello stesso modo che questa è media aritmetica fra il suono fondamentale e *l'ottava*, sarà $\frac{5}{4}$, $\frac{10}{8}$, $\frac{20}{16}$,... che messa a confronto colla proporzione della *quinta* $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{12}{8}$, e ridotte ambedue a frazioni miste, danno $1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{4}$ per la *quinta* ed $1 + \frac{1}{4}$ per la *terza*. Onde resta provato che il ritmo dell'accordo perfetto, consistente nella *tonica*, *terza maggiore*, *quinta* ed *ottava* segue la legge del raddoppio delle vibrazioni ed il suo ritmo è di raddoppi per quarti, ossia

do	*mi*	*sol*	*do*
$1,$	$1 + \frac{1}{4},$	$1 + \frac{2}{4},$	$1 + \frac{4}{4}$

Continuandosi a dividere la corda l'A. osserva che il suono ottenuto colla divisione in sette parti eguali paragonato a quello già ottenuto colla disione in tre parti, occupa un posto intermedio fra la *quinta* ed il complemento del periodo ossia *l'ottava*. Se questo suono che nella scala cromatica occupa il decimo grado e nella diatonica il settimo, epperò chiamasi *settima diminuita* o meglio *settima di dominante*, si aggiunge all'accordo perfetto p. e. *do*, *mi*, *sol* ne guasta il ritmo e fa sentire il bisogno di *risólvere* la nuova combinazione in altro accordo perfetto. La ragione di ciò fu trovata dal Grassi mediante il confronto del primo ritmo per raddoppi di quarti colla proporzione della *settima di dominante*, cioè $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$. Considerando cioè che questa *settima* dista $\frac{3}{4}$ dalla fondamentale. $\frac{2}{4}$ dalla *terza maggiore* ed $\frac{1}{4}$ dalla *quinta*, postó che la fondamentale sia p. e. un *do* di 32 vibrazioni si avrebbe

do	*mi*	*sol*	*si*^{b}	*do*
32,	**32 + 8 = 40,**	**32 + 16 = 48,**	**32 + 24 = 56,**	**64**

d'onde apparisce che il *sibemolle* non segue la legge dei raddoppi per quarti, epperò guasta il ritmo degli altri tre consoni colla fondamentale. Quindi la necessità di *risolvere* in altri suoni, che nel caso presente saranno *do*, *fa*, *la* ossia in *quarta* e *sesta*, nei quali l'A. riscontra la seconda specie di ritmo per raddoppi di terzi; essendo cosa manifesta che se 1 rappresenta la fondamentale o *tonica*, la *quarta* e la *sesta* saranno rappresentate da

$$1 + \frac{1}{3} \text{ ed } 1 + \frac{2}{3}$$

Se ci facciamo ad esaminare questa *risoluzione*, dice il Grassi, si vedrà che non è casuale, ma segue una legge invariabile. I due suoni producenti la *risoluzione* non fanno che andare nei propri consoni, coi quali formano ritmo. Nel caso pratico sopra esposto i due suoni sarebbero *mi* di 40 vibrazioni e *sibemolle* di 56. I consoni di questi due suoni saranno la *quinta* o la *quarta* suo rivolto, ovvero la *terza maggiore*. Non potrebbero essere i loro suoni di periodo, perchè non si potrebbe mai effettuare la risoluzione; e neppure la *quinta* o la *quarta* in *moto retto*, che riprodurrebbero altro intervallo consimile. La *risoluzione* si fa perciò in movimento contrario e quindi il *mi risolve* in *la* sua *quarta* ed il *sibemolle* in *fa*. Anche la fondamentale partecipa a questa combinazione, quantunque sembri non risolvere, pure anche essa soffre un cambiamento e passa nel suo consono d'*ottava* e diventa *quinta*. La ragione di questa risoluzione sta nel nuovo ritmo messo in essere dalla *settima di dominante*. Questa quinta nelle due suddette combinazioni si chiama pure *dominante* perchè fa parte di ambedue le combinazioni producente e prodotta e perchè in una composizione di musica *domina* la tonalità per la sua facile riproduzione.

Senonchè l'A. acutamente osserva che questa supremazia della *quinta* nelle suddette combinazioni si debba piuttosto ripetere da un fatto di grande rilievo ed è che la *quinta* (dicasi lo stesso della *terza maggiore*) partecipa di ambedue le specie di ritmo per raddoppi frazionari di quarti e di terzi, secondo che si considera per fondamentale il primo termine dell'intervallo o come rivolto il secondo. Di fatto vede ognuno che preso per *base* il *fa* i suoni in cui *risolve* la *settima di dominante* ossia *fa*, *la*, *do*, *fa* sono consoni con essa, perché *fa* è la *quinta* di *sibemolle*, e *la* è la *quinta* di *mi*, nello stesso modo che *do* diventa la *quinta* del nuovo accordo. Questa legge spiega la corrispondenza dei due ritmi per terzi e quarti nonche la successione degli accordi o *tonalità* per *quarta* e per *quinta*, ed è la chiave di tutta l'armonia considerata come scienza.

Passando alla terza specie di ritmo, che è proprio dell'*accordo minore*, l'A. prende a punto di partenza la divisione della corda in nove parti eguali. Il suono che si ottiene da ciascuna di queste parti supera di un grado il suono di periodo, onde può chiamarsi *re* ed il numero delle sue vibrazioni paragonato con quello della tonica sarà $\frac{9}{8}$, corrispondenti ad $1 + \frac{1}{9}$ cioè ad una nona parte più della fondamentale. Quindi osservando che l'accordo minore *sol*, *si*^{b}, *re* prodotto dalla divisione per nove, offre degli intervalli che sono alle medesime distanze, ma in ordine inverso con

quelli dell'accordo perfetto *do*, *mi*, *sol* ne deduce che siccome per conoscere la legge con cui si succedono le vibrazioni nell'accordo fu perfetto necessario determinare il rapporto fra la *terza maggiore* e la fondamentale e fra questa e la *quinta* e la *terza*; così per conoscere la legge con cui si succedono le vibrazioni nella combinazione *sol*, *si*^{b}, *re* si dovranno esaminare i rapporti non solo di *re* con *sol*, ma eziandio di *sibemolle* con *sol* e con *re*. Ora la base *sol* di questo accordo essendo rappresentata dal numero 6, la *terza minore* lo sarà da $\frac{7}{6}$, cioè da un sesto più della base e la quinta da $\frac{9}{6}$ ossia da due sesti più della *terza minore* e da tre sesti più della base; onde ad un *sol* di 24 vibrazioni corrisponderà un *sibemolle* di 28 en un *re* di 36.

La diversità di questo ritmo in confronto con quello maggiore sta nella terza, le vibrazioni della quale non hanno con quelle della *base* e della *quinta* lo stesso rapporto che nell'accordo perfetto maggiore. Gli incontri delle vibrazioni nella *terza maggiore* si effettuano ogni quattro vibrazioni della fondamentale e quelli della *terza minore* ogni sei; quelli poi della *quinta* si fanno ogni due vibrazioni della *base* tanto nell'accordo perfetto maggiore quanto nel minore: onde gli incontri della *terza* sono più frequenti nell'accordo perfetto maggiore che nel minore; come anche apparisce da ciò che la *terza maggiore* divide l'intervallo di *quinta* in due parti e quella *minore* in tre. Da questa mancanza di relazione completa colla *quinta* e colla *base* nasce la diversa impressione generata in noi dall'accordo minore, che sebbene sia piacevole anche esso, puro è sempre accompagnato da un senso di mestizia e direi quasi di dolore, prodotto appunto da quella specie di salto o di zoppicatura che lo caratterizza.

I fatti esaminati fin qui dall'A. sono sufficienti per potere da essi rilevare le leggi tutte de'suoni armonici e le diverse specie di ritmo regolatore della musica. Le considerazioni che aggiunge sul *temperamento* sono di ciò una conferma manifesta, perchè dimostrano che, senza ricorrere alle frazioni di vibrazione, coi soli sperimenti sui corpi sonori si possono valutare le più piccole differenze, sia nel passare dall'uno all'altro accordo, sia nello stabilire la proporzione di qualunque semitono. Per tale maniera si evita l'errore comunemente commesso nel calcolare i semitoni col rapporto $\frac{16}{15}$, il quale sebbene divida esattamente per metà l'intervallo fra *sibemolle* e *do*, adoperato per determinare il semitono p. e. fra *do* e *re*, fra *re* e *mi* dà un *do diesis* ed un *re diesis* crescenti nel rapporto di $\frac{16}{15}$ a $\frac{17}{16}$ nel primo caso e di $\frac{16}{15}$ a $\frac{19}{18}$ nel secondo. La ragione di ciò è mani-

festa perchè a misura che i suoni si avvicinano alla metà o al termine del periodo le proporzioni delle vibrazioni diminuiscono. Infatti diviso il periodo in quattro parti, nel primo quarto sono compresi 4 semitoni e nel secondo quarto 3. Raggiunta così la metà del periodo il terzo quarto ne comprende parimenti 3 e l'ultimo solo due.

Dopo ciò l'A. passa ad assegnare la ragione perchè fra i numeri che si considerano come fattori dei suoni armonici non figurano nè il numero 11 e il 13, nè il 22 e il 23. Quanto ai numeri maggiori di 24 è cosa evidente che non c'era bisogno di considerarli, perchè le proporzioni che se ne ottengono conducono a dei quarti di tono inutili per la musica. Quindi conchiude questa terza parte dell' Opuscolo con una tavola nella quale sono graficamente rappresentate le relazioni fra le dimensioni dei corpi sonori ed i suoni da essi generati. Per tale maniera può ciascuno a colpo d'occhio convincersi dell'ordine mirabile che regna in quelle relazioni e della perfetta simmetria delle operazioni numeriche adoperate a stabilirle.

Nella quarta ed ultima parte dell'Opuscolo Mons. Grassi venendo a trattare la questione del corista *normale*, primieramente osserva che questo corista non solo deve rappresentare un suono che sia medio nella scala dei suoni, ma deve di più essere tale che possa servire di punto di partenza per l'esatta accordatura di tutte le voci e di tutti gli strumenti. Quanto alla condizione di rappresentare un suono intermedio rapporto all'estensione delle voci e degli strumenti, questa condizione non fu mai trascurata da che si cominciò a fare uso del corista; per la ragione che l'accordo o il disaccordo di due suoni meglio si percepisce quando i suoni che si confrontano sono vicini fra loro che quando sono lontani. Ma l'estensione delle voci e degli strumenti non essendo compresa entro limiti fissi e determinati, il grado medio dei suoni non si potrebbe con esattezza determinare se non si avessero dei dati scientifici che ce lo indicassero; od in altri termini se non si tenesse conto della seconda condizione che è di trovare un suono corrispondente a tutti gli accordi. L'A. passa quindi a dimostrare che fra i numeri appartenenti al periodo medio, cioè al quarto nella scala dei suoni, i soli che possono esprimere il ritono de' suoni di periodo sono i seguenti:

768, 784, 800, 816, 832, 864, 880, 896, 912, 918.

che rappresentano i suoni più gravi che potrebbero corrispondere a

48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57 e 58 vibrazioni

Ciascuno di cotesti coristi potrebbe dirsi *normale* per l'accordatura dei suoni di periodo che gli corrispondono (1). Ma coi soli suoni di periodo non si ottiene armonia propriamente detta, ci vogliono anche i suoni frazionari, onde dai numeri che rappresentano i suoni di periodo bisognerà escludere tutti quelli che non combinano colle proporzioni degli altri accordi. Da quanto si è detto di sopra chiaramente apparisce che avuto riguardo alla proporzione della *quinta* si dovranno escludere i numeri non divisibili per due, ed avuto riguardo alla proporzione della *terza maggiore* dovranno escludersi quelli che non si possono dividere per quattro; sicchè i numeri che rimangono sono 48, 52 e 56 per i suoni più gravi e 60, 64, 68, 72, 80, ecc., per i meno gravi e gli acuti. Considerando poi che se da questa serie si eliminino i numeri non multipli di sei, quelli che rimangono soddisfano al ritmo dell'accordo minore ed insieme alle proporzioni della *quarta*, *sesta* e *settima di dominante* che richiedono numeri divisibili per tre, l'A. conclude che fra tutti i summultipli del periodo medio dei suoni i soli che posseggono le qualità richieste nel corista tipo della perfetta accordatura dei suoni sono il 48, il 60 ed il 72.

Limitata così la scelta del corista normale fra tre numeri formanti un accordo perfetto, nel quale il 48 rappresenta la *base*, il 60 la *terza maggiore* ed il 72 la *quinta*, non poteva rimanere alcun dubbio che il primo deve preferirsi agli altri due. Ecco come Mons. Grassi è pervenuto a dimostrare che il 48, raddoppiato fino a raggiungere il periodo medio, cioè 768, ci dà il numero delle vibrazioni che ad ogni minuto secondo ha da fare un corista affinchè possa e debba dirsi *la vera norma* dell'accordatura dei suoni musicali.

E qui non voglio omettere di notare che i tre numeri 48, 60, e 72 a cui giunse il Grassi per via di raziocini rigorosamente concludenti sono una splendida conferma della legge da Lui stabilita che il ritmo per raddoppi di terzi, quarti e sesti è il principio fondamentale dell'accordatura. Già da lungo tempo indipendentemente da ogni considerazione scientifica si erano scelti per vari coristi dei numeri molto prossimi al 768 (2) ed i trattatisti che si occuparono delle vibrazioni acustiche presero quasi sempre il 48 per punto di partenza d'onde giungere a fissare i gradi della scala

(1) Tali sono p. e. il corista di 864 vibrazioni approvato dal Congresso di Milano del 1881 e adottato dall'esercito italiano, e quello di 880 proposto dal Congresso di Stoccarda.

(2) Fra questi coristi merita di essere nominato quello della Cappella Giulia in S. Pietro in Vaticano che più di ogni altro si accosta alle 768 vibrazioni.

se non cromatica almeno diatonica. Se v'è in ciò qualche discrepanza fra gli antichi scrittori di musica tanto sacra che profana, quasi unicamente si riduce nel considerare il *mi* di 80 ovvero 81 ed il *fa* di 84 ovvero 85 vibrazioni; come pure nel considerare la *quinta* crescente, la *quarta* e *settima* calante cose tutte dimostrate giuste ogni qual volta siasi stabilito il punto di partenza dè suoni, voglio dire il corista naturale. Ritornando dunque all'antico come nelle scienze razionali e morali così anche nella musica si avrà il vero progresso.

Qui fo termine alla mia relazione coll'esternare il desiderio e la speranza che Monsignore Grassi-Landi dopo avere felicemente applicate le leggi de suoni da Lui scoperte alla determinazione del corista normale, continuando a svolgere quelle leggi in ordine all'armonia ed al contrappunto, arrivi presto ad eliminare quanto v'ha di vago ed inesatto nell'insegnamento teorетico e pratico della musica.

NB. Questa nota venne dall'A. presentata nella Sessione 5ª dell'anno XXXVIII: ma per sollecitarne la pubblicazione è stata inserita nel presente fascicolo.

THÉORIE DES FONCTIONS HOMOGÈNES DU TROISIÈME DEGRÉ, À DEUX VARIABLES.

PAR LE P. TH.^LE PEPIN, S. J.

1. Les fondements de la théorie des formes cubiques binaires ont été posés par Eisenstein, en 1844, dans une Note écrite en français, et dans deux Mémoires, en langue allemande, qui font partie du 27^me volume du Journal de Crelle (p. 73, 89, 319). Eisenstein appelle forme cubique la fonction homogène

$$1. \qquad f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

dans laquelle a, b, c, d désignent des nombres entiers donnés et x, y des nombres entiers variables. Lorsqu'on considère la forme cubique f, en faisant abstraction des valeurs attribuées aux variables, on la représente par la formule

$$2. \qquad f = (a, b, c, d);$$

mais lorsqu'on veut tenir compte des variables, on la désigne par la notation suivante

$$3. \qquad f = (a, b, c, d)\,(x, y)^3.$$

Cette dernière notation n'a pas été employée par Eisenstein; elle est un cas particulier des notations introduites par M. Cayley, dans la théorie des fonctions homogènes.

Eisenstein a découvert les propriétés de l'invariant, du covariant quadratique et du covariant cubique de la fonction homogène du troisième degré à deux variables; l'invariant est appelé par lui *déterminant*, et le covariant quadratique, changé de signe, est la *forme déterminante* de la forme cubique.

2. Les propriétés de ces formes associées à la forme cubique f ont été démontrées par Eisenstein dans son dernier Mémoire sur les formes cubiques binaires, publié sous le titre: *Propriété des formules qui servent à résoudre les équation cubiques* (Crelle, t. 27, p. 319). Eisenstein y considère conjointement avec la forme cubique f, les deux fonctions

$$4. \qquad F = Ax^2 + Bxy + Cy^2,$$

$$5. \qquad \Phi = \alpha x^3 + 3\beta x^2y + 3\gamma xy^2 + \delta y^3,$$

dont les coefficients sont liés avec ceux de la forme f, par les formules suivantes

$$
(6.)\quad \begin{cases} A = b^2 - ac, \; B = bc - ad, \; C = c^2 - bd, \\ \alpha = 3abc - a^2d - 2b^3, \; \beta = abd - 2ac^2 + b^2c, \\ \gamma = dca - 2db^2 + bc^2, \; \delta = 3bcd - ad^2 - 2c^3. \end{cases}
$$

Il démontre que, si l'on transforme en même temps les trois fonctions f, F, Φ au moyen d'une substitution linéaire, dont le module soit égal à l'unité, les relations entre les coefficients des fonctions transformées sont les mêmes qu'entre les coefficients des fonctions primitives. C'est la propriété caractéristique des covariants et le théorème fondamental de la théorie des formes binaires.

Eisenstein a aussi démontré cette propriété remarquable de l'invariant, savoir que l'invariant du covariant cubique est le cube de l'invariant de la forme f. On a (Crelle, t. 27, p. 105).

$$(a^2d^2 - 3b^2c^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 6abcd)^3 = \alpha^2\beta^2 - 3\beta^2\gamma^2 + 4\alpha\gamma^3 + 4\,\delta\beta^3 - 6\alpha\beta\gamma\delta\,;$$

les substitutions renfermées dans les formules (6) réduisent cette relation à une identité.

2. Lorsque les coefficients a, b, c, d sont des nombres entiers, comme nous le supposons ici avec Eisenstein, un problème important se présente, comme dans la théorie des formes quadratiques binaires, savoir de trouver pour un déterminant donné un système de formes cubiques, auxquelles sont équivalentes toutes les formes cubiques du déterminant considéré. La solution de ce problème a été ébauchée par Eisenstein.

Dans sa Note en langue française (Crelle, t. 27, p. 75) Eisenstein prend pour forme déterminante de la forme cubique f, la forme quadratique $F = (A, B, C)$, dont les coefficients sont déterminés par les formules

$$(\alpha).\qquad A = b^2 - ac, \; 2B = bc - ad, \; C = c^2 - bd,$$

et il appelle déterminant de la forme cubique f, le déterminant $B^2 - AC$ de la forme déterminante (A, B, C). Comme les relations précédentes, entre les coefficients des deux formes f, F ne changent pas lorsqu'on transforme ces deux fonctions par une même substitution linéaire, dont le module soit égal à l'unité, on a ce théorème :

A une classe entière de formes cubiques équivalentes correspond toujours une classe entière de formes quadratiques, et toutes les classes cubiques si distribuent sur diverses classes quadratiques.

Si les nombres a, b, c, d sont donnés, les formules (α) donnent toujours une forme déterminante (A, B, C) et une seule. Mais si l'on donne les trois nombres A, B, C, il n'est pas toujours possible de trouver quatre nombres entiers a, b, c, d qui vérifient les équations (α). Dans le note citée, Eisenstein énonce à ce sujet le théorème suivant :

« *Soit* D *un déterminant quelconque, mais sans diviseur carré. Distinguons parmi les classes du genre principal celles qui, par leur triplication produisent la classe principale. Je dis que pour ces classes il existera toujours une classe cubique qui leur correspondra, et que pour chacune d'elles il n'en existera qu'une seule, tandis qu'aucune classe cubique ne correspondra au reste des classes quadratiques, ni dans le genre principal ni dans les autres genres.*

Il faut remarquer que le déterminant D dont il est ici question n'est que le quart de l'invariant exprimé par la formule

$$7. \quad (bc - ad)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) = a^2d^2 - 3b^2c^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 6abcd.$$

Ce théorème qui donne la clef de la classification des formes cubiques, n'est pas entièrement exact. Nous verrons en effet que, pour un déterminant positif, trois classes cubiques distinctes correspondent à une même classe quadratique. De plus, lorsque le déterminant est négatif, quoiqu'il soit sans diviseur carré, des formes cubiques peuvent correspondre à des formes quadratiques qui n'appartiennent ni au genre principal, ni même à l'ordre proprement primitif. Il semble qu'Eisenstein ait reconnu lui-même qu'il s'était trop avancé; car dans le Mémoire où il développe sa théorie (*Crelle*, t. 27, p. 89), il restreint son théorème au cas où l'invariant est le quadruple d'un nombre premier p affecté du signe négatif :

« *Si* p *est un nombre premier de la forme* $4n + 3$, *et que le déterminant* $-$p *soit régulier, chacune des classes de formes quadratiques qui, par leur triplication, donnent la classe principale, correspond à une classe de formes cubiques de déterminant* -4p *et aucune classe cubique ne correspond aux autres classes quadratiques* ».

Ce théorème, quelque restreint qu'il soit, est encore inexact; nous montrerons que la dernière partie doit en être supprimée. On voit par cet

aperçu combien peu est avancée la théorie des formes cubiques binaires au point de vue de leur classification. Leur théorie analytique est plus complète, grâce aux travaux des géomètres éminents qui se sont occupés des formes binaires. Nous commencerons par donner un résumé succinct de cette dernière théorie, avant d'aborder la théorie arithmétique, qui est l'objet propre de notre étude.

Théorie analytique des formes cubiques binaires.

1. Lorsqu'on applique à la forme cubique

$$f = (a, b, c, d)\ (x, y)^3$$

la théorie générale des formes binaires, on trouve qu'elle n'a qu'un seul invariant fondamental, savoir le déterminant

$$D = (bc - ad)^2 - 4\,(b^2 - ac)\ (c^2 - bd),$$

et deux covariants fondamentaux, le covariant quadratique et le covariant cubique. Le covariant quadratique, ou *Hessien*, est défini par la formule

$$H(f) = \frac{1}{36} \begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dx^2}, & \frac{d^2f}{dxdy} \\ \frac{d^2f}{dxdy}, & \frac{d^2f}{dy^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax + by, & bx + cy \\ bx + cy, & cx + dy \end{vmatrix}$$

$$H(f) = (ac - b^2)\ x^2 + (ad - bc)\ xy + (bd - c^2)\ y^2.$$

Le covariant cubique est

$$J = (a^2d - 3abc + 2b^3, abd + b^2c - 2ac^2, 2b^3d - acd - bc^2, 3bcd - ad^2 - 2c)\ (x, y)^3.$$

Monsieur Cayley a établi entre la forme f, son invariant D et ses deux covariants fondamentaux H, J la relation suivante

$$J^2 - DF^2 = -4H^3,$$

d'où l'on déduit que le quadruple du cube d'un nombre représenté par le covariant Hessien, changé de signe, est représenté par la forme quadratique principale de déterminant D. Ce dernier théorème a été démontré directement dans le § 5 du Mémoire d'Eisenstein.

On déduit de la dernière formule une autre conséquence, savoir que, si le déterminant D est négatif, le covarient quadratique H est une forme négative. Afin d'éviter les formes négatives, nous prendrons pour covariant quadratique de la forme f, le covariant Hessien, changé de signe, c'est-à-dire la fonction

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

qu'Eisenstein appelle déterminante et dont les coefficientes sont exprimés en fonction de ceux de la forme cubique (a, b, c, d) par les formules

$$7. \qquad A = b^2 - ac, \quad B = bc - ad, \quad C = c^2 - bd.$$

5. La théorie des formes cubiques binaires conduit naturellement au Théréme d'Eisenstein relativement au cube du déterminant, savoir que ce cube est le déterminant d'une forme cubique dont les coefficientes sont des fonctions entières, du troisième degré, des coefficients de la forme cubique considérée. En effet, les invariants des covariants d'une forme binaire sont des invariant de cette forme elle-même; par conséquent ce sont des fonctions rationnelles et entières des invariants fondamentaux de cette forme. Or, dans le cas d'une forme cubique, il n'y a qu'un seul invariant fondamental, savoir le déterminant. Tous les invariants d'une forme cubique binaire sont donc des fonctions entières du déterminant D, multipliées par des facteurs numériques, indépendants des coefficients a, b, c, d de la forme f. Ainsi l'invariant du covariant quadratique est, à un facteur numérique près, égal à l'invariant D de la forme f. L'invariant de la forme cubique J doit être de la forme mD^i, m et i désignant deux nombres entiers que l'on détermine de la manière suivante.

Posons

$$8. \quad \begin{cases} \alpha = a^2d - 3abc + 2b^3, & \beta = abd + b^2c - 2ac^2, \\ \gamma = 2b^2d - acd - bc^2, & \delta = 3bcd - ad^2 - 2c^3. \end{cases}$$

Nous devons avoir identiquement par rapport aux lettres a, b, c, d, la relation

$$\alpha^2\delta^2 - 3\beta^2\gamma^2 + 4\alpha\gamma^3 + 4\delta\beta^3 - 6\alpha\beta\gamma\delta = mD^i.$$

Or le premier membre est du douzième degré relativement aux quatre coefficients a, b, c, d; il doit en être de même du second membre, et, comme D est du quatrième degré, l'exposant i est égal à 3; enfin en éga-

lant entre eux les termes en a^6 dans les deux membres, on trouve $m = 1$. On a donc conformément au théorème d'Eisenstein

$$(9)\quad (a^2d^2-3b^2c^2+4ac^3+4db^3-6abcd)^3 = \alpha^2\delta^2-3\beta^2\gamma^2+4\alpha\gamma^3+4\delta\beta^3-6\alpha\beta\gamma\delta;$$

« *Le cube du déterminant d'une forme cubique est égal au déterminant du covariant cubique de cette forme* ».

6. On obtient aussi des identités remarquables en appliquant ce principe, que le covariant d'un covariant est aussi un covariant de la forme donnée. Prenons par exemple le covariant quadratique du covariant cubique J de la forme f. Ce covariant est aussi un covariant de la forme f et, conséquemment, il doit être une fonction entière des deux covariants fondamantaux de cette forme. Comme ce covariant ne renferme les variables qu'au second degré, il doit être indépendant du covariant cubique; il est égal au covariant quadratique, multiplié par une puissance de l'invariant et par un facteur numérique. On doit donc avoir identiquement par rapport aux lettres a, b, c, d, x, y

$$(\alpha\gamma-\beta^2,\ \alpha\delta-\beta\gamma,\ \beta\delta-\gamma^2)\,(x,y)^2 \equiv mD^i\,(ac-b^2,\ ad-bc,\ bd-c^2)\,(x,y)^2,$$

$$\alpha\gamma-\beta^2 = m\,(ac-b^2)\,D^i,\ \alpha\delta-\beta\gamma = m\,(ad-bc)\,D^i,\ \beta\delta-\gamma^2 = m\,(bd-c^2)\,D^i.$$

Au moyen des formules (8) on trouve $i = 1$, $m = -1$. Donc

Théorème. *Si l'on pose*

$$A_1 = \alpha\gamma-\beta^2,\ B_1 = \alpha\delta-\beta\gamma,\ C_1 = \beta\delta-\gamma^2,$$

les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *étant déterminés par les formules* (8), on a

$$A_1 = AD,\ B_1 = BD,\ C_1 = CD,$$

et l'on déduit de là

$$B_1^2-4A_1C_1 = (B^2-4AC)\,D^2 = D^3,$$

c'est-à-dire que le déterminant du covariant cubique est égale au cube du déterminant de la forme f.

De même le covariant cubique du covariant cubique est un covariant cubique de la forme f; par conséquent il est égal au produit du covariant cubique J multiplié par une puissance de l'invariant. Si donc l'on désigne

par a_1, b_1, c_1, d_1 ce que deviennent les fonctions α, β, γ, δ, définies par les formules (8), lorsqu'on remplace dans ces formules a, b, c, d par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, on a identiquement par rapport aux lettres a, b, c, d, x, y

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)(x, y)^3 = m D^i J + n D^l f,$$

m, n, i, l désignant des nombres entiers que l'on détermine en faisant $x = 1$, $y = 0$, ce qui donne

$$a_1 = \alpha^2\delta - 3\alpha\beta\gamma + 2\beta^3 = m\alpha D^i + n a D^l.$$

La plus haute puissance de a dans le premier membre est a^5 et le terme en a^5 est $-a^5d^4$. Dans le produit $m\alpha D^i$ le terme du degré le plus élevé en a est $mda^2a^{2i}d^{2i}$; quelle que soit le valeur de l'exposant i, ce terme ne peut être du neuvième degré par rapport aux deux lettres a, d; on a donc $m = 0$. Dans le produit naD^l le terme du degré le plus élevé en a est $naa^{2l}d^{2l}$; on a donc $n = -1$, $l = 2$. Par conséquent

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)(x, y)^3 = -D^2(a, b, c, d)(x, y)^3,$$

$$a_1 = -aD^2, \quad b_1 = -bD^2, \quad c_1 = -cD^2, \quad d_1 = -dD^2.$$

Eisenstein a donné des identités équivalentes (Crelle, t. 27, p. 105), mais sans indiquer de quelle manière il les obtenues.

7. Dans la théorie analytique des formes binaires, les coefficients peuvent être des quantités quelconques; de même on peut les transformer par des substitutions linéaires quelconques, réelles ou imaginaires, pourvu que ces substitutions aient un déterminant égal à l'unité. C'est pourquoi on peut les ramener à des formes plus simples que l'on désigne sous le nom de formes canoniques. Ainsi toute forme cubique binaire, dont les racines sont inégales, se ramène à la forme canonique $ax^3 + by^3$. Mais puisque cette forme, lorsque ses coefficients sont réels, a deux racines imaginaires et une racine réelle, il est évident qu'une forme cubique dont les trois racines sont réelles ne peut être réduite à cette forme que par une substitution imaginaire. Une pareille substitution n'est pas admise dans la théorie arithmétique des formes binaires; il faut que tous les coefficients soient des nombres entiers. C'est à ce point de vue que nous allons nous placer dans le reste de ce Mémoire.

CH. I. *Notions générales sur la classification des formes cubiques binaires.*

8. Dans la théorie des formes cubiques, comme dans celle des formes quadratiques, deux formes sont dites équivalentes lorsqu'elles se déduisent l'une de l'autre par une substitution linéaire dont le déterminant est égal à ± 1; elles sont *proprement* ou *improprement* équivalentes, suivant que le déterminant de la substitution est égal à $+1$ ou à -1. L'ensemble des formes qui peuvent se déduire les unes des autres par des substitutions dont les déterminants sont égaux à $+1$, constitue une classe.

Le problème principal dans la théorie des formes cubiques consiste à déterminer les diverses classes en lesquelles peuvent se distribuer toutes les formes cubiquee d'un déterminant donné. C'est à la solution de ce problème que nous servira le covariant quadratique; mais afin d'éviter les formes négatives (n° 4), au lieu de prendre le covariant Hessien défini par la formule

$$H(f) = (ac - b^2)\,x^2 + (ad - bc)\,xy + (bd - c^2)\,y^2,$$

nous preudrons, à l'exemple d'Eisenstein, ce covariant changé de signe.

Nous appellons forme cubique (a, b, c, d) la fonction homogène

$$1. \qquad f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = (a, b, c, d)\ (x, y)^3.$$

Son covariant quadratique est la fonction

$$2. \qquad F = Ax^2 + Bxy + Cy^2,$$

dont les coefficients sont déterminés pas les formules

$$3. \qquad A = b^2 - ac,\ B = bc - ad,\ C = c^2 - bd.$$

Le déterminant de la forme cubique f est

$$4. \quad D = (bc - ad) - 4\,(b^2 - ac)\,(c^2 - bd) = a^2d^2 - 3b^2c^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 6abcd.$$

Lorsque D est impair, le nombre $B = bc - ad$ est aussi impair; dans ce cas le covariant F a le même déterminant que la forme cubique f. Mais lorsque D est pair, ce qui exige que B le soit aussi, le covariant F est

une forme quadratique dont le déterminant $\left(\frac{B}{2}\right)^2 - AC$ est égal au quart du déterminant D. Dans ce dernier cas, le covariant quadratique est ce qu'Eisenstein appelle la forme déterminante de la forme cubique f. Dans le premier cas, nous prendrons comme forme déterminante de la forme cubique f le double de son covariant quadratique.

9. Si l'on transforme f par la substitution

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y',$$

on obtient une nouvelle forme cubique

$$f' = (a', b', c', d') = a'x'^3 + 3b'x'^2y' + 3c'x'y'^2 + d'y'^3.$$

dont les coefficients sont déterminés par les formules

$$5. \quad \left|\begin{array}{l} a' = a\alpha^3 + 3b\alpha^2\gamma + 3c\alpha\gamma^2 + d\gamma^3, \\ b' = a\alpha^2\beta + b(\alpha^2\delta + 2\alpha\beta\gamma) + c(2\alpha\gamma\delta + \beta\gamma^2) + d\gamma^2\delta, \\ c' = a\alpha\beta^2 + b(\beta^2\gamma + 2\alpha\beta\delta) + c(2\beta\gamma\delta + \alpha\delta^2) + d\gamma\delta^2, \\ d' = a\beta^3 + 3b\beta^2\delta + 3c\beta\delta^2 + d\delta^3. \end{array}\right.$$

La forme f' se transforme en f par la substitution inverse

$$x' = \frac{\delta x - \beta y}{\varepsilon}, \quad y' = -\frac{\gamma x + \alpha y}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Quel que soit le module ε de la substitution, la forme f' est renfermée dans la forme f. Si le module est égal à ± 1, la forme f est aussi renfermée dans f'. On dit dans ce cas que les deux formes sont équivalentes, proprement, si $\varepsilon = 1$, improprement, si $\varepsilon = -1$.

Soit $F' = A'x^2 + B'xy + C'y^2$ la fonction en laquelle se transforme le covariant quadratique F par la même substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$. On a

$$6. \quad \left|\begin{array}{l} A' = A\alpha^2 + B\alpha\gamma + C\gamma^2, \\ B' = 2A\alpha\beta + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2C\gamma\delta, \\ C' = A\beta^2 + B\beta\delta + C\delta^2. \end{array}\right.$$

Si l'on désigne par $F_1 = A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2$ le covariant quadratique de la forme cubique transformée f', on a

$$A_1 = b'^2 - a'c', \quad C_1 = b'c' - a'd', \quad C_1 = c'^2 - b'd'.$$

Or au moyen des formules (6) on trouve

$$b'^2 - a'c' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \left[(b^2 - ac)\alpha^2 + (bc - ad)\alpha\gamma + (c^2 - b'd)\gamma^2\right]$$
$$= (\alpha\tau - \beta\gamma)^2 \left[A\alpha^2 + B\alpha\gamma + C\gamma^2\right];$$

On a donc, eu égard aux formules (6).

$$b'^2 - a'c' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 A' = A_1.$$

On obtient de même

$$B_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 B', \quad C_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 C', \quad F_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 F'.$$

On déduit de là cette propriété du covariant :

Théorème I. *Si l'un transforme une forme cubique et son covariant quadratique au moyen d'une même substitution linéaire, le covariant quadratique de la forme cubique transformée est égal au covariant tranformé, multiplié par une puissance du module de la transformation.*

En multipliant les formules (6) par $\varepsilon^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$, et en ayant égard aux dernières formules, on tronve les relations

$$7. \quad \left|\begin{array}{l} A_1 = A\,(A(\alpha\varepsilon)^2 + B\,\alpha\varepsilon.\,\gamma\varepsilon + C\,(\gamma\varepsilon)^2, \\ B_1 = 2A\,\alpha\varepsilon.\beta\varepsilon + B\,(\alpha\varepsilon.\delta\varepsilon + \beta\varepsilon.\gamma\varepsilon) + 2C\,\gamma\varepsilon.\delta\varepsilon, \\ C_1 = A\,(\beta\varepsilon)^2 + B\beta\varepsilon.\delta\varepsilon + C\,(\delta\varepsilon)^2, \end{array}\right.$$

d'où l'on déduit le théorème suivant, dû à Eisenstein :

Théorème II. *Si une forme cubique* f *renferme une autre forme* f', *en laquelle elle se transforme par la substitution*

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y', \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon,$$

le covariant quadratique de la forme f *renferme celui de* f', *et il se transforme en ce dernier covariant par la substitution*

$$x = \alpha\varepsilon.\,x' + \beta\varepsilon.y', \quad y = \gamma\varepsilon.x' + \delta\varepsilon.y'.$$

Le déterminant de la forme cubique f est $B^2 - 4AC = D$: celui de la transformée f' est $B_1^2 - 4A_1C_1 = D'$. Or d'après les relations précédentes on a :

$$B_1^2 - 4A_1C_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^4 (B'^2 - 4A'C'),$$

$$B'^2 - 4A'C' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 (B^2 - 4AC) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 D.$$

On a donc entre les déterminants D, D' des deux formes f, f', la relation

$$D' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^6 D.$$

Lorsque le module $\varepsilon = \alpha\delta - \beta\gamma$ est égal à ± 1, les deux déterminants D, D' sont égaux, ce qui justifie le nom d'invariant donné au déterminant D. Dans ce cas, les covariants F, F_1 sont équivalents comme les deux formes f, f', et le covariant F se change en F_1 par la même substitution qui change f en f'. Donc

THÉORÈME III. *Si deux formes cubiques* f, f' *sont équivalentes, leurs covariants quadratiques* F, F' *sont aussi équivalents ; de plus, la même substitution qui change* f *en* f', *transforme aussi* F *en* F'.

Il résulte de là que les covariants F, F' *sont proprement ou improprement équivalents, suivant que les deux formes* f, f' *sont elles-mêmes proprement ou improprement équivalentes.*

10. Ce dernier théorème ramène la classification des formes cubiques à celle de leurs covariants quadratiques. Toutes les formes cubiques qui peuvent se déduire l'une de l'autre par des substitutions linéaires dont le module est égal à + 1, constituent ce qu'on appelle une classe cubique ; elles ont pour formes déterminantes toutes les formes quadratiques d'une même classe. Comme à chaque forme cubique il correspond toujours, en vertu des formules 3, une forme déterminante et une seule, de même à chaque classe cubique il correspond une classe quadratique et une seule. Mais la réciproque n'est pas vraie. Il y a des classes quadratique auxquelles il ne correspond aucune classe cubique; il y en a d'autres a chacune desquelles correspondent plusieurs classes cubiques. La détermination de ces diverses classes sera l'objet du chapitre suivant. Mais avant d'aborder ce sujet nous devons montrer de quelle manière les classes cubiques du même déterminant peuvent se distribuer en divers ordres.

Lorsque les quatre nombres a, b, c, d ont un diviseur commun ω, la forme $f = (a, b, c, d)$ peut être considérée comme le produit de la forme

$\left(\frac{a}{\omega}, \frac{b}{\omega}, \frac{c}{\omega}, \frac{d}{\omega}\right)$ multipliée par ω. C'est une forme dérivée. Mais dans ce cas, on voit par la formule (4) que le déterminant est divisible par ω^4. Au contraire, lorsque les quatre nombres a, b, c, d n'ont pas de diviseur commun, la forme (a, b, c, d) est une forme primitive. L'ensemble des formes dérivées dans lesquelles le plus grand diviseur commun des coefficients a, b, c, d est un même nombre ω, compose l'ordre dérivé ω. On couclut de là que, si le déterminant donné D n'a pas de diviseur bicarré, toutes les formes cubiques du déterminant D sont renfermées dans l'ordre primitif.

Soit S^4 le plus grand bicarré qui divise D. Il y a autant d'ordres différents de formes cubiques du déterminant D qu'il y a de diviseurs différents de S, y compris le nombre S et l'unité.

On pourait subdiviser l'ordre primitif en deux sous ordres, en appelant proprement primitives les formes cubiques dans lesquelles les quatre nombres a, $3b$, $3c$, d sont premiers entre eux, et improprement primitives celles où ces quatre nombres ont pour plus grand diviseur le nombre 3. Comme cette distinction ne doit pas nous être utile, nous la laisserons de côté.

11. La classification de l'ordre dérivé ω du déterminant $\Delta\omega^4$ se trouve comprise dans celle de l'ordre primitif du déterminant Δ, puisque les formes du premier ordre se déduisent de celles du second en les multipliant par ω. Il nous suffit donc de déterminer les classes primitives de chaque déterminant. Mais pour y parvenir nous aurons à considérer tous les ordres de formes quadratiques du déterminant donné; car la forme déterminante d'une forme cubique primitive peut appartenir à un ordre dérivé.

Le déterminant D d'une forme cubique ne peut pas recevoir des valeurs entières quelconques; on voit en effet par la formule (4) que, si D est pair, il est multiple de 4; et s'il est impair, il est de la forme $4l+1$. Ainsi

Aucune forme cubique ne peut avoir pour déterminant un nombre de l'une des deux formes $4l+2$ *ou* $4l+3$.

Lorsque le déterminant D est de l'une des deux formes $4l$, $4l+1$, il existe toujours des formes cubiques du déterminant D. Les formes déterminantes auxquelles correspondent ces formes cubiques ont pour déterminant le nombre $\frac{D}{4}$ ou le nombre D, suivant que D est pair ou impair. Donc

Une forme quadratique de déterminant pair ne peut correspondre qu'à une forme cubique de déterminant quadruple; une forme quadratique de déterminant impair peut correspondre à une forme cubique de même déterminant ou de déterminant quadruple.

Lorsqu'une forme cubique a pour déterminant un nombre impair, nous avons vu que son covariant quadratique doit être doublé pour présenter les conditions régulières d'une forme quadratique, conformément aux définitions de Gauss. La forme déterminante doit alors être représentée par la formule (2A, B, 2C), A, B, C, désignant les coefficients du covariant quadratique. La forme déterminante (2A, B, 2C) appartient à l'ordre improprement primitif ou à quelqu'ordre dérivé d'un ordre improprement primitif.

La condition que doit remplir une forme (A, $\frac{1}{2}$B, C) ou (2A, B, 2C) pour correspondre à une forme cubique (a, b, c, d) est exprimée par les trois équations

$$A = b^2 - ac, \quad B = bc - ad, \quad C = c^2 - bd.$$

Mais comme ces équations sont toutes trois du second degré, il n'est pas facile d'en déduire les caractères auxquels on peut reconnaître si la forme considérée correspond effectivement à une forme cubique. C'est pourquoi nous le remplacerons par un système équivalent, plus commode pour notre but.

Ch. II. *Propriétés caractéristiques des formes quadratiques qui correspondent à des formes cubiques.*

12. Théorème I. *Le système des trois équations*

$$(1) \qquad A^2 = Ab^2 - Bab + Ca^2, \quad Ac - Bb + Ca = 0, \quad Ad - Bc + Cb = 0,$$

est équivalent au système

$$(2) \qquad A = b^2 - ac, \quad B = bc - ad, \quad C = c^2 - bd.$$

Démonstration. Si l'on élimine c et d entre les trois dernières équations, on trouve successivement

$$c = \frac{b^2 - A}{a}, \quad d = \frac{b(b^2 - A)}{a^2} - \frac{B}{a}, \quad C = \frac{(b^2 - A)^2}{a^2} - \frac{b^2(b^2 - A)}{a^2} + \frac{bB}{a},$$

$$A^2 = Ab^2 - Bab + Ca^2.$$

On déduit de cette dernière équation, en y substituant $b^2 = A + ac$,

$$Ac - Bb + Ca = 0.$$

Enfin, si dans cette formule multipliée par d on remplace bd, ad par $c^2 - C$, $bc + B$, on obtient, après réduction,

$$Ad - Bc + Cb = 0.$$

Ainsi les équations (1) sont une conséquence des équations (2). On peut d'ailleurs vérifier qu'elles se réduisent à des identités, lorsqu'on y remplace A, B, C par les expressions (2).

Inversement les formules (2) sont une conséquence des trois premières formules. En effet, la résolution des deux dernières équations du système (1) donne

$$A : B : C = b^2 - ac : bc - ad : c^2 - bd,$$

$$B(b^2 - ac) = A(bc - ad), \quad C(b^2 - ac) = A(c^2 - bd).$$

En substituant ces expressions de B et de C dans la première formule du système (1) et réduisant on obtient $A = b^2 - ac$; enfin, en combinant cette relation avec les formules précédentes, on trouve

$$A = b^2 - ac, \quad B = bc - cd, \quad C = c^2 - bd.$$

Les deux systèmes (1) et (2) sont donc une conséquence l'un de l'autre; par conséquent ils sont équivalents comme nous l'avons annoncé.

13. En multipliant par 4A la première formule du système (1), on trouve

$$(3) \qquad 4A^3 = (2Ab - Ba)^2 - (B^2 - 4AC)\,a^2 = (a^2 d + 2b^3 - 3abc)^2 - Da^2.$$

Cette formule montre que :

Théorème II. *Si la fonction homogène*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

est le covariant quadratique d'une forme cubique, le quadruple du cube de son premier coefficient est représenté par la forme principale du déterminant $D = B^2 - 4AC$.

Soit N un nombre représenté proprement par le covariant quadratique de la forme cubique (a, b, c, d), et désignons par α, γ les deux nombres entiers et premiers entre eux qui vérifient la formule

$$N = A\alpha^2 + B\beta\gamma + C\gamma^2.$$

On peut trouver deux autres nombres β, δ qui satisfassent à la condition $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. La substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ transforme la fonction F en une autre

$$F' = Nx^2 + Pxy + Qy^2,$$

qui est le covariant quadratique de la forme cubique en laquelle se change la forme (a, b, c, d) par la même substitution. Cette fonction F' jouit donc de la propriété énoncée dans le dernier théorème, le quadruple du cube de son premier coefficient est représenté par la forme principale du déterminant

$$P^2 - 4NQ = B^2 - 4AC = D.$$

Donc III. *Si un nombre* N *est représenté par le covariant quadratique d'une forme cubique du déterminant* D, *le quadruple de son cube est représenté par la forme principale du même déterminant*, $U^2 - DV^2$.

14. On doit remarquer que la représentation (U, V) de $4N^3$ par la forme $(1, 0, -D)$ peut n'être qu'une représentation impropre; c'est-à-dire que les deux nombres U, V peuvent avoir un facteur commun, bien que les deux nombres α, γ soient premiers entre eux. C'est ce que l'on voit immédiatement par la formule (3), en supposant $M = A$. La représentation (1, 0) de A par la fonction $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ est bien une représentation propre; les deux nombres a, b qui vérifient l'équation

$$A^2 = Ab^2 - B\,ab + Ca^2$$

peuvent même être premiers entre eux. Néanmoins les deux nombres U, V qui vérifient la formule

$$4A^3 = (a^2d + 2b^3 - 3abc)^2 - Da^2 = U^2 - DV^2$$

ont un facteur commun, 2, lorsque le nombre a est pair.

Lorsque le déterminant D est pair, le nombre U est aussi pair. Posant donc $U = 2T$, $D = 4\Delta$, on a

$$N^3 = T^2 - \Delta V^2.$$

Dans ce cas, le coefficient B est pair; le covariant quadratique de la forme cubique F en est lui-même la forme déterminante. Le théorème III peut alors s'énoncer de la manière suivante :

Théorème IV. *Si un nombre* N *est représenté par la forme déterminante d'une forme cubique de déterminant pair* $D = 4\Delta$, *son cube* N^3 *est représenté par la forme principale du déterminant* Δ.

Les trois derniers théorèmes sont dus à Eisenstein.

15. La question de décider si une fonction donnée

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

est le covariant quadratique d'une forme cubique (a, b, c, d) a été ramenée (n° 12) à celle de décider si le système (7) peut, oui ou non, se résoudre en nombres entiers. Pour résoudre ce dernier problème, nous distinguerons deux cas, celui où B est impair et celui où B est pair.

1° B impair. Désignons par m le plus grand diviseur commun des trois nombres A, B, C et posons

$$(4) \qquad A = mA_1, \quad B = mB_1, \quad C = mC_1.$$

Les formules (1) deviennent

$$(5) \quad mA_1^2 = A_1b^2 - B_1ab + C_1a^2, \quad A_1c - B_1b + C_1a = 0, \quad A_1d - B_1c + C_1a = 0.$$

Comme les trois nombres A_1, B_1, C_1 sont premiers entre eux, on sait par un théorème dû à Dirichlet que la fonction $A_1x^2 + B_1xy + C_1y$ peut représenter proprement une infinité de nombres premiers. D'ailleurs nous avons vu (n° 13) que cette fonction est équivalente à d'autres fonctions dont les premiers coefficients sont les divers nombres qu'elle représente proprement. Comme dans notre problème de classification il nous suffit de considérer une forme quelconque de chaque classe, nous supposerons que A_1 désigne un nombre premier, non-diviseur du produit mB_1. Dans ce cas, le déterminant de la forme cubique (a, b, c, d) est un nombre impair $D = m^2(B_1^2 - 3A_1C_1)$. Sa forme déterminante est $(2mA_1, mB_1, 2mC_1)$, c'est-à-dire le double de son covariant quadratique.

2° B pair. Désignons par m le plus grand diviseur commun des trois nombres A, $\frac{1}{2}$ B, C, nous posons

$$(6) \qquad A = mA_1, \quad B = 2mB_1, \quad C = mC_1,$$

de sorte que les équations (1) deviennent

$$(7) \quad mA_1^2 = A_1b^2 - 2B_1ab + C_1a^2, \quad A_1c - 2B_1b + C_1a = 0, \quad A_1d - 2B_1c + C_1b = 0.$$

Si l'un des deux nombres A_1 ou C_1 est impair, la forme (A_1, B_1, C_1) est proprement primitive. Dans ce cas, pour la raison exposée plus haut, nous pouvons supposer A_1 premier et non-diviseur de $2mB_1$. Le déterminant de la forme cubique correspondante est $D = 4m^2(B_1^2 - A_1C_1)$; son covariant quadratique est en même temps sa forme déterminante.

Si les deux nombres A_1, C_1 sont pairs, ce qui exige que B_1 soit impair, la forme (A_1, B_1, C_1) est improprement primitive. Dans ce cas nous posons

$$(8) \qquad A = 2mA_1, \quad B = 2mB_1, \quad C = 2mC_1,$$

et alors l'un des deux nombres A_1, C_1 est impair, ainsi que B_1. Comme les trois nombres A_1, $2B_1$, C_1 sont premiers entre eux, nous pouvons supposer que A_1 désigne un nombre premier non-diviseur de $2mB_1$, ainsi que nous l'avons fait dans les deux cas précédents. Les équations (7) sont remplacées par les suivantes

$$(9) \quad 2mA_1^2 = A_1b^2 - B_1ab + C_1a^2, \quad A_1c - B_1b + C_1a = 0, \quad A_1d - B_1c + C_1b = 0.$$

Nous allons examiner successivement les trois systèmes (5), (7) et (9) afin de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse les résoudre en nombres entiers a, b, c, d sans diviseur commun.

16. Le nombre B_1, étant impair et le nombre A_1 étant premier et non-diviseur de $2mB_1$, quelles conditions doivent remplir les nombres A_1, B_1, C_1 pour que les équations

$$(5) \quad mA_1^2 = A_1b^2 - B_1ab + C_1a^2, \quad A_1c - B_1b + C_1a = 0, \quad A_1d - B_1c + C_1b = 0$$

puissent se résoudre en nombres entiers, sans diviseur commun? Nous répondons à cette question par le théorème suivant:

Théorème V. *Les nombres* m, B_1 *étant impairs et* A_1 *désignant un nombre premier non diviseur de* $2mB_1$, *la seule condition nécessaire pour*

que la forme $(2mA_1, mB_1, 2mC_1)$ *soit la forme déterminante d'une forme cubique, est que l'on puisse résoudre l'équation*

$$(5') \qquad mA_1^2 = A_1b^2 - B_1ab + C_1a^2$$

en nombres entiers tels que a *et* A_1 *soient premiers entre eux.*

1° La condition énoncée est nécessaire; car l'équation (5') fait partie du système (5), et si elle est résolue sans que les deux nombres a et A_1 soient premiers entre eux, le nombre A_1 est diviseur du produit mB_1, contrairement à l'hypothèse. En effet, si a n'est pas premier avec A_1, il est divisible par A_1; on déduit alors de la deuxième équation du système (5) que A_1 doit diviser B_1b, et comme il est premier avec B_1, par hypothèse, il doit diviser b. Les deux nombres a et b étant divisibles par A_1, on déduirait de la formule $mB_1 = bc - ad$ que A_1 serait diviseur de mB_1, contrairement à l'hypothèse. Ainsi l'équation (5') doit être résolue sans que a soit divisible par A_1.

2° La condition énoncée est suffisante. En effet, si elle est remplie, on déduit d'abord de l'équation (5')

$$A_1(b^2 - mA_1) = a(B_1b - C_1a)$$

que le quotient $(B_1b - C_1a) : A_1$ est entier, et qu'en désignant ce quotient par c on a les deux formules

$$mA_1 = b^2 - ac, \quad A_1c - B_1b + C_1a = 0,$$

dont la dernière est la deuxième des équations (5). Or en combinant entre elles ces deux formules, après avoir multiplié la deuxième par b, on trouve la formule

$$A_1(bc - mB_1) = a(B_1c - C_1b),$$

d'où l'on déduit que le quotient $(B_1c - C_1b) : A_1$ est entier. Si l'on désigne ce quotient par d on a les deux formules

$$mB_1 = bc - ad, \quad A_1d - B_1c + C_1b = 0,$$

dont la deuxième est la dernière des équations (5). Ainsi l'unique condition à remplir pour que les équations (5) soient résolubles en nombres entiers, est que la première de ces équations soit résolue de telle manière que les deux nombres a, A_1 soient premiers entre eux.

17. La condition précédente peut être remplacée par une autre plus simple savoir que l'un des deux nombres mA_1^2, $4mA_1^2$ soit représenté proprement par la forme principale du déterminant $B_1^2 - 4A_1C_1 = \Delta$. En effet, en multipliant (5') par $4A_1$, on en déduit

$$4mA_1^2 = (2A_1b - B_1a)^2 - \Delta a^2,$$

ou bien, en posant $2A_1b - B_1a = t$,

$$(10) \qquad 4mA_1^2 = t^2 - \Delta a^2.$$

Lorsque le nombre a est pair, le nombre t l'est aussi; posant alors $t = 2u$, $a = 2v$, en a

$$(11) \qquad mA^2 = u^2 - \Delta v^2, \quad u = A_1b - B_1v.$$

Or la forme cubique (a, b, c, d) étant supposée primitive, les deux nombres t, a n'ont aucun facteur impair commun. Soit en effet θ un nombre bre premier impair, diviseur commun des deux nombres a, t. On déduit d'abord de la formule $2A_1b - B_1a = t$, que le facteur θ doit diviser le produit A_1b; comme il est premier avec A_1, il doit diviser b. On déduit ensuite des deux dernières formules (5) que les deux nombres c, d sont divisibles par θ et qu'ainsi la forme (a, b, c, d) est une forme dérivée, contrairement à l'hypothèse.

Inversement, si l'équation (10) est résolue de telle sorte que les deux nombres t, a n'aient aucun facteur commun impair, l'équation (5') est résolue en nombres entiers b, a premiers entre eux, et les deux nombres a, A_1 sont aussi premiers entre eux. On conclut d'abord de la formule (10) que le nombre a est premier avec A_1m. Puis, remplaçant dans cette formule Δ par $B_1^2 - 4A_1C_1$, on trouve

$$A_1(4mA_1^2 + 4C_1a^2) = t^2 - A_1^2a^2,$$

d'où l'on déduit, en choisissant convenablement le signe de t, que $t + B_1a$ est divisible par A_1. Le quotient est un nombre pair que l'on peut désigner par $2b$, de sorte que l'on a

$$t = 2A_1b - B_1a.$$

Substituant cette expression de t dans la formule précédent et réduisant, on trouve

$$mA_1^2 = A_1 b^2 - B_1 ab + C_1 a^2,$$

et, comme le nombre a est premier avec A_1, la condition énoncée dans le théorème (5) se trouve vérifiée. Donc

Théorème VI. *Les nombres* m, B_1 *étant impairs*, A_1 *désignant un nombre premier non-diviseur de* $2mB_1$, *la seule condition nécessaire pour que la forme* $(2mA_1, mB_1, 2mC_1)$ *soit la forme déterminante d'une forme cubique primitive, est que l'un des deux nombres*

$$mA_1^2, \quad 4mA_1^2$$

soit représenté proprement por la forme principale du déterminant

$$\Delta = B_1^2 - 4A_1C_1.$$

18. De même la condition unique pour que le système des équations (7) puisse se résoudre en nombres entiers a, b, c, d sans diviseur commun, est que la première de ces équations soit résolue en nombres entiers a, b premiers entre eux et tels que a soit premier avec A_1.

D'abord il est nécessaire que a soit premier avec A_1, car autrement on déduirait de la formule $A_1c - 2B_1b + C_1a = 0$, que le nombre premier A_1 divise le produit B_1b; comme A_1 est supposé premier avec B_1, il devrait diviser b. Mais alors on deduirait de la formule $2mB_1 = bc - ad$ que A_1 divise $2mB_1$, contrairement à l'hypothèse.

De plus les deux nombres a, b doivent être premiers entre eux; car s'ils avaient un diviseur commun θ, ce diviseur serait premier avec A_1, et l'on déduirait des deux dernières formules (7) qu'il doit diviser aussi les deux nombres c, d, de sorte que la forme (a, b, c, d) serait une forme dérivée,. contrairement à l'hypothèse.

La condition énoncée est donc nécessaire. Elle est de plus suffisante; car, si le nombre a est premier avec A_1, on déduit de l'équation

$$A_1 (b^2 - mA_1) = a (2B_1b - C_1a)$$

que le quotient $(2B_1b - C_1a) : A_1$ est entier, de sorte qu'en le désignant par c on a

$$A_1c - 2B_1b + C_1a = 0, \quad mA_1 = b^2 - ac.$$

En combinant ces équations entre elles, après avoir multiplié la première par b, on trouve

$$A_1(bc - 2mB_1) = a(2B_1c - C_1b);$$

On déduit de là qne le quotient $(2B_1c - C_1b)$: A_1 est entier, de sorte qu'en désignant ce quotient par d, on a

$$A_1d - 2B_1c + C_1b = 0, \quad 2mB_1 = bc - ad.$$

Ainsi, lorsque la première des équations (7) est vérifiée par deux nombres entiers a, b qui vérifient les conditions énoncées, on trouve immédiatement deux autres nombres c, d qui satisfont aux deux autres équations. Donc

THÉORÈME VII. *Le nombre* A_1 *étant premier et non-diviseur de* $2mB_1$, *la condition nécessaire et suffisante pour que la forme* (mA_1, mB_1, mC_1) *soit la forme quadratique déterminante d'une forme cubique primitive, est que l'on puisse résoudre l'équation*

$$(7') \qquad mA_1^2 = A_1b^2 - 2B_1ab + C_1a^2$$

en nombres entiers a, b *premiers entre eux et tels que* a *soit premier avec* A_1.

19. La condition énoncée dans le dernier théorème peut être remplacée par une autre plus simple, savoir que le produit mA_1^2 soit représenté proprement par la forme principale du déterminant $B_1^2 - A_1C_1 = \Delta$.

D'abord on déduit de l'équation (7')

$$mA_1^2 = (A_1b - B_1a)^2 - (B_1^2 - A_1C_1)a^2;$$

ou bien, en posant $B_1^2 - A_1C_1 = \Delta$, $A_1b - B_1a = t$,

$$(12) \qquad mA_1^2 = t^2 - \Delta a^2.$$

Les deux nombres t, a sont premiers entre eux; car autrement on déduirait de la formule $A_1b = t + B_1a$ que le produit A_1b serait divisible par un facteur du nombre a, ce qui est impossible dans le théorème précédent, puisque le nombre a est supposé premier avec chacun des deux nombres A_1, b. Donc le théorème VII ne peut être vérifié sans que le produit mA_1^2 soit représenté propremeni par la forme principale du déterminant $\Delta = B_1^2 - A_1C_1$.

Inversement, lorsque mA_1^2 est représenté proprement par la forme principale du déterminant $\Delta = B_1^2 - A_1C_1$, les conditions du théorème VII sont remplies. En effet, de l'équation

$$mA_1^2 = t^2 - (B_1^2 - A_1C_1)\, a^2$$

on déduit la congruence $t^2 - B^2a^2 \equiv 0$ (mod. A_1), et comme A_1 est premier, on peut choisir le signe de t de manière que la somme $t + B_1a$ soit divisible par A_1. Soit b le quotient de cette division. On peut poser $t = A_1b - B_1a$ et l'on conclut de cette formule que; si les deux nombres a, t sont premiers entre eux, le nombre a est premier avec chacun des deux nombres A_1, b. Enfin, en remplaçant t par l'expression précédente dans l'équation (12) et réduisant, on trouve

$$mA_1^2 = A_1b^2 - 2B_1ab + C_1a^2,$$

c'est-à-dire que l'équation (7') est résolue en nombres entiers et premiers entre eux a, b; de plus le nombre a est premier avec A_1. Donc

THÉORÈME VIII. *La condition nécessaire et suffisante pour que la forme* $(mA_1,\ mB_1,\ mC_1)$, *où l'on désigne par* A_1 *un nombre premier, non-diviseur de* $2mB_1$, *soit la forme déterminante d'une forme cubique primitive, est que le produit du nombre* m *multiplié par le cube du nombre* A_1 *soit représenté proprement par la forme principale du déterminant* $\Delta = B_1^2 - A_1C_1$.

20. On arrive à une conclusion tout semblable relativement au le système (9); pour que ce système soit résoluble en nombres entiers et premiers entre eux, il faut et il suffit que le produit $8mA_1^2$ soit représenté proprement par la forme principale du déterminant $B_1^2 - 4A_1C_1$, Nous démontrerons d'abord que la résolution de ce système se ramène à celle de la première équation, en ajoutant que les deux nombres a, b doivent être premiers entre eux et que a doit être-premier avec A_1.

Considérons en effet ce système

$$(9)\quad 2mA_1^2 = A_1b^2 - B_1ab + C_1a^2,\ \ A_1c - B_1b + C_1a = 0,\ \ A_1d - B_1c + C_1b = 0,$$

dans lequel B_1 désigne un nombre impair, A_1, un nombre premier non-diviseur de $2mB_1$. Pour que ce système soit vérifié en nombres entiers et premiers entre eux a, b, c, d il faut d'abord que a soit premier avec A_1; car si l'on suppose a divisible par C_1, on déduit de la deuxième des équations (9) que A_1 doit diviser B_1b et conséquemment b, puisqu'on suppose A_1 premier avec $2mB_1$. Mais alors on déduit de la formule $mB_1 = bc - ad$ que A_1 doit diviser le produit mB_1, contrairement à l'hypothèse. De plus les deux nombres a, b doivent être premiers entre eux, car s'ils ont un diviseur

commun θ, ce diviseur doit être premier avec A_1, puisque les deux nombres a, A_1 sont premiers entre eux. En conséquence de cela on déduit successivement des deux dernières formules (9) que les deux nombres c, d sont divisibles par θ. Les quatre nombres a, b, c, d auraient donc un diviseur commun θ, contrairement à l'hypothèse. Ainsi pour que le système (9) soit vérifié en nombres entiers et premiers entre eux, il est nécessaire que la première de ces équations soit vérifiée par deux nombres entiers a, b premiers entre eux et que a soit premier avec A_1.

La condition énoncée est suffisante, car si la première des équations (9) est vérifiée de telle sorte que le nombre a soit premier avec chacun des deux nombres b, A_1, on obtient immédiatement deux nombres entiers c, d qui vérifient les deux dernières équations. On déduit d'abord de la première équation, mise sous la forme

$$A_1 (b^2 - 2mA_1) = a (B_1 b - C_1 a),$$

que le quotient $(B_1 b - C_1 a) : A_1$ est entier; en le désignant par c on a les deux formules

$$2mA_1 = b^2 - ac, \quad A_1 c - B_1 b + C_1 a = 0,$$

dont la combinaison donne la suivante

$$A_1 (bc - 2mB_1) = a (B_1 c - C_1 b),$$

d'où l'on conclut que le quotient $(B_1 c - C_1 b) : A_1$ est entier, de sorte qu'en le désignant par d on a

$$2mB_1 = bc - ad, \quad A_1 d - B_1 c + C_1 b = 0.$$

Les deux dernières formules du système (9) sont donc vérifiées par les deux nombres entiers c, d ainsi déterminés. Donc

THÉORÈME IX. *La condition nécessaire et suffisante pour que la forme* $(2mA_1, mB_1, 2mC_1)$, *où l'on désigne par* B_1 *un nombre impair et par* A_1 *un nombre premier, non-diviseur de* $2mB_1$, *soit la forme déterminante d'une forme cubique primitive* (a, b, c, d), *est que l'on puisse résoudre l'équation*

$$(9') \qquad 2mA_1^2 = A_1 \mathrm{b}^2 - B_1 \mathrm{ab} + C_1 \mathrm{a}^2$$

en nombres entiers b, a *tels que* a *soit premier avec* $A_1 b$.

21. Les deux nombres A_1, B_1 étant impairs, la somme des trois termes qui forment le second membre de l'équation (9') ne peut être paire qu'autant que le nombre C_1 est pair, ou que les deux nombres a, b sont pairs. Cette dernière hypothèse étant inadmissible, puisque a et b sont premiers entre eux, le nombre C_1 doit être pair et, conséquemment, le déterminant $\Delta = B_1^2 - 4A_1C_1$ doit être de la forme $8l + 1$.

L'équation (9') multipliée par $4A_1$ divient

$$8mA_1^2 = (2A_1b - B_1a)^2 - (B_1^2 - 4A_1C_1)\,a^2,$$

ou bien, si l'on pose $2A_1b - B_1a = t$, $B_1^2 - 4A_1C_1 = \Delta$,

$$(13) \qquad 8mA_1^2 = t^2 - \Delta\, a^2.$$

Les deux nombres t, a sont premiers entre eux; car on voit par la formule $2A_1b - B_1a = t$ que le plus grand diviseur commun des deux nombres t, a doit diviser 2. Il se réduit donc à 1, puisque a est impair. Ainsi, lorsque le théorème IX est vérifié, le produit $8mA_1^2$ est représenté proprement par la forme principale du déterminant $\Delta = B_1^2 - 4A_1C_1$.

Réciproquement, si cette dernière condition est vérifiée, le théorème IX l'est également. En effet, on déduit de l'équation (13)

$$A_1(8mA_1^2 - 4C_1a^2) = t^2 - B_1^2a^2, \quad \pm t + B_1a \equiv 0 \pmod{A_1}.$$

Le nombre A_1 étant premier, on peut choisir le signe de t de manière que la somme $t + B_1a$ soit divisible par A_1. Le quotient de cette division étant pair nous le désignerons par $2b$ et nous aurons

$$(\alpha) \qquad t = 2A_1b - B_1a.$$

En substituant cette valeur de t dans la dernière équation et réduisant on trouve

$$2mA_1^2 = A_1b^2 - B_1ab + C_1a^2.$$

D'ailleurs les deux nombres a et t étant premiers entre eux, on déduit de la formule (α) que a est premier avec $2A_1b$. L'équation (9') se trouve donc vérifiée avec toutes les conditions énoncées dans le théorème IX. Ce théorème peut donc être remplacé par le suivant:

Théorème X. *La condition nécessaire et suffisante pour que la forme* $(2mA_1, mB_1, 2mC_1)$, *dans laquelle* B_1 *est impair et* A_1 *désigne un nombre*

premier non-diviseur de $2mB_1$, *correspond à une forme cubique primitive* (a, b, c, d) *de déterminant* $m^2\Delta = m^2(B_1^2 - 4A_1C_1)$, *est que le produit* $8mA_1^3$ *soit représenté proprement par la forme principale du déterminant* $\Delta = B_1^2 - 4A_1C_1$.

22. Lorsque le nombre m se réduit à l'unité, les théorèmes VI, VIII et X sont remplacés par les suivants :

Théorème XI. *Les deux nombres* A, B *étant impairs, et le nombre* A *étant premier, non-diviseur de* B, *la seule condition nécessaire pour que la forme improprement primitive* (2A, B, 2C) *soit la forme déterminante d'une forme cubique, est que le cube* A^3 *ou son quadruple* $4A^3$ *soit représenté proprement par la forme principale du déterminant* $D = B^2 - 4AC$.

Théorème XII *Le nombre* A *étant premier et non-diviseur de* $B = 2B_1$, *l'unique condition nécessaire pour que la forme proprement primitive* (A, B_1, C) *soit la forme déterminante d'une forme cubique primitive, est que le cube* A^3 *soit représenté proprement par la forme principale du déterminant* $B_1^2 - AC$.

Théorème XIII. *Le nombre* B_1 *étant impair, si l'on désigne par* A_1 *un nombre premier non-diviseur de* $2B_1$, *la condition nécessaire et suffisante pour que la forme improprement primitive* $(2A_1, B_1, 2C_1)$ *soit la forme déterminante d'une forme cubique du déterminant* $4(B_1^2 - 4A_1C_1)$, *est que le produit de cube* A_1^3 *multiplié par* 8 *soit représenté proprement par la forme principale du déterminant* $B_1^2 - 4A_1C_1$.

23. Les théorèmes établis dans ce chapitre permettent de trouver aisément toutes les classes quadratiques d'un déterminant donné qui correspondent à des classes cubiques. Mais avant d'aborder cette recherche, qui doit varier avec la forme du déterminant donné, nous exposerons la méthode à suivre pour trouver les classes cubiques qui correspondent à une même classe quadratique, représentée par une forme dont les coefficients remplissent les conditions énoncées dans l'un des théorèmes V, VII ou IX.

Ch. III. *Détermination des classes cubiques qui correspondent à une même classe quadratique, primitive.*

24 Les formes cubiques qui ont pour covariant quadratique la fonction $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ sont déterminées (n° 12) par le système

$$(1) \quad A^3 = Ab^2 - Aab + Ca^2, \quad Ac - Bb + Ca = 0, \quad Ad - Bc + Cb = 0.$$

Nous avons montré (n° 15) que ce système peut être remplacé, suivant les valeurs des coefficients A, B, C, par l'un des trois suivants

(5) $mA_1^2 = A_1b^2 - B_1ab + C_1a^2$, $A_1c - B_1b + C_1a = 0$, $A_1d - B_1c + C_1b = 0$,

(7) $mA_1^2 = A_1b^2 - 2B_1ab + C_1a^2$, $A_1c - 2B_1b + C_1a = 0$, $A_1d - 2B_1c + C_1b = 0$,

(9) $2mA_1^2 = A_1b^2 - B_1ab + C_1a^2$, $A_1c - B_1b + C_1a = 0$, $A_1d - B_1c + C_1b = 0$,

dans lesquels A_1 désigne un nombre premier, non diviseur de $2mB_1$; le nombre B_1 est impair dans les deux systèmes (5) et (9), mais il peut être pair ou impair dans le système (7); le nombre m est impair dans le système (5), pair ou impair dans les deux autres systèmes.

Nous examinerons d'abord le cas où la classe quadratique proposée appartient à l'un des deux ordres primitifs. Dans ce cas le nombre m est égal à 1, et les équations à résoudre sont l'un des deux systèmes

(5') $A^2 = Ab^2 - B_1ab + Ca^2$, $Ac - B_1b + Ca = 0$, $Ab - B_1c + Cb = 0$,

(7') $A^2 = Ab^2 - 2B_1ab + Ca^2$, $Ac - 2B_1b + Ca = 0$, $Ad - 2B_1c + Cb = 0$,

dans lesquels B_1 est impair et A désigne un nombre premier non diviseur de $2B_1$. Tout notre problème, d'après les théorèmes V et VII: consiste à résoudre la première équation de chacun de ces deux systèmes en nombres entiers et premiers entre eux a, b tels que a ne soit pas divisible par A. Occupons-nous d'abord de l'équation (7').

La forme (A, B_1, C) composée avec elle-même donne une résultante (A^2, B', C') qui doit être équivalente, proprement ou improprement, à la forme (A, $-B_1$, C), puisque ces deux formes représentent une même puissance d'un même nombre premier. Si les deux formes (A^2, B' C'), (A, $-B_1$, C) sont improprement équivalentes, les deux formes (A^2, B', C'), (A, B_1, C) sont proprement équivalentes et, par conséquent, la classe (A, B_1, C) se reproduit par duplication, ce qui est le propre de la classe principale. Si donc la classe (A, B_1, C) diffère de la classe principale, la duplication de cette classe donne pour résultante la classe opposée, de sorte que sa triplication donne la classe principale. Donc

Les seules classes quadratiques proprement primitives qui puissent correspondre à des formes cubiques, sont celles dont la triplication donne la classe principale.

Nous allons démontrer que toutes ces classes quadratiques correspondent effectivement à des formes cubiques.

25. Supposons d'abord que la forme (A, B_1, C) appartienne à la classe principale du déterminant Δ. Nous la remplaçons par la forme $(1, 1, 1-\Delta)$, et les équations à résoudre deviennent

$$(10) \qquad 1 = (b-a)^2 - \Delta a^2, \quad c = 2b + (\Delta - 1)\, a, \quad d = 2c + (\Delta - 1)\, b.$$

1° Si le déterminant Δ est négatif et inférieur à -1, la première équation n'admet que les deux solutions $b = 1$, $a = 0$; $b = -1$, $a = 0$. En faisant $a = 0$, $b = 1$ dans les deux autres équation, on trouve $c = 2$, $d = 3 + \Delta$.

Ainsi la forme $(1, 1, 1-\Delta)$ est le covariant quadratique de la forme cubique $(0, 1, 2, 3+\Delta)$. L'autre solution donne la forme $(0, -1, -2, -3-\Delta)$, équivalente à la précédente en laquelle elle se transforme par la substitution propre $(-1, 0; 0, -1)$. Par conséquent, la classe quadratique principale d'un déterminant $\Delta < -1$ correspond à une classe cubique unique, représentée par la forme $(0, 1, 2, 3+\Delta)$.

2° Si $\Delta = -1$, la première des équations (10) admet quatre solutions,

$$b = \pm 1, \; a = 0; \; b = a = \pm 1,$$

auxquelles correspondent les quatre formes cubiques $\pm(0, 1, 2, 2)$, $\pm(1, 1, 0, -2)$. Les formes $\pm f$ qui ne diffèrent que par le signe sont proprement équivalentes; elles se transforment l'une en l'autre par la substitution $(-1, 0; 0, -1)$. Les deux formes $(1, 1, 0, -2)$, $(0, 1, 2, 2)$ sont aussi équivalentes, mais improprement, la première se transforme en la seconde par la substitution $(1, 0; -1, -1)$.

En réunissant les deux dernières conclusions on obtient ce théorème:

La classe quadratique principale $(1, 1, 1-\Delta)$ *d'un déterminant négatif* Δ *correspond à une classe cubique unique, représentée par la forme* $(0, 1, 2, 3+\Delta)$, *excepté lorsque* $\Delta = -1$; *dans ce dernier cas, la classe quadratique* $(1, 1, 2)$ *correspond à deux classes cubiques opposées, représentées par les deux formes* $(1, 1, 0, -2)$ $(0, 1, 2, 2)$.

26. Lorsque le déterminant Δ est positif et non carré, la première des équations (10) admet une infinité de solutions, à chacune desquelles correspondent des valeurs entières des deux nombres c, d. Dans ce cas une infinité de formes cubiques différentes correspondent à la forme quadratique $(1, 1, 1-\Delta)$. Il s'agit de trouver leur expression générale et de déterminer les diverses classes en lesquelles on peut les distribuer.

Les diverses formes cubiques (a, b, c, d) qui correspondent à la forme déterminante $(1, 1, 1 - \Delta)$ sont déterminées au moyen des diverses solutions de l'équation

$$(11) \qquad t^2 - \Delta u^2 = 1,$$

par les formules

$$(12) \quad a = u, \quad b = t + u, \quad c = 2t + u, \quad c = 2t + (1 + \Delta)u, \quad d = (3 + \Delta)\, t + (1 + 3\Delta)u.$$

La solution $t = 1$, $u = 0$, donne la forme cubique $(0, 1, 2, \Delta + 3)$. Deux solutions opposées $t, u\,; -t, -u$ déterminent deux formes cubiques (a, b, c, d), $(-a, -b, -c, -d)$ proprement équivalentes, puisqu'elles se transforment l'une en l'autre par la substitution $(-1, 0\,; 0, -1)$. Nous pouvons donc nous borner aux solutions dans lesquelles la valeur de t est positive. Si l'on désigne par t_1, u_1 les plus petits nombres entiers et positifs qui satisfont à l'équation (11) toutes les solutions de la même équation dans lesquelles la valeur de t est positive se déduisent des deux formules

$$(13) \quad t_m + u_m \sqrt{\Delta} = (t_1 + u_1 \sqrt{\Delta})^m, \; t_{-m} + u_{-m} \sqrt{\Delta} = (t_1 - u_1 \sqrt{\Delta})^m = (t_1 + u_1 \sqrt{\Delta})^{-m}$$

en faisant varier m de 0 à ∞, en développant les seconds membres par la formule de Newton, enfin en égalant t_m ou t_{-m} à la partie rationnelle du développement, et u_m ou u_{-m}, au coefficient de $\sqrt{\Delta}$. Si l'on pose

$$(14) \quad a_n = u_n, \; b_n = t_n + u_n, \; c_n = 2t_n + (1 + \Delta)\, u_n, \; d_n = (3 + \Delta)\, t_n + (1 + 3\Delta)\, u_n,$$

et que dans ces dernières formules on fasse varier n de $-\infty$ à $+\infty$, toutes les formes cubiques qui ont pour covariant la forme quadratique $(1, 1, 1 - \Delta)$ sont exprimées par la formule

$$f = \pm f_n = \pm (a_n, \; b_n, \; c_n, \; d_n).$$

27. Il nous reste à déterminer les diverses classes en lesquelles on peut distribuer les diverses formes cubiques (a_n, b_n, c_n, d_n) dont les éléments sont exprimés par les formules (14) en fonctions des solutions de l'équation (11) renfermées dans les formules (13). Supposons que deux formes cubiques $f = (a, b, c, d)$ et $f' = (a', b', c', d')$ ainsi déterminées soient équivalentes. Si l'on désigne par $(\alpha, \beta\,; \gamma, \delta)$ la substitution qui transforme f en f', la même substitution doit changer le covariant quadratique de f en celui de f'. Comme les deux formes f, f' ont le même covariant quadratique,

savoir la forme $(1, 1, 1-\Delta)$, la substitution $(\alpha, \beta\,;\, \gamma, \delta)$ doit transformer cette dernière forme en elle-même. D'ailleurs toutes les transformations de cette forme en elle-même sont exprimées par les formules

$$(a) \qquad \alpha = t - u, \;\; \beta = (\Delta - 1)\, u, \;\; \gamma = u, \;\; \delta = t + u,$$

dans lesquelles on désigne indéfiniment par t, u toutes les solutions de l'équation (11). Les coefficients de la forme transformée (a', b', c', d') sont exprimés par les formules (5) du n° 9. Nous nous bornerons ici aux expressions des deux premiers coefficients, savoir

$$a' = a\alpha^2 + 3b\,\alpha^2\gamma + 3c\alpha\gamma^2 + d\gamma^3,$$

$$b' = a\alpha^2\beta + b\,(\alpha^2\delta + 2\alpha\beta\gamma) + c\,(2\alpha\gamma\delta + \beta\gamma^2) + d\gamma^2\delta.$$

En substituant dans ces équations d'un côté les expressions (a) des coefficients de la substitution, de l'autre les formules (10), savoir

$$c = 2b + (\Delta - 1)\, a, \;\; d = 2\,(\Delta - 1)\, a + (3 + \Delta)\, b,$$

on trouve, après réduction,

$$a' = (t^3 - 3t^2u + \Delta\,(3tu^2 - u^3))\, a \; + (3t^2u + \Delta u^3)\, b,$$

$$u' = (\Delta - 1)\,(3t^2u + \Delta u^3)\, a \; + (t^3 + 3t^2u + \Delta\,(3tu^2 + u^3))\, b.$$

Or si l'on suppose $t > 0$ dans les formules (a), ce qui n'enlève rien à la généralité de notre solution, puisque l'on peut se borner à considérer une seule des deux substitutions opposées $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta)$, les valeurs t, u qui figurent ici, correspondent dans les formules (13) à une valeur positive ou négative de l'indice. On a donc

$$t + u\sqrt{\Delta} = (t_1 + u_1\sqrt{\Delta})^l, \;\; t_{3l} + u_{3l}\sqrt{\Delta} = (t + u\sqrt{\Delta})^3$$

$$t_{3l} = t^3 + 3\,tu^2\,\Delta, \;\; u_{3l} = 3t^2\,u + \Delta u^3.$$

Les expressions précédentes des deux nombres a', b' deviennent donc

$$a' = (t_{3l} - u_{3l})\, a + u_{3l} b,$$

$$b' = u_{3l}\,(\Delta - 1)\, a + (t_{3l} + u_{3l})\, b.$$

Soit n l'indice de la forme f, et n' celui de f'. On a

$$a = u_n,\ b = t_n + u_n;\ a' = u_{n'},\ b' = t_{n'} + u_{n'},$$

et en substituant ces expressions dans les deux dernières formules, on trouve

$$t_{n'} = t_{3i}\, t_n + u_{3i}\, u_n\, \Delta,\ u_{n'} = t_{3i}\, u_n + u_{3i}\, t_n.$$

Or l'on déduit des formules (13)

$$t_{3i+n} + u_{3i+n}\sqrt{\Delta} = (t_{3i} + u_{3i}\sqrt{\Delta})(t_n + u_n\sqrt{\Delta}),$$

$$t_{3i+n} = t_{3i}\, t_n + u_{3i}\, u_n\, \Delta,\ u_{3i+n} = t_{3i} u_n + u_{3i}\, t_n.$$

On a donc $n' = 3i + n$, et l'on conclut :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux formes cubiques f_n, $f_{n'}$ *déterminées par les formules précédentes, appartiennent à une même classe, est que la différence* $n' - n$ *de leurs indices soit divisible par* 3.

Toutes les valeurs entières de n sont comprises dans les trois formules $3l$, $3l+1$, $3l-1$. Les formes cubiques $\pm f_{3l}$ sont renfermées dans une même classe représentée par la forme $(0, 1, 2, 3+\Delta)$; les formes f_{3l+1} sont équivalentes à la forme $f_1 = (u_1,\ t_1 + u_1,\ 2t_1 + (1+\Delta)\, u_1,\ (3+\Delta)\, t_1 + (1+3\Delta)\, u_1)$. Enfin les formes dont l'indice est de la forme $3l - 1$, sont équivalentes à la forme $f_{-1} = (-u_1,\ t_1 - u_1,\ 2t_1 - (1+\Delta)\, u_1,\ (3+\Delta)\, t_1 - (1+3\Delta)\, u_1)$. Donc

La classe principale d'un déterminant positif Δ *correspond à trois classes cubiques représentées respectivement par les trois formes*

$$(0,\ 1,\ 2,\ 3+\Delta),$$

$$(u_1,\ t_1 + u_1,\ 2t_1 + (1+\Delta)\, u_1,\ (3+\Delta)\, t_1 + (1+3\Delta)\, u_1),$$

$$(-u_1,\ t_1 - u_1,\ 2t_1 - (1+\Delta)\, u_1,\ (3+\Delta)\, t_1 - (1+3\Delta)\, u_1),$$

dans lesquelles t_1, u_1 *désignent les plus petits nombres entiers et positifs qui vérifient l'équation* $t^2 - \Delta u^2 = 1$.

28. Lorsque la classe proprement primitive, représentée par la forme (A, B_1, C) est différente de la classe principale, nous avons vu n° 24 qu'elle donne par duplication la classe opposée et par triplication la classe prin-

cipale. La duplication de la forme (A, B_1, C) donne pour résultante une forme (A^2, B', C') équivalente à la forme $(A, -B_1, C)$. Soit $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ une transformation de la dernière forme en la première; à la représentation $x = 1$, $y = 0$ de A^2 par la première forme correspond une représentation $x = \alpha$, $y = \gamma$ du même nombre par la deuxième, de sorte qu'on résout l'équation

$$A^2 = Ab^2 - 2B_1 ab + Ca^2$$

en prenant $b = \alpha$, $a = \gamma$. Ces valeurs de a et de b sont premières entre elles puisque les deux nombres α, γ vérifient la condition $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. De plus γ est premier avec A; car si l'on avait $\gamma = A\lambda$, on déduirait de l'équation précédente

$$A = b^2 - 2B_1 b\lambda + Ac\lambda^2 = (b - B_1\lambda)^2 - \Delta\lambda^2$$

Le nombre premier A serait donc représenté par la forme principale du déterminant Δ. Comme il est aussi représenté par les deux formes $(A, \pm B_1, C)$, ces deux formes devraient appartenir à la classe principale. Ainsi les valeurs $b = \alpha$, $a = \gamma$ ainsi obtenues satisfont à toutes les conditions énoncées dans le théorème VII, par conséquent les deux formules

$$c = \frac{2B_1\alpha - C\gamma}{A}, \quad d = \frac{2B_1 c - C\alpha}{A}$$

donnent pour c et d des valeurs entières.

Autant il existe de transformations différentes de la forme $(A, -B_1, C)$ en la forme équivalente (A^2, B', C'), autant il y a de formes cubiques (γ, α, c, d) dont le covariant quadratique est la forme (A, B_1, C).

1° Si Δ est < -1, il n'existe que deux transformations de la forme $(A, -B_1, C)$ en la forme (A^2, B', C'), savoir $(\alpha, \beta; \gamma, \gamma)$ et $(-\alpha, -\beta; -\gamma, -\delta)$. Ces deux transformations donnent deux formes cubiques équivalentes (γ, α, c, d), $(-\gamma, -\alpha, -c, -d)$. Donc

Toute forme quadratique d'un déterminant négatif $\Delta < -1$, dont la triplication donne pour résultante la classe principale, correspond à une classe cubique et à une seule.

Du reste il n'y a pas lieu de s'occuper du déterminant $\Delta = -1$, parce qu'il n'offre pas d'autre classe que la classe principale, à laquelle se rapporte la deuxième conclusion du n° 25.

29. Lorsque le déterminant Δ est positif et non carré, il existe une in-

finité de transformations de la forme $(A, -B_1, C)$ en la forme équivalente (A^2, B', C'). Si l'on désigne l'une d'elles par $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ toutes les autres substitutions semblables sont exprimées par les formules

$$\lambda = t\alpha + (B_1\alpha - C\gamma)u, \quad \mu = \beta t + (B_1\beta - C\delta)u,$$

$$\nu = \gamma t + (A\alpha - B_1\gamma)u, \quad \rho = \delta t + (A\beta - B_1\delta)u,$$

daus lesquelles t, u représentent d'une manière indéfinie toutes les solutions de l'équation

$$(11) \qquad t^2 - \Delta u^2 = 1.$$

Comme en changeant les signes de t et de u, on ne fait que changer les signes des coefficients de la forme cubique correspondante, on peut se borner aux solutions dans lesquelles la valeur de t est positive; elles sont exprimées, comme au n° 26, par les formules

$$(13) \quad t_m + u_m\sqrt{\Delta} = (t_1 + u_1\sqrt{\Delta})^m, \quad t_{-m} + u_{-m}\sqrt{\Delta} = (t_1 - u_1\sqrt{\Delta})^m$$

où t_1, u_1 désignent les plus petits nombres entiers et positifs qui vérifient l'équation (11), et où le nombre m varie de 0 à ∞.

Les solutions de l'équation

$$A^2 = Ab^2 - 2B_1\,ab + Ca^2$$

sont toutes renfermées dans les formules

$$(14) \quad b_n = \lambda = \alpha t_n + (B_1\alpha - C\gamma)u_n, \quad a_n = \nu = \gamma t_n + (A\alpha - B_1\gamma)u_n,$$

où l'on doit faire varier n de $-\infty$ à $+\infty$, et dans celles qu'on en déduit en remplaçant t_n et u_n par $-t_n$ et $-u_n$. Nous nous bornons aux premières solutions, pour la raison indiquée plus haut.

Les valeurs correspondantes de c et de d se déduisent des formules

$$Ac_n - 2B_1b_n + Ca_n = 0, \quad A_1d_n - 2B_1c_n + Cb_n = 0;$$

en y substituant les expressions (14) et en réduisant au moyen des formules

$$Ac = 2Ba - C\gamma, \quad Ad = 2Bc - C\gamma;$$

on trouve ainsi

$$(15) \qquad c_n = ct_n + (B_1c - C\alpha)u_n. \quad d_n = dt_n + (B_1d - Cc)u_n.$$

Toutes les formes cubiques dont la forme (A, B_1, C) est le covariant quadratique sont exprimées par la formule $f = \pm f_n = \pm (a_n, b_n, c_n, d_n)$ et par les formules (13), (14) et (15).

30. Désignons par $f = (a, b, c, d)$, $f' = (a', b', c', d')$ deux formes cubiques qui correspondent dans les formules précédentes, aux deux indices n, n', et cherchons la relation qui doit exister entre ces deux indices pour que les deux formes f, f' soient comprises dans une même classe. Soit $(\lambda, \mu; \nu, \rho)$ une transformation de f en f'. La même transformation doit changer le covariant quadratique de f en celui de f'. Comme ces deux formes ont le même covariant, savoir la forme (A, B_1, C), la substitution $(\lambda, \mu; \nu, \rho)$ doit transformer la forme (A, B_1, C) en elle-même et, par conséquent, elle est exprimée par les formules

$$(16) \qquad \lambda = t - B_1 u, \quad \mu = -Cu, \quad \nu = Au, \quad \rho = t + B_1 u$$

Les deux coefficients a', b' de la forme transformée sont exprimés par les formules

$$a' = a\lambda^3 + 3b\lambda^2\nu + 3c\lambda\nu^2 + d\nu^3,$$

$$b' = a\lambda^2 + b(\lambda^2\rho + 2\lambda\mu\nu) + c(2\lambda\nu\rho + \mu\nu^2) + d\nu^2\rho.$$

En faisant dans ces formules la substitution (16), en éliminant c, d au moyen des formules $Ac - 2B_1 b + c a = 0$, $Ad - 2B_1 c + Cb = 0$, et en ayant égard aux relations $t^2 - \Delta u^2 = 1$, $B_1^2 - AC = \Delta$, on trouve après réduction

$$a' = a(t^3 + 3tu^2\Delta - B_1(3t^2u + \Delta u^3)) + b,A(3t^2u + \Delta u^3),$$

$$b' = -C(3t^2u + \Delta u^3)a + (t^3 + 3\Delta tu^2 + B_1(3t^2u + \Delta u^3))b.$$

Or si l'on suppose $t > 0$ et qu'on désigne par i l'indice auquel correspond la solution t, u, on a

$$(t_1 + u_1\sqrt{\Delta})^{3i} = (t + u\sqrt{\Delta})^3 = t^3 + 3tu^2\Delta + \sqrt{\Delta}(3t^2u^2 + \Delta u^3)$$

$$t_{3i} = t^3 + 3tu^2\Delta, \quad u_{3i} = 3t^2u^2 + \Delta u^3,$$

de sorte que les expressions précédentes de a', b' deviennent

$$a' = (t_{3i} - B_1 u_{3i}) + Au_{3i}\, b,$$

$$b' = -Cu_{3i}\, a + (t_{3i} + B_1 u_{3i})\, b.$$

Enfin en supposant que la forme f réponde à l'indice n et en remplaçant a, b par les expressions (14) de a_n, b_n, on trouve

$$a' = (t_{3i}\, t_n + \Delta\, u_{3i}\, u_n - B_1\, (t_{3i}\, u_n + u_{3i}\, t_n))\, \gamma + A\, (t_{3i}\, u_n + u_{3i}\, t_n)\, \alpha,$$

$$b' = - C\, (t_{3i}\, u_n + u_{3i}\, t_n)\, \gamma + (t_{3i}\, t_n + \Delta u_{3i}\, u_n + B_1\, (t_{3i}\, u_n + u_{3i}\, t_n))\, \alpha.$$

Or on déduit des formules (13)

$$t_{3i+n} + u_{3i+n}\, \sqrt{\Delta} = (t_{3i} + u_{3i}\, \sqrt{\Delta})\, (t_n + u_n\, \sqrt{\Delta}),$$

$$t_{3i+n} = t_{3i}\, t_n + \Delta\, u_{3i}\, u_n\,,\; u_{3i+n} = t_{3i}\, u_n + u_{3i}\, t_n.$$

On a donc

$$a' = (t_{3i+n} - B_1\, u_{3i+m})\, \gamma + A u_{3i+m}\, \alpha,$$

$$b' = - C u_{3in}\, \gamma + (t_{3i+n} + B_1 u_{3i+n})\, \alpha.$$

Ce sont précisément les valeurs de a_{3i+n}, b_{3i+n} que l'on déduit des formules (14) en y remplaçant n par $3i+n$. L'indice n' auquel correspond la forme (f') est donc égal à $3i+n$. Donc

Pour que deux formes f_n, $f_{n'}$ *qui correspondent dans les formules précédentes aux indices* n, n' *appartiennent à une même classe, il faut et il suffit que la différence* $n' - n$ *de leurs indices soit divisibles par* 3.

Comme toutes les valeurs de l'indice n sont comprises dans les trois formules $3l$, $3l+1$, $3l-1$, on déduit du dernier théorème que:

Toutes les formes cubiques qui ont pour covariant une même forme quadratique primitive (A, B_1, C) *d'un déterminant positif* Δ, *sont comprises dans trois classe représentées respectivement par les trois formes* f_0, f_1, f_{-1} *dont les deux premiers éléments sont exprimés par les formules*

$$a = \gamma,\; b = \alpha\,;\; a_{\pm 1} = \alpha t_1 \pm (B_1 \alpha - C\gamma) u_1\,,\; b_{\pm 1} = \gamma t_1 \pm (A\alpha - B_1 \gamma) u_1,$$

au moyen d'une solution quelconque α, γ *de l'équation*

$$A^2 = A\alpha^2 - 2B_1\, \alpha\gamma + C\gamma^2,$$

et des plus petits nombres entiers et positifs, t_1, u_1, *qui vérifient l'équation* $t^2 - \Delta\, u^2 = 1$.

31. Lorsque la classe quadratique proposée appartient à l'ordre improprement primitif, on détermine les classes cubiques correspondantes au moyen des équations

$$(1)\quad 2A^2 = 2Ab^2 - 2Bab + 2Ca^2,\; Ac - Bb + Ca = 0,\; Ad - Bc + Cb = 0,$$

dans lesquelles B désigne un nombre impair et A, un nombre premier non-diviseur de 2B. Nous savons d'ailleurs (n° 16) que les deux dernières équations seront toujours résolues en nombres entiers c, d, pourvu que la première soit résolue en nombres entiers et premiers entre eux, tels que a soit premier avec A. On peut même négliger la dernière condition, lorsque la forme (2A, B, 2C) n'appartient par à la classe principale de l'ordre improprement primitif, classe que nous représenterons par la forme $\left(2,\ 1,\ \frac{1-D}{2}\right)$. Supposons en effet $a = Ak_1$, de sorte que la première équation devient

$$2A = 2b^2 - 2Bkb + 2Ack^2,\quad B^2 - 4Ac = D.$$

La forme (2, − B, 2AC) est contiguë et, conséquemment équivalente à la forme $\left(\frac{1-D}{2}, -1, 2\right) = \left(2, 1, \frac{1-D}{2}\right)$. Les deux formes (2A , B , 2C) et $\left(2,\ 1,\ \frac{1-D}{2}\right)$ sont équivalentes, puisqu'elles représentent le double d'un même nombre premier A. Donc

I. *Si la classe proposée* (2A, B, 2C) *est différente de la classe représentée par la forme* $\left(2.\ 1,\ \frac{1-D}{2}\right)$, *il est impossible que l'équation*

$$(2)\qquad 2A^2 = 2Ab^2 - 2Bab + 2\,Ca^2$$

soit vérifiée en nombres entiers et premiers entre eux, a, b, *sans que le nombre* a *soit premier avec* A.

32. Lorsque la classe proposée de l'ordre improprement primitif est la classe principale de cet ordre, nous la représentons par la forme $\left(2,\ 1,\ \frac{1-D}{2}\right)$, de sorte que les équations (1) deviennent

$$(3)\quad 2 = 2b^2 - 2ab + \frac{1-D}{a}a^2,\quad c - b + \frac{1-D}{4}a = 0,\quad d - c + \frac{1-D}{4}b = 0.$$

La première équation peut se mettre sous la forme

$$(4)\qquad 4 = (2b - a)^2 - Da^2,$$

où l'on voit que, si le déterminant D est négatif et différent de − 3, il

n'existe que deux solutions, $a=0$, $b=\pm 1$. La solution $a=0$, $b=1$ donne la forme cubique $\left(0, 1, 1, \frac{3+D}{4}\right)$. L'autre solution donne cette même forme multipliée par -1, ce qui revient à la transformer par la substitution $(-1, 0; 0, -1)$. Donc

II. *Si le déterminant* D *est négatif et différent de* -3, *la classe improprement primitive* $\left(2, 1, \frac{1-D}{2}\right)$ *correspond à une classe cubique, unique, représentée par la forme* $\left(0, 1, 1, \frac{3+D}{4}\right)$.

Lorsque $D=-3$, l'équation (4) admet six solutions

$$a=0,\ b=\pm 1;\ a=\pm 1,\ a=b=\pm 1.$$

En se bornant aux signes supérieurs, on obtient les trois formes

$$(0, 1, 1, 0),\ (1, 0, -1, -1),\ (1, 1, 0, -1).$$

Avec les signes inférieurs on obtiendrait ces mêmes formes affectées du signe $-$. Les deux dernieres formes sont improprement équivalentes, elles se transforment l'une en l'autre par la substitution $(0, -1; -1, 0)$. Quant à la forme $(0, 1, 1, 0)$ il est évident qu'elle ne peut être équivalente à aucune des deux autres, car elle a ses trois facteurs linéaires rationnels, tandis que les deux autres ont leurs facteurs linéaires irrationnels. Donc

III. *La classe quadratique* $(2, 1, 2,)$ *du déterminant* -3 *correspond à trois classes cubiques différentes, représentées respectivement par les* 3 *formes* $(0, 1, 1, 0)$, $(1, 0, -1, -1)$, $(1, 1, 0, -1)$.

33. Lorsque le déterminant D est positif et non-carré, l'équation (4) admet une infinité de solutions, de sorte que la forme proposée $\left(2, 1, \frac{1-D}{2}\right)$ est la forme déterminante d'une infinité de formes cubiques déterminées par les formules

$$(5)\qquad a=u,\ b=\frac{t+u}{2},\ c=\frac{2t+(D+1)u}{4},\ d=\frac{(3+D)t+(1+3D)u}{8},$$

dans lesquelles on représente d'une manière indéfinie par t, u, toutes les solutions de l'équation

$$(6)\qquad t^2-Du^2=4$$

en nombres entiers, positifs, nuls ou négatifs. Les nombres t, u sont pairs, si D est de la forme $8l+1$; ils peuvent être pairs ou impairs si D est de la forme $8l+5$.

Proposons nous de déterminer les divers classes en lesquelles on peut distribuer toutes ces formes cubiques. Pour cela désignons par $f=(a,b,c,d)$, $f'=(a',b',c',d')$ deux de ces formes cubiques, qui correspondent dans les formules (5) aux deux solutions t, u; t', u' de l'équation (6). Supposant ces deux formes équivalentes, désignons par $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ une trasformation de f en f. Cette transformation doit changer le covariant de f en celui de f'; comme ces deux formes ont le même covariant.

$$\frac{1}{2}\left(2,\, 1,\, \frac{1-D}{2}\right)=x^2+xy+\frac{1-D}{4}\,y^2,$$

la transformation $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ doit changer la forme $\left(2,\, 1,\, \frac{1-D}{2}\right)$ en elle-même. Elle est donc comprise dans les formules

$$\alpha=\frac{t-u}{2},\quad \beta=-\frac{1-D}{4}u,\quad \gamma=u,\quad \delta=\frac{t+u}{2}. \tag{7}$$

Les éléments a', b' de la forme transformée f' sont exprimés par les formules

$$a'=a\alpha^3+3b\alpha^2\gamma++3c\alpha\gamma^2+d\gamma^3,$$

$$b'=a\alpha^2\beta+b\,(\alpha^2\delta+2\alpha\beta\gamma)+c\,(2\alpha\gamma\delta+\beta\gamma^2)+d\,\gamma^2\delta.$$

En faisant dans ces formules la substitution (7), en éliminant c, d au moyen des formules (3) d'où l'on déduit

$$c=b-\frac{1-D}{4}a,\quad d=\frac{3+D}{4}b-\frac{1-D}{4}a,$$

on trouve après réduction, eu égard à la formule (6),

$$\text{(A)}\quad\left|\begin{array}{l} a'=a\left(\dfrac{t^3-3t^2u+3Dtu^2-Du^3}{8}\right)+2b\left(\dfrac{3t^2u+Du^3}{8}\right), \\[2ex] b'=-\dfrac{1-D}{2}\left(\dfrac{3t^2u+u^3}{8}\right)a+\left(\dfrac{t^3+3t^2u++3Dtu^2+Du^3}{8}\right)b. \end{array}\right.$$

Les deux autres éléments c', d' se déterminent au moyen des formules

$$(a)\qquad c' = b' - \frac{1-D}{4}a', \quad d' = \frac{3+D}{4}b' - \frac{1-D}{4}a'.$$

34. Or si l'on désigne par t_1, u_1 les plus petits nombres entiers et positifs qui satisfont à l'équation (4), toutes les autres solutions se déduisent des formules

$$(8)\qquad \frac{t_n + u_n\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_1 + u_1\sqrt{D}}{2}\right)^n, \quad \frac{-t_n + u_n\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_1 + u_1\sqrt{D}}{2}\right)^n,$$

en donnant à n toutes les valeurs entières, de $-\infty$ à $+\infty$. Mais nous pouvons nous borner à la première formule, qui correspond aux valeurs positives de t, car en changeant t, u en $-t$, $-u$, on voit par les formules (5) que la forme (a, b, c, d) est remplacée par la forme équivalente $(-a, -b, -c, -d)$.

Toutes les formes cubiques qui ont pour forme déterminante la forme quadratique $\left(2, 1, \frac{1-D}{2}\right)$ sont donc exprimées par les formules

$$(9)\qquad f = \pm f_n = \pm(a_n, b_n, c_n, d_n)$$

$$(10)\quad a_n = u_n, \; b_n = \frac{t_n + u_n}{2}, \; c_n = \frac{2t_n + (1+D)u_n}{4}, \; d_n = \frac{(3+D)t_n^{?} + (1+3D)u_n}{8},$$

dans lesquelles t_n, u_n sont déterminés par la formule

$$(8)\qquad \frac{t_n + u_n\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_1 + u_1\sqrt{D}}{2}\right)^n.$$

Si la solution t, u qui figure dans les formules (A) correspond à la valeur i de l'indice n, on a par la formule (8)

$$\frac{t_{3i} + u_{3i}\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_1 + u_1\sqrt{D}}{2}\right)^{3i} = \left(\frac{t + u\sqrt{D}}{2}\right)^3,$$

$$\frac{t_{3i}}{2} = \left(\frac{t^3 + 3Dtu^2}{8}\right), \quad \frac{u_{3i}}{2} = \frac{3t^2u + Du^3}{8}.$$

Les expressions (A) peuvent donc s'écrire

$$(B) \quad \left| \begin{aligned} a' &= \frac{t_{3i} - u_{3i}}{2}\, a + \frac{u_{3i}}{2} . \, 2b, \\ b' &= -\frac{1 - D}{2}\, u_{3i}\, a + \frac{t_{3i} + u_{3i}}{2}\, b. \end{aligned} \right.$$

35. Les formules (B) et (a) déterminent toutes les formes cubiques f qui, étant déterminées par les formules (9) et (10), sont équivalentes à la forme f. si la forme f correspond dans ces formules à l' indice $n = 0$, on trouve $a = u_0 = 0$, $b = \frac{t_0 + u_0}{2} = 1$, $c = 1$, $d = \frac{3 + D}{4}$. En substituant dans les formules (B) $a = 0$, $b = 1$, on trouve

$$a' = u_{3i},\ b' = \frac{t_{3i} + u_{3i}}{2},$$

Donc les formes f_n qui sont proprement équivalentes à la forme $f_0 = \left(0, 1, 1, \frac{3 + D}{4}\right)$, sont celles dont l' indice n est divisible par 3.

Si la forme f correspond à l' indice $n = 1$, on a par les formules (10) $a = u_1$, $b = \frac{t_1 + d_1}{2}$. En substituant ces expressions dans les équations (B), on trouve

$$a' = \frac{t_{3i}\, u_1 + u_{3i}\, t_1}{2},\ b' = \frac{t_{3i} t_1 + D u_{3i} u_1}{4} + \frac{t_{3i}\, u_1 + u_{3i}\, t_1}{4}$$

Or on déduit de la formule (8), en y faisant $n = 3i + 1$,

$$\frac{t_{3i+1} + u_{3i+1}\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_{3i} + u_{3i}\sqrt{D}}{2}\right)\left(\frac{t_1 + u_1\sqrt{D}}{2}\right),$$

$$t_{3i+1} = \frac{t_{3i}\, t_1 + D u_{3i}\, u_1}{2},\ u_{3i+1} = \frac{t_{3i} u_1 + u_{3i}\, t_1}{2}.$$

On a donc $a' = u_{3i+1}$, $b' = \frac{t_{3i+1} + u_{3i+1}}{2}$. Per conséquent la forme $f' = (a'b'c'd')$ se déduit des formules (9) et (10) en y faisant $n = 3i + 1$. Donc toutes les formes qui correspondent dans les formules (9) et (10) à un indice de la forme $3i + 1$ sont équivalentes à la forme

$$f_1 = \left(u_1, \frac{t_1 + u_1}{2}, \frac{2t_1 + (1+D)u_1}{4}, \frac{(3+D)t_1 + (1+3D)u_1}{8}\right).$$

Enfin si l'on fait $n = -1$ dans les formules (8) et (9) on trouve

$$t_{-1} = t_1,\ u_{-1} = -u_1;\ a_{-1} = -u_1,\ b_{-1} = \frac{t_1 - u_1}{2}.$$

On trouvera les premiers éléments a', b' de toutes les formes f_n équivalentes à f_{-1} en faisant dans les formules (B), $a = -u_{-1}, b = \frac{t_1 - u_1}{2}$; on trouve ainsi

$$a' = -\frac{t_{3i}u_1 + u_{3i}t_1}{2},\ b' = \frac{t_{3i}t_1 - Du_{3i}u_1}{4} + \frac{-t_{3i}u_1 + u_{3i}t_1}{4}.$$

Or, si l'on fait $n = 3i - 1$ dans la formule (8), on trouve

$$\frac{t_{3i-1} + u_{3i-1}\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_{3i} + u_{3i}\sqrt{D}}{2}\right)\left(\frac{t_1 - u_1\sqrt{D}}{2}\right)$$

$$t_{3i-1} = \frac{t_{3i}t_1 - Du_{3i}u_1}{2},\ u_{3i-1} = \frac{-t_{3i}u_1 + u_{3i}t_1}{2}.$$

On a donc

$$a' = u_{3i-1},\ b' = \frac{t_{3i-1} + u_{3i-1}}{2},$$

et l'on conclut de là que les formes f_n équivalentes à la forme f_{-1} se déduisent des formules (9) et (10) en y donnant à n toutes les valeurs entières, positives ou négatives, comprises dans la formule $3i - 1$.

Comme toutes les valeurs possibles de n sont comprises dans les trois formules $3i$, $3i + 1$, $3i - 1$, toutes les formes cubiques renfermées dans les formules (9) et (10), c'est-à-dire toutes les formes cubiques qui ont pour forme déterminante la forme quadratique $\left(2, 1, \frac{3 + D}{2}\right)$ sont comprises dans trois classes représentées par les trois formes

$$f_0 = \left(0, 1, 1, \frac{3 + D}{4}\right),$$

$$f_1 = \left(u_1, \frac{t_1 + u_1}{2}, \frac{2t_1 + (1 + D) u_1}{4}, \frac{(3 + D) t_1 + (1 + 3D) u_1}{8}\right),$$

$$f_{-1} = \left(-u_1, \frac{t_1 - u_1}{2}, \frac{2t_1 - (1 + D) u_1}{4}, \frac{(3 + D) t_1 - (1 + 3D) u_1}{8}\right),$$

où t_1, u_1 désignent les plus petits nombres entiers et positifs qui vérifient l'équation

$$t^2 - Du^2 = 4.$$

Les deux dernières classes, représentées par les formes f_1, f_{-1} sont opposées, car les deux formes f_1, f_{-1} sont improprement équivalentes, la forme f_1 se transforme en f_{-1} par la substitution impropre $(-1, -1; 0, 1)$.

36. Si la forme proposée $(2A, B, 2C)$ n'est pas équivalente à la forme $\left(2, 1, \frac{1 - D}{2}\right)$, elle est composée de cette dernière forme et de la forme primitive $(A, B, 4C)$. La duplication de cette forme donne pour résultantes les formes comprises dans la formule $(A^2, B', 4C')$, dont les coefficients B', C' sont déterminés par les formules suivantes :

$$B' = B + 2Ap, \quad Bp + C \equiv 0 \pmod{A}, \quad B'^2 - 4A^2C' = D.$$

La forme $(A, B, 4C)$ n'appartient pas à la classe principale, parce que dans ce cas la résultante $(2A, B, 2C)$ serait équivalente à la forme $\left(2, 1, \frac{1-D}{2}\right)$, contrairement à l'hyphothèse. La duplication de la forme $(A, B, 4C)$ ne peut donc pas donner des formes de même classe qu'elle. Les deux formes $(A, B, 4C)$, $(A^2, B', 4C')$ appartiennent donc à deux classes différentes. Il en est de même pour les deux formes $(2A, B, 2C)$, $(2A^2, B', 2C')$, lorsque les deux ordres primitifs présentent le même nombre de classes. Mais cette dernière forme est proprement ou improprement équivalente à la forme $(2A, -B, 2C)$, puisque ces deux formes représentent proprement le double d'une même puissance d'un même nombre premier A. Si les deux formes $(2A^2, B', 2C')$, $(2A, -B, 2C)$ étaient improprement équivalentes, les deux formes $(2A^2, B', 2C')$, $(2A, B, 2C)$ seraient proprement équivalentes, ce qui est impossible, puisque nous venons de montrer qu'elles appartiennent à deux classes différentes. Ainsi les deux formes $(2A^2, B', 4C')$, $(2A, -B, 2C)$ appartiennent à la même classe. Il en est de même des deux formes $(A^2, B', 4C')$,

$(A, -B, 4C)$, puisque leur composition avec la forme $\left(2, 1, \frac{1-D}{2}\right)$ donne des résultantes de même classe. Il résulte de là que la duplication de la classe $(A, B, 4C)$ donne pour résultante la classe opposée $(A, -B, 4C)$; sa triplication donne par conséquent la classe principale. Donc, lorsque les deux ordres primitifs renferment le même nombre de classes,

Les classes quadratiques improprement primitives d'un déterminant D *qui correspondent à des classes cubiques, sont celles qu'on obtient en composant la classe* $\left(2, 1, \frac{1-D}{2}\right)$ *avec les classes proprement primitives, dont la triplication donne pour résultante la classe principale.*

Lorsque le nombre des classes primitives est triple de celui des classes improprement primitives, les formes improprement primitives qui correspondent à des formes cubiques, sont celles qu'on obtient en composant la classe $\left(2, 1, \frac{1-D}{2}\right)$ avec les classes proprement primitives dont la triplication produit l'une des trois classes

$$(1, 0, -D), \left(4, \pm 1, \frac{1-D}{4}\right).$$

37. Puisque les deux formes $(2A^2, B', 2C')$, $(2A, -B, 2C)$ appartiennent à une même classe, on résoudra complètement l'équation

$$(2) \qquad 2A^2 = 2Ab^2 - 2Bab + + 2Ca^2,$$

en déterminant toutes les transformations $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ de la forme $(2A, -B, 2C)$ en $(2A^2, B', 2C')$ et en prenant, pour chaque transformation, $b = \alpha$, $a = \gamma$.

Lorsque le déterminant D est négatif et différent de -3, il n'existe que deux transformations de la forme $(2A, -B, 2C)$ en $(2A^2, B', 2C')$. savoir $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ et $(-\alpha, -\beta; -\gamma, -\delta)$. Comme ces deux transformations déterminent deux classes cubiques $\pm(a, b, c, d)$ proprement équivalentes, nous nous bornerons à l'une d'elles. Ainsi *une classe improprement primitive d'un déterminant négatif, différent de* -3, *ne correspond jamais qu'à une seule classe cubique.*

Quant au déterminant -3, il ne présente qu'une seule classe improprement primitive $(2, 1, 2)$, qui correspond à trois classes cubiques.

Lorsque le déterminant D est positif, il existe une infinité de transformations de $(2A, -B, 2C)$ en $(2A^2, B', 2C')$, d'où l'on déduit pour l'équa-

tion (2) autant de solutions. Toutes ces solutions se déduisent de l'une d'elles, a, b au moyen des formules

$$(3)\qquad b' = \frac{bt + (bB - 2Ca)u}{2},\quad a' = \frac{at + (2Ab - Ba)u}{2},$$

où l'on désigne par t, u, d'une manière indéfinie, toutes les solutions en nombres entiers de l'équation

$$(4)\qquad t^2 - Du^2 = 4.$$

Nous nous bornerons aux solutions dans lesquelles la valeur de t est positive, parce que les autres solutions donnent des formes cubiques $(-a', -b', -c', -d')$ que l'on déduit des autres formes par la substitution $(-1, 0; 0, -1)$. Toutes ces solutions de l'équation (4) sont données par la formule

$$(5)\qquad \frac{t_n + u_n\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_1 + u_1\sqrt{D}}{2}\right)^n,$$

où l'on désigne par t_1, u_1 les plus petits nombres entiers et positifs qui vérifient l'équation (4). Si donc l'on désigne par a_n, b_n, c_n, d_n les valeurs de a', b', c', d' qui correspondent à la solution $t = t_n$, $u = u_n$, toutes les formes cubiques, dont le double du covariant quadratique est la forme $(2A, B, 2C)$ sont déterminées par les formules

$$(6)\qquad \left|\begin{array}{l} f = \pm f_n = \pm (a_n, b_n, c_n, d_n), \\[2mm] b_n = \dfrac{bt_n + (Bb - 2Ca)u_n}{2},\quad a_n = \dfrac{at_n + (2Ab - Ba)u_n}{2}, \\[2mm] c_n = \dfrac{ct_n + (Bc - 2Cb)u_n}{2},\quad d_n = \dfrac{dt_n + (Bd - 2Cc)u_n}{2} \end{array}\right.$$

dont les deux dernières se déduisent des deux précédentes en les combinant avec les formules

$$(7)\qquad \left|\begin{array}{l} Ac - Bb + Ca = 0,\qquad Ad - Bc + Cb = 0, \\[2mm] Ac_n - Bb_n + Ca_n = 0,\quad Ad_n - Bc_n + Cb_n = 0. \end{array}\right.$$

38. Proposons-nous de déterminer les diverses classes dans lesquelles sont distribuées les formes cubiques exprimées par les équations (5) et (6). Si

deux formes $f_n, f_{n'}$, sont équivalentes, la substitution propre $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ qui transforme f_n en $f_{n'}$, doit changer la forme (2A, B, 2C) en elle-même. On a donc

$$\alpha = \frac{t - Bu}{2}, \ \beta = -Cu, \ \gamma = Au, \ \delta = \frac{t + Bu}{2}, \tag{8}$$

en désignant par (t, u) une solution quelconque de l'équation (4). En faisant cette substitution dans la forme (a_n, b_n, c_n, d_u) et exprimant que la transformée est la forme (a', b', c', d'), on trouve

$$a' = a_n \left(\frac{t - Bu}{2}\right)^3 + 3\, b_n \left(\frac{t - Bu}{2}\right)^2 Au + 3c_n \left(\frac{t - Bu}{2}\right) A^2u^2 + d_n\, A^3u^3$$

$$b' = -a_n \left(\frac{t - Bu}{2}\right)^2 Cu + b_n \left[\frac{(t^2 - B^2u^2)}{4}\, \frac{(t - Bu)}{2} - ACu^2(t - Bu)\right]$$

$$+ c_n \left[Au \left(\frac{t^2 - B^2u^2}{2}\right) - Cu.A^2u^2\right] + d_n\, A^2u^2 \left(\frac{t + Bu}{2}\right).$$

On simplifie ces formules en éliminant c_n, d_n au moyen des formules (7) et en ordonnant le résultat par rapport à a_n, b_n. On trouve ainsi

$$a' = a_n \left(\frac{t^3 + 3Dtu^2 - B\,(3t^2u + Du^3)}{8}\right) + 2Ab_n\, \frac{3t^2\, u + Du^3}{8},$$

$$b' = -\, Ca_n\, \frac{3t^2u + Du^3}{4} + b_n \left(\frac{t^3 + 3Dtu^2 + B\,(3t^2u + Du^3)}{8}\right).$$

Or en désignant par i l'exposant positif ou négatif qui détermine dans la formule (5) la solution t, u employée dans la substitution (8), on a $t = t_i$, $u = u_i$ et l'on déduit de la formule (5)

$$\frac{t_{3i} + u_{3i}\, \sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_1 + u_1\, \sqrt{D}}{2}\right)^{3i} = \left(\frac{t + u\, \sqrt{D}}{2}\right)^3,$$

$$t_{3i} = \frac{t^3 + 3Dtu^2}{4} \quad u_{3i} = \frac{3t^2\, u + Du^3}{4}.$$

Les formules précédentes deviennent donc

$$a' = a_n \left(\frac{t_{3i} - \mathrm{B}u_{3i}}{2}\right) + \mathrm{A}u_{3i}\, b_n,$$

$$b' = - \mathrm{C}u_{3i}\, a_n + \left(\frac{t_{3i} + \mathrm{B}u_{3i}}{2}\right) b_n.$$

Substituons dans ces formules les expressions (6) de a_n, b_n; nous trouvons

$$a' = \left(\frac{t_{3i}\, t_n + \mathrm{D}u_{3i}\, u_n}{4} - \mathrm{B}\, \frac{t_n\, u_{3i} + u_n\, t_{3i}}{4}\right) a + \mathrm{A} \left(\frac{t_n\, u_{3i} + u_n\, t_{3i}}{2}\right) b,$$

$$b' = - \mathrm{C}\, \frac{t_n\, u_{3i} + u_n\, t_{3i}}{2}\, a + \left(\frac{t_{3i}\, t_n + u_{3i}\, u_n}{4} + \mathrm{B}\, \frac{t_n\, u_{3i} + u_n\, t_{3i}}{4}\right) b.$$

D'ailleurs on déduit de la formule (5)

$$\frac{t_{3i+n} + u_{3i+n}\sqrt{\mathrm{D}}}{2} = \left(\frac{t_{3i} + u_{3i}\sqrt{\mathrm{D}}}{2}\right) \left(\frac{t_n + u_n\sqrt{\mathrm{D}}}{2}\right),$$

$$t_{3i+n} = \frac{t_{3i}\, t_n + \mathrm{D}u_{3i}\, u_n}{2}, \quad u_{3i+n} = \frac{u_{3i}\, t_n + t_{3i}\, c_n}{2}.$$

Les expressions de a', b' deviennent donc

$$a' = \frac{t_{3i+n} - \mathrm{B}u_{3i+n}}{2}\, a + \mathrm{A}u_{3i+n}\, b = a_{3i+n}$$

$$b' = - \mathrm{C}u_{3i+n}\, a + \frac{t_{3i+n} + \mathrm{B}u_{3i+n}}{2}\, b = b_{3i+n}.$$

On conclut de là que les formes $f_{n'}$ équivalentes à la forme f_n sont celles dont les indices sont exprimés par la formule $n' = 3i + n$, où l'on désigne par i un nombre entier quelconque, positif ou négatif. Toutes les formes cubiques dont l'indice est multiple de 3 sont équivalentes à la forme $f_0 = (a, b, c, d)$; toutes celles dont l'indice est de la forme $3i + 1$ sont équivalentes à la forme f_1, et toutes celles dont l'indice est de la forme $3i - 1$ sont équivalentes à la forme f_{-1}. Donc

Les formes cubiques qui ont pour forme déterminante une forme improprement primitive (2A, B, 2C) *d'un déterminant positif, sont distribuées en trois classes, représentées respectivement par les trois formes*

$$f_0 = (a, b, c, d),\ f_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1),\ f_{-1} = (a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, d_{-1}),$$

que l'on déduit des formules (6) *en faisant successivement* $n = 0$, $n = 1$, $n = -1$.

Comme $t_{-1} = t_1$, $u_{-1} = -u_1$, la forme f_{-1} se déduit de la forme f_1 en changeant u_1 en $-u_1$.

39. Lorsqu'on a déterminé les formes cubiques qui correspondent à une forme $(2A, B, 2C)$, on obtient aisément celles qui ont pour forme déterminante la forme opposée $(2A, -B, 2C)$. Si l'on désigne par a', b', c', d' les éléments de l'une de ces formes cubiques, on doit résoudre le système

$$2A^2 = 2Ab'^2 + 2Ba'b' + 2Ca'^2,\ Ac' + Bb' + Ca' = 0,\ Ad' + Bc' + Cb' = 0.$$

En comparant ces formules avec celles qui correspondent à la forme quadratique $(2A, B, 2C)$, savoir

$$2A^2 = 2Ab^2 - 2Bab + 2Ca^2,\ Ac - Bb + Ca = 0,\ Ad - Bc + Cb = 0,$$

on voit qu'elles sont vérifiées en prenant $a' = a$, $b' = -b$, $c' = c$, $d' = -d$. Ainsi, à toute forme cubique (a, b, c, d), ayant pour forme déterminante la forme $(2A, B, 2C)$, correspond une forme cubique $(a, -b, c, -d)$ dont la forme déterminante est la forme $(2A, -B, 2C)$ opposée à la première.

Lorsque le déterminant D est positif et qu'on a déterminé les trois classes cubiques (a, b, c, d), (a_1, b_1, c_1, d_1), $(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, d_{-1})$ qui correspondent à la classe quadratique $(2A, B, 2C)$, on connaît immédiatement les trois classes cubiques qui correspondent à la classe quadratique opposée $(2A, -B, 2C)$; ces trois classes sont représentées par les trois formes

$$(a, -b, c, -d),\ (a_1, -b_1, c_1, -d_1),\ (a_{-1}, -b_{-1}, c_{-1}, -d_{-1}),$$

que l'on déduit des précédentes en changeant les signes du deuxième et du quatrième coefficient.

40. Pour les équations (9), lorsque le nombre (m) se réduit à l'unité, on procède comme nous venons de le faire pour les deux systèmes (5) et (7). Dans le système (9), le covariant quadratique ne diffère pas de la forme déterminante; c'est une forme improprement primitive $(2A_1, B_1, 2C_1)$. Les formes cubiques qui correspondent à cette forme déterminante se déduisent des diverses solutions de l'équation

$$(13)\qquad 8A_1^2 = t^2 - \Delta u^2,\ \text{où}\ \Delta = B_1^2 - 4A_1C_1,$$

au moyen des formules

$$(14)\qquad a = u \quad b = \frac{t + B_1 u}{2A_1}, \quad c = \frac{B_1 b - C_1 a}{A_1}, \quad d = \frac{B_1 c - C_1 a}{A_1}.$$

L'équation (13) n'est possible en nombres entiers et premiers entre eux qu'autant que le déterminant Δ est de la forme $8l + 1$. Si Δ est de la forme $8l + 5$, aucune forme cubique primitive du déterminant Δ ne correspond à la forme $(2A_1, B_1, 2C_1)$; car si le nombre a est pair dans les formules

$$2A_1 = b^2 - ac, \quad 2C_1 = c^2 - bd,$$

il faut que b et c soient pairs, et comme A_1 est impair, on déduit de la formule $A_1 d - B_1 c + C_1 b = 0$ que d est aussi pair. Par conséquent la forme (a, b, c, d) est une forme dérivée, contrairement à l'hypothèse.

Lorsque le déterminant Δ est négatif, l'équation (13) n'admet que quatre solutions $\pm(t, u), \pm(t, -u)$; mais lorsque A_1 ne se réduit pas à l'unité, c'est-à-dire lorsque la forme $(A_1, B_1, 4C_1)$ n'appartient pas à la classe principale, deux seulement, de ces solutions sont admissibles dans nos formules, parce que le signe du rapport $t : u$ est déterminé par la congruence $t + B_1 u \equiv 0 \pmod{2A_1}$, qui doit être vérifiée pour que la valeur de b soit entière. A ces deux solutions (t, u), $(-t, -u)$ correspondent deux formes cubiques (a, b, c, d), $(-a, -b, -c, -d)$, qui, se déduisant l'une de l'autre par la substitution propre $(-1, 0; 0, -1)$, sont proprement équivalentes. Dans ce cas, une seule classe cubique correspond à la classe quadratique improprement primitive $(2A_1, B_1, 2C_1)$. Mais si la forme $(A_1, B_1, 4C_1)$ appartient à la classe principale, auquel cas nous prenons $A_1 = B_1 = 1$, les quatre solutions sont admissibles et deux classes cubiques, improprement équivalentes correspondent à la classe $\left(2, 1, \frac{1 - \Delta}{2}\right)$.

Lorsque le déterminant Δ est positif, l'équation (13) admet une infinité de solutions. Mais toutes ces solutions ne correspondent pas à des formes cubiques, parce que le signe du rapport $t : u$ est déterminé par la congruence $t + B_1 u \equiv 0 \pmod{2A_1}$. Si l'on désigne par t_1, u_1 les plus petits nombres entiers et positifs qui verifient l'équation (13), et qu'on suppose le signe de u_1 choisi de manière à vérifier la congruence $t_1 + B_1 u_1 \equiv 0 \pmod{2A_1}$; si de plus l'on désigne par x, y une solution quelconque de l'équation $x^2 - \Delta y^2 = 1$, toutes les solutions renfermées dans les formules

$$t = xt_1 + \Delta y u_1, \quad u = t_1 y + u_1 x$$

satisfont à la congruence $t + Bu \equiv 0 \pmod{2A_1}$ et correspondent à des formes cubiques, exprimées par les formules (14). Mais on démontre, comme nous l'avons fait précédemment pour les systèmes (5) et (7) que toutes ces formes sont renfermées dans trois classes.

Si la forme $(A_1, B_1, 4C_1)$ appartient à la classe principale, on prend $A_1 = B_1 = 1$, $C_1 = \frac{1 - \Delta}{4}$. Dans ce cas les deux congruences $t_1 + u_1 \equiv 0$ et $t_1 - u_1 \equiv 0 \pmod{2}$ sont vérifiées en même temps, les solutions renfermées dans les formules $t = xt_1 - \Delta y u_1$, $u = -xu_1 + t_1 y$ correspondent aussi à une infinité de formes cubiques, partagées en trois classes, ces trois classes sont improprement équivalentes aux trois classes qui correspondent aux solutions précédentes.

Ch. IV. *Détermination des classes cubiques primitives qui correspondent à une même classe quadratique d'une ordre dérivé.*

41. Reprenons les systèmes (5), (7) et (9) du n° 24, en supposant $m > 1$, ce qui revient à supposer que l'on considère une classe quadratique appartenant à un ordre dérivé. Nous avons démontré que la résolution de chacun de ces systèmes dépend uniquemente de celle de la premiere équation, sous la seule condition que le nombre a soit premier avec b et avec A_1. Comme la méthode à suivre est toute semblable dans ces trois systèmes, nous nous bornerons à considérer le système (5) dans lequel B_1, m sont des nombres impairs et A_1 désigne un nombre premier non diviseur du produit $2mB_1$. Pour simplifier les notations nous remplacerons A_1, B_1, C_1 par P, Q, R, de sorte que les équations (4) et (5) deviendront

$$(1) \qquad A = mP,\ B = mQ,\ C = mR,$$

$$(2) \qquad mP^2 = Pb^2 - Qab + Rb^2,\ Pc - Qb + Ra = 0,\ Pd - Qc + Rb = 0.$$

La forme cubique (a, b, c, d) déterminée par ces formules a pour déterminant $D = m^2(Q^2 - 4PR) = m^2\Delta$, et pour covariant quadratique

$$F = mPx^2 + m\,Qxy + mRy^2.$$

Il résulte du théorème VI du n° 17 que l'unique conditiou à remplir pour que le système (2) soit résoluble en nombres entiers et premiers entre eux a, b, c, d est que l'on puisse résoudre l'équation

$$(3) \qquad 4mP^3 = t^2 - \Delta a^2$$

en nombres entiers t, a n'ayant pas de diviseur commun autre que 1 ou 2. Toutes les solutions de l'équation (3) ne correspondent pas à des formes cubiques, parce que le signe du rapport $t : a$ est déterminé par la congruence $t + Qa \equiv 0$ (mod. 2P), que l'on doit vérifier pour que b soit un nombre entier. Les coefficients b, c, d sont déterminés par les formules

$$(4) \qquad b = \frac{t + Qa}{2P}, \quad c = \frac{Qb - Ra}{P}, \quad d = \frac{Qc - Rb}{P}.$$

42. Le nombre $\Delta = Q^2 - 4PR$ est toujours de l'une des deux formes $8l + 1$ ou $8l + 5$. S'il est de la dernière forme, il y a lieu de distinguer deux groupes de solutions, celles dans lesquelles t et a sont impairs et celles où ces deux nombres sont pairs. Mais si Δ est de la forme $8l + 1$, l'équation (3) n'est pas résoluble en nombres impairs, parce que le second membre serait divisible par 8, tandis que le premier est de la forme $8l + 4$. Nous examinerons ce dernier cas en premier lieu. Les deux nombres t, a étant pairs, nous posons

$$t = 2u, \quad a = 2v,$$

de sorte que l'équation à résoudre devient

$$(3') \qquad mP^3 = u^2 - \Delta v^2,$$

et les éléments (a, b, c, d) des formes cubiques correspondantes sont exprimés en fonctions des solutions u, v de cette équation, au moyen des formules

$$(4') \quad a = 2v, \quad b = \frac{u + Qv}{P}, \quad c = \frac{Qb - Ra}{P}, \quad d = \frac{Qc - Rb}{P}.$$

Les nombres m, P étant impairs et premiers entre eux, le produit mP^3 ne peut être représenté par la forme principale du déterminant Δ qu'autant que les deux nombres m, P^3 sont représentés par deux classes opposées du même déterminant. Or le nombre P étant premier, son cube n'est représenté proprement que par deux classes opposées du déterminant Δ, et ces deux classes s'obtiennent par la triplication des deux classes $(P, \pm Q, 4R)$ auxquelles appartiennent les représentations du nombre P. Donc

Pour qu'il existe des formes quadratiques du déterminant $m^2\Delta$ *et de l'ordre dérivé* $(2m, 2)$, *qui correspondent à des formes cubiques, il faut et il suffit que l'une des classes quadratiques du déterminant* Δ, *par*

lesquelles le nombre m *est représenté, s'obtienne par la triplication d'une autre classe.*

43. Ce qui précède nous fournit une méthode simple pour déterminer les classes quadratiques dérivées ($2mP$, mQ, $2mR$) du déterminant $m^2\Delta$ qui correspondent à des formes cubiques primitives du même déterminant. Désignons indéfiniment, par l les diverses racines de la congruence $l^2 \equiv \Delta$ (mod. m). Les diverses classes proprement primitives du déterminant Δ auxquelles appartiennent les représentations du nombre m, peuvent s'exprimer par la formule

$$M = \left(m, l, \frac{l^2 - \Delta}{m}\right).$$

1° Si la congruence $l^2 \equiv \Delta$ (mod. m) n'admet pas de solution, ou bien si aucune des classes M ne peut s'obtenir par la triplication d'une autre classe, il n'existe aucune forme quadratique de l'ordre dérivé ($2m$, 2) du déterminant $D = m^2\Delta$ qui corresponde à des former cubiques.

2° Si une ou plusieurs des classes désignées par M s'obtiennent par triplication, soit H la classe dont la triplication produit la classe M. On a $H^3 = M$ et par conséquent les deux classes H, M appartiennent à un même genre et sont renfermées dans une même période. Soit E la base de cette période, λ le nombre des classes qui la composent, c'est-à-dire le plus petit nombre entier qui vérifie la condition $E^\lambda = (1, 0, -\Delta)$, et ϖ l'indice de la classe H. L'indice μ de la classe M doit vérifier la congruence

$$(a) \qquad \mu \equiv 3\varpi \pmod{\lambda},$$

que l'on déduit des équations symboliques

$$H = E^\varpi, \ M = E^\mu, \ H^3 = M, \ E^{3\varpi} = E^\mu.$$

Lorsque l'indice λ de la période E, E^2, E^3,... est premier avec 3, la congruence $3\varpi \equiv \mu$ (mod. λ) est toujours possible et elle n'admet qu'une seule solution. Mais lorsque λ est multiple de 3, cette congruence est impossible si μ est premier avec 3; elle admet trois solutions dans le cas contraire, savoir

$$\tfrac{1}{3}\mu, \ \tfrac{1}{3}(\mu + \lambda), \ \tfrac{1}{3}(\mu + 2\lambda).$$

Par conséquent pour déterminer les diverses classes quadratiques de

l'ordre dérivé $(2m, 2)$, du déterminant impair $m^2\Delta$ qui correspondent à des formes cubiques du même déterminant $m^2\Delta = 8l + 1$:

Il faut d'abord chercher les diverses classes proprement primitives $M, M', M'', \ldots$ du déterminant Δ qui représentent le nombre m;

Ranger en périodes les classes quadratiques du genre dans lequel ces diverses classes M sont comprises. Lorsque le déterminant Δ est régulier, toutes les classes du genre déterminé par le nombre m sont renfermées dans une même période;

Examiner successivement les périodes qui renferment les classes M. Si le nombre λ des classes qui composent l'une de ces périodes est premier avec 3, chacune des classes M renfermées dans cette période s'obtient par la triplication d'une classe H dont l'indice ϖ est déterminé en fonction de l'indice μ de M par la congruence

$$(a) \qquad 3\varpi \equiv \mu \pmod{\lambda}.$$

2° Si λ est multiple de 3, une classe M de la période considérée ne peut s'obtenir par triplication à moins que son indice μ ne soit divisible par 3; dans ce cas la classe M s'obtient par la triplication de trois classes qui ont respectivement pour indices les trois nombres $\frac{1}{3}\mu$, $\frac{1}{3}(\mu+\lambda)$, $\frac{1}{3}(\mu+2\lambda)$.

Soit P l'un des nombres premiers représentés par l'une des classes H ainsi déterminées. Désignons par Q la racine impaire de la congruence $Q^2 - \Delta \equiv 0 \pmod{P}$ et posons $R = \dfrac{Q^2 - \Delta}{4P}$. La classe H et la classe opposée H' sont représentées par les deux formes $(P, \pm Q, 4R)$. Les classes dérivées $(2mP, \pm mQ, 2mR)$ correspondent à des formes cubiques du déterminant Δ. Lorsque la classe H sera la classe principale $(1, 0, -\Delta)$, nous la représenterons par la forme $(1, 1, 1 - \Delta)$.

44. Il nous reste à déterminer les formes cubiques qui ont pour forme déterminante la forme dérivée $(2mP, mQ, 2mR)$. Pour cela on peut procéder de deux manières différentes: on peut déterminer les éléments a, b en résolvant l'équation quadratique

$$mP^2 = Pb^2 - Q\,ab + Ra^2$$

en nombres entiers et premiers entre eux, puis déterminer les éléments c, d au moyen des formules (2). On peut aussi résoudre l'équation

$$(3') \qquad mP^3 = u^2 - \Delta v^2$$

et déterminer les éléments (a, b, c, d) au moyen des formules (4'). Nous allons exposer cette deuxième méthode.

On cherche d'abord une racine de la congruence $x^2 \equiv \Delta$ (mod. P^2), en profitant de ce que l'on connaît déjà une racine Q de la congruence $x^2 - \Delta \equiv 0$ (mod. 4P). Soit $Q' = Q + 2hP$; on a

$$Q'^2 - \Delta = 4PR + 4hPQ + 4h^2P^2,$$

de sorte que Q' vérifie la congruence $x^2 - \Delta \equiv 0$ (mod. $4P^2$), pourvu que l'on détermine le nombre h au moyen de la congruence

$$R + Qh \equiv 0 \text{ (mod. P)},$$

Posons $Q'^2 - \Delta = 4R'P^2$, $Q'' = Q' + 2kP^2$. On a

$$Q''^2 - \Delta = 4R''P^2 + 4kQ'P^2 + 4k^2P^4,$$

de sorte que Q'' est racine de la congrnence $x^2 - \Delta \equiv 0$ (mod. $4P^3$) pourvu qu'on détermine le nombre k au moyen de la congruence

$$R' + Q'k \equiv 0 \text{ (mod. P)}.$$

Si l'on pose $Q''^2 - \Delta = 4R''P^3$, on peut représenter par les deux formes $(P^3, \pm Q'', 4R'')$ les deux classes obtenues par la triplication des deux classes $(P, \pm Q, 4R)$. L'une de ces deux classes doit renfermer la forme considérée $M = \left(m, l, \frac{l^2 - \Delta}{m}\right)$, et l'autre la forme opposée. Si l'on compose la forme $(P^3. Q'', 4R'')$ avec celle des deux formes $\left(m, \pm l, \frac{l^2 - \Delta}{m}\right)$ qui lui est improprement équivalente; on obtient une forme

$$L = (mP^3, Q_1, 4R_1), \; 4R_1 = \frac{Q_1^2 - \Delta}{mP^3}.$$

équivalente à la forme principale $(1, 0, -\Delta)$. Soit $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ une transformation de la forme $(1, 0, -\Delta)$ en la forme L. On obtient une solution de l'équation (3') en prenant $u = \alpha$, $v = \gamma$. On trouve ensnite toutes les solutions qui appartiennent à la même valeur de l'expression $\sqrt{\Delta}$ (mod. mP^3), en combinant cette solution (α, γ) avec les solutions de l'équation $x^2 - \Delta y^2 = 1$. Lorsque P est > 2, ce qui a lieu toutes les fois que la clasee H diffère de la classe principale, le signe du rapport $u : v$ est déterminé par la congruence $u + Qv \equiv 0$ (mod. P), ce qui exclut la moitié des solutions de l'é-

quation (3'). A chacune des solutions de l'équation (3') qui vérifient la congruence $u + Qv \equiv 0 \pmod{P}$ correspond une forme cubique (a, b, c, d). dont les éléments sont déterminés par les formules (4').

45. Lorsque la nombre Δ, toujours compris dans la forme $8x + 1$, est négatif, il n'existe que deux transformations propres de la forme $(1, 0, -\Delta)$ en la forme équivalente $(mP^2, Q_1, 4R_1)$, savoir $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ et $(-\alpha, -\beta; -\gamma, -\delta)$. Les deux formes cubiques qui correspondent à ces deux solutions se déduisent l'une de l'autre par la substitution $(-1, 0; 0, -1)$. Comme elles sont proprement équivalentes, il ne correspond qu'une seule classe de formes cubiques à la classe quadratique $(2mP, mQ, 2mR)$ et à la valeur l de l'expression $\sqrt{\Delta} \pmod{m}$.

Soit par exemple $\Delta = -47$. Ce déterminant offre cinq classes de formes quadratiques proprement primitives, rangées dans la période

$$E = (3, 1, 16),\ E^2 = (2, 3, 8),\ E^3 = (7, -3, 8),\ E^4 = (3, -1, 16),\ E^5 = 1.$$

Comme l'indice 5 de cette période est premier avec 3, chacune de ces classes s'obtient par la triplication d'une autre classe. Par conséquent, quelque soit la classe qui représente le nombre m, on trouve une classe, et une seule, dont la triplication donne cette classe.

Prenons $m = 3$. Ce nombre est représenté deux fois par chacune des deux classes opposées E, E^4. L'indice ϖ de la classe dont la triplication produit la classe E, est déterminé par la congruence $3\varpi \equiv 1 \pmod{5}$, d'où l'on déduit $\varpi = 2$. On a dans ce cas $P = 7$, $Q = 3$, $R = 2$.

L'équation (3') peut se résoudre de la manière suivante. La duplication de la forme (7, 3, 8) produit (49, 10, 3). La composition de ces deux formes donne $(7^3, 157, 72)$. Cette dernière forme est proprement équivalente à la forme $E = (3, 1, 16)$, laquelle se change en elle par la substitution $(9, 4; 2, 1)$. On conclut de là que l'on peut résoudre les équations

$$7^3 = 3x^2 + 2xy + 16y^2,\quad 3 \times 7^3 = (3x + y)^2 + 47y^2,$$

en prenant $x = 9$, $y = 2$. On a effectivement

$$3 \times 343 = (29)^2 + 47 \times 2^2.$$

L'équation $3 \times 343 = u^2 + 47v^2$ admet quatre solutions, $\pm(29, 2)$, $\pm(29, -2)$; les deux dernières sont exclues par la congrueoce $u + 3v \equiv 0 \pmod{7}$. qu'il faut vérifier afin que la valeur de b soit entière; les deux autres solutions

correspondent à deux formes cubiques équivalentes $\mp (a, b, c, d)$, dont les coefficients sont déterminés par les formules

$$a = 2v = 4,\quad b = \frac{29 + 6}{7} = 5,\quad c = \frac{3.5 - 2.4}{7} = 1,\quad d = \frac{3.1 - 2.5}{7} = -1.$$

Si l'on remplace la classe E par la classe opposée $(3, -1, 16)$ qui provient de la triplication de la classe $(7, -3, 8)$, on doit faire dans les formules (4') $u = 29$, $v = -2$, $P = 7$, $Q = -3$, $R = 2$; on trouve ainsi la forme cubique $(-4, 5, -1, -1)$ improprement équivalente à la forme précédente $(4, 5, 1, -1)$, dont elle se déduit par la transformation $(-1, 0; 0, 1)$.

Ainsi *l'ordre dérivé* $(6, 2)$ *du déterminant négatif* $D = -9 \times 47$ *ne renferme que deux classes quadratiques auxquelles il corresponde des classes cubiques, savoir les deux classes opposées, représentées par les deux formes* $(42, \pm 9, 12)$; *la classe* $(42, 9, 12)$ *correspond à la classe cubique* $(4, 5, 1, -1)$ *et la classe* $(42, -9, 12)$ *à la classe cubique opposée* $(-4, 5, -1, -1)$.

46. Lorsque le déterminant Δ est positif, non carré, l'équation (3) admet une infinité de solutions renfermées dans les formules

$$u = \alpha x + \Delta \gamma y,\quad v = \gamma x + \alpha y,$$

où x et y désignent indéfiniment toutes les solutions de l'équation $x^2 - \Delta y^2 = 1$, tandis que les nombres α, γ forment une solution de l'équation (3) et satisfont à la congruence

$$\alpha + Q\gamma \equiv 0 \pmod{P}.$$

Comme deux solutions opposées (u, v), $(-u, -v)$ donnent deux formes cubiques équivalentes, nous pouvons nous borner aux solutions qui correspondent à des valeurs positives de x. Soit donc x_1, y_1 les plus petits nombres entiers et positifs qui satisfont à l'équation $x^2 - \Delta y^2 = 1$. Les solutions de la même équation dans lesquelles la valeur de x est positive, se déduisent de la formule

$$x_n + y_n \sqrt{\Delta} = (x_1 + y_1 \sqrt{\Delta})^n \tag{5}$$

en y donnant à n toute la suite des valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. Celles des formes cubiques qui, ayant pour forme déterminante la forme dérivée $(2mP, mQ, 2mR)$, correspondent à ces solutions, sont déterminées par les formules

$$(6)\quad \left| \begin{array}{l} u_n = \alpha x_n + \Delta\gamma y_n, v_n = \gamma x_n + \alpha y_n, \\ a_n = 2v_n, \mathrm{P}.b_n = u_n + \mathrm{Q}v_n, \\ \mathrm{P}c_n = \mathrm{Q}b_n - \mathrm{R}a_n, \mathrm{P}d_n = \mathrm{Q}c_n - \mathrm{R}b_n. \end{array} \right.$$

Au moyen de ces formules et des relations $a = 2\gamma$, $\mathrm{P}b = \alpha + \mathrm{Q}\gamma$, on obtient pour a_n, b_n les expressions suivantes:

$$(7)\quad a_n = ax_n + (2b\mathrm{P} - a\mathrm{Q})\,y_n,\ b_n = bx_n + (b\mathrm{Q} - 2a\mathrm{R})y_n.$$

47. Nous allons chercher la relation qui doit exister entre les deux indices n et i pour que les deux formes

$$f_n = (a_n, b_n, c_n, d_n), f_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$$

soient proprement équivalentes. Si lon désigne par $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ une transformation de f_n en f_i, on a comme au n.° 29

$$(8)\quad \left| \begin{array}{l} a_i = a_n\alpha^3 + 3b_n\alpha^2\gamma + 3c_n\alpha\gamma^2 + d_n\gamma^3, \\ b_i = a_n\alpha^2\beta + b_n(\alpha^2\delta + 2\alpha\beta\gamma) + c_n(2\alpha\gamma\delta + \beta\gamma^2) + d_n\delta. \end{array} \right.$$

D'un autre côté la substitution qui transforme f_n en f_i doit changer le covariant de f_n en celui de f_i; comme le covariant de ces deux formes est le même, il doit se transformer en lui-même par la substitution $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$. Or toutes les transformations du covariant

$$m\mathrm{P}x^2 + m\mathrm{Q}xy + m\mathrm{R}y^2$$

en lui-même sont comprises dans les formules

$$(9)\quad \alpha = \frac{t - \mathrm{Q}u}{2},\ \beta = -\mathrm{R}u,\ \gamma = \mathrm{P}u,\ \delta = \frac{t + \mathrm{Q}u}{2};$$

dans lesquelles on désigne indéfiniment par t, u l'une quelconque des solutions de l'équation

$$(10)\quad t^2 - \Delta u^2 = 4,\ \Delta = \mathrm{Q}^2 - 4\mathrm{PR}.$$

Comme dans le cas actuel Δ est de la forme $8l + 1$, l'équation (10) n'admet pas de solutions en nombres impairs. On a donc $t = 2x$, $u = 2y$, x et y désignant les solutions de l'équation $x^2 - \Delta y^2 = 1$. Par conséquent toutes les substitutions qui transforment f_n en f_i sont renfermées dans les formules

$$(11) \qquad \alpha = x - Qy,\ \beta = -2Ry,\ \gamma = 2Py,\ \delta = x + Qy.$$

En substituant ces expressions dans les formules (8), en éliminant c_n, d_n au moyen des relations

$$Pc_n = qb_n - Ra_n,\ P^2d_n = Q(Qb_n - Ra_n) - RPb_n$$

on trouve

$$a_l = a_n\left[x^3 + 3Dxy^2 - Q(3x^2y + Dy^3)\right] + 2Pb_n(3x^2y + Dy^3),$$

$$b_l = b_n\left[x^3 + 3Dxy^2 + Q(3x^2y + Dy^3)\right] - 2Ra_n(3x^2y + Dy^3).$$

Comme les substitutions qui correspondent à deux solutions opposées (x, y), $(-x, -y)$ transforment f_n en deux formes f_l, $-f_l$ proprement équivalentes, nous nous bornerons à considérer les solutions (x, y) dans lesquelles les valeurs de x sont positives. Toutes ces solutions sont données par la formule (5) et correspondent à des valeurs entières, positives ou négatives de l'exposant n. Or si l'on désigne par l la valeur de l'exposant n à laquelle correspond la solution (x, y) qui figure dans les formules précédentes, on a

$$(x_1 + y_1\sqrt{\Delta})^{3l} = (x + y\sqrt{\Delta})^3 = x_{3l} + y_{3l}\sqrt{\Delta},$$

$$x_{3l} = x^3 + 3\Delta xy^2,\ y_{3l} = 3x^2y + \Delta y^3.$$

Les expressions précédentes de a_l, b_l deviennent donc

$$(12) \qquad \left|\begin{array}{l} a_l = a_nx_{3l} + (2Pb_n - Qa_n)y_{3l}, \\ b_l = b_nx_{3l} + (Qb_n - 2Ra_n)y_{3l}. \end{array}\right.$$

Enfin en remplaçant dans ces dernières formules a_n, b_n par les expressions (7), on trouve

$$a_l = a(x_nx_{3l} + \Delta y_ny_{3l}) + (2bP - aQ)(x_{3l}y_n + x_ny_{3l}),$$

$$b_l = b(x_nx_{3l} + \Delta y_ny_{3l} + (bQ - 2aR)(x_{3l}y_n + x_ny_{3l}).$$

D'ailleurs on déduit de la formule (5)

$$x_{3l+n} + y_{3l+n}\sqrt{\Delta} = (y_1 + y_1\sqrt{\Delta})^{3l}(x_1 + y_1\sqrt{\Delta})^n =$$

$$(x_{3l} + y_{3l}\sqrt{\Delta})(x_n + y_n\sqrt{\Delta}) = (x_{3l}x_n + \Delta y_{3l}y_n) + \sqrt{\Delta}(x_{3l}y_n + x_ny_{3l}),$$

$$x_{3l+n} = x_{3l}x_m + \Delta y_{3l}y_n,\ y_{3l+n} = x_{3l}y_n + x_ny_{3l}.$$

On a donc

$$a_i = ax_{3l+n} + (2bP - aQ)y_{3l+n} = a_{3l+n},$$
$$b_i = bx_{3l+n} + (bQ - 2Ra)y_{3l+n} = b_{3l+n}.$$

18. Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que les deux formes f_i, f_n soient proprement équivalentes est que la différence $n - i$ de leurs indices soit divisible par 3. Par conséquent les formes f_{3l} dont les indices sont multiples de 3, sont renfermées dans une même classe représentée par la forme cubique (a, b, c, d) dont les éléments sont déterminés en fonction d'une solution (α, γ) de l'équation (3), au moyen des formules

$$(14) \quad a = 2\gamma, \quad b = \frac{\alpha + Q\gamma}{P}, \quad c = \frac{Qb - Ra}{P}, \quad d = \frac{Qc - Rb}{P}.$$

Toutes les formes f_{3l+1} dont les indices divisés par 3 donnent pour reste le nombre 1, sont comprises dans une même classe représentée par la forme (a_1, b_1, c_1, d_1) dont les éléments sont déterminés par les formules

$$a_1 = ax_1 + (2bP - Qa)y_1, \quad b_1 = bx_1 + (bQ - 2Ra)y_1,$$
$$Pc_1 = Qb_1 - Ra_1, \quad Pd_1 = Qc_1 - Rb_1.$$

Enfin toutes les formes f_{3l-1} dont les indices divisés par 3 donnent un reste égal à 2, sont comprises dans une même classe représentée par la forme $(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, d_{-1})$ dont les éléments se déduisent des dernières formules par le seul changement de y_1 en $-y_1$. Comme toutes les formes cubiques (a_n, b_n, c_n, d_n) déterminées par les formules (5) et (6) ont leurs indices renfermés dans les trois formules $3l$, $3l+1$, $3l-1$, elles sont toutes comprises dans trois classes cubiques, représentées par les trois formes

$$(a, b, c, d), \quad (a_1, b_1, c_1, d_1), \quad (a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, d_{-1}),$$

qui correspondent respectivement aux indices 0, 1, et -1.

La solution obtenue reste la même lorsqu'on remplace dans les trois formules (6) la solution $u = \alpha$, $v = \gamma$ par toute autre solution de l'équation (3') correspondant à la même valeur de l'expression $\sqrt{\Delta}$ (mod. mP^3), parce que toutes ces solutions sont exprimées par les formules $u = \alpha x + \Delta\gamma y$, $v = \gamma x + \alpha y$. Mais si l'on passe à une solution qui corresponde à une autre valeur de cette expression, on obtient trois autres classes cubiques.

19. Dans le cas particulier où le nombre m est représenté par la

classe principale du détetminant Δ, il correspond toujours des formes cubiques à la classe quadratique, représentée par la forme dérivée $\left(2m, m, m\frac{1-\Delta}{2}\right)$. On les détermine en faisant dans les formules précédentes $P = Q = 1$, $R = \frac{1-\Delta}{4}$; on trouve ainsi

$$2m = 2b^2 - 2ab + \frac{1-\Delta}{2}a^2, \quad c = b - \frac{1-\Delta}{4}a, \quad d = c - \frac{1-\Delta}{4}b.$$

Comme dans le cas actuel le nombre $\frac{1-\Delta}{4}$ est pair, tandis que m est impair, on déduit de la première formule que le produit $b\,(b-a)$ doit être impair, ce qui exige que b soit impair et a, pair. Posant donc $a = 2u$, $b - u = t$, on a

$$(15) \quad \left| \begin{array}{l} x = t^2 - \Delta u^2, \quad a = 2u, \quad b = t + u, \\ c = t + \frac{1+\Delta}{2}u, \quad d = \frac{3+\Delta}{4}t + \frac{1+3\Delta}{4}u. \end{array} \right.$$

Ainsi lorsque le nombre m est représenté par la classe principale du déterminant Δ, la forme dérivée $\left(2m,\ m,\ m\ \frac{1-\Delta}{2}\right)$ correspond toujours comme forme déterminante, à des formes cubiques dont les éléments sont déterminés par les formules (15), au moyen des solutions de l'équation $m = t^2 - \Delta u^2$, Lorsque le déterminant Δ est négatif, cette équation n'admet que deux solutionr pour chaque valeur de l'expression $\sqrt{\Delta}$ (mod. m); de plus ces deux solutions (t, u), $(-t, -u)$ correspondent à deux formes cubiques proprement équivalentes, de sorte qu'une seule classe cubique correspond à ces deux solutions. On peut donc se borner aux solutions dans lesquelles t est un nombre positif.

50. Prenons par exemple $\Delta = -47$, $m = 51 = 3.17$. Le nombre 51 admet huit représentations par l'ensemble des formes $(1, 0, 47)$, $(3, \pm 1, 16)$, $(7, \pm 3, 8)$ qui représentent l'ordre proprement primitif du déterminant -47, savoir quatre par la forme $(1, 0, 47)$ et deux par chacune des deux formes opposées $(7, \pm 3, 8)$. Les quatre représentations de 51 par la forme principale sont $\pm(2, 1)$, $\pm(2, -1)$: Nous pouvons nous borner aux deux représentations $(2, 1)$, $(2, -1)$, parce que les deux autres correspondent aux mêmes classes cubi-

ques. On obtient les formes cubiques qui correspondent aux deux représentations considérées, en faisant successivement dans les formules (15), $t=2$, $u=1$; $t=2$, $u=-1$. On trouve ainsi les deux formes

$$(2,\ 3,\ -24,\ -57),\ (-2,\ 1,\ 25,\ 13).$$

Le nombre 51 est reqrésenté par la forme (7, 3, 8) au moyen des valeurs $x=2$, $y=1$, ou bien $x=-2$, $y=-1$. Comme cette forme s'obtient par la triplication d la forme (3, -1, 16), les classes dérivées (6.51, $\pm$ 51, 8.51) correspondent à des formes cubiques. Les deux formes cubiques $\pm(a, b, c, d)$ qui ont pour forme déterminante (6.51, -51, 8.51) s'obtiennent au moyen des formules (14) du n° 48, en y faisant $P=3$, $Q=-1$, $R=4$. Quant aux deux nombres α, γ qui vérifient l'équation

$$51 \times 27 = \alpha^2 + 47\gamma^2,$$

on peut les obtenir directement, car la congruence suivant le module 8 exige que γ soit multiple de 4. Posant donc $\gamma=4l$, on a $1377=\alpha^2+852l^2$; $l^2<2$; donc $l=1$, $\gamma=4$, $\alpha=25$. Les formules (14) donnent ensuite $a=8$, $b=7$, $c=-13$, $d=-5$. La substitution (1, 0; 0, -1) change cette forme et son covariant respectivement en la forme (8, -7, -13, 5) et en la fonction $3.51\,x^2+51\,xy+204\,y^2$. Ainsi le déterminant -47.51^2 présente quatre classes cubiques dont les formes déterminantes appartiennent à l'ordre dérivé (102, 2), savoir les deux classes représentées par les deux formes (2, 3, -21, -57), (-2, 1, 25, 13), qui corrispondent à une même forme déterminante (102, 51, 24.51), et deux autres classes réprésentées par les deux formes (8, 7, -13, -5), (8, -7, -13, 5) qui ont respectivement pour formes déterminantes les deux formes opposées (6.51, $\pm$ 51, 8.51) Outre ces quatre classes cubiques, le déterminant $-47.(51)^2$ en présente encore d'autres qui correspondent à des formes déterminantes de l'ordre improprement primitif, ou de l'un des deux ordres dérivés (5, 2), (34,2).

51. Lorsque Δ est positif et que le nombre m est représenté par la forme principale du déterminant Δ, trois classes cubiques correspondent à à la forme déterminante $\left(2m,\ m,\ m\,\dfrac{1-\Delta}{2}\right)$, pour une même valeur de l'expression $\sqrt{\Delta}$ (mod. m); on obtient trois formes qui représentent ces trois classes, en substituant dans les formules (15) les trois solutions de l'équation $t^2-\Delta u^2=m$, que l'on détermine en combinant l'une des solutions (t, u) qui appartiennent à la valeur considérée de l'expression $\sqrt{\Delta}$ (mod. m),

avec les trois solutions de l'équation $x^2 - \Delta y^2 = 1$, qui correspondent dans l'équation (5) aux valeurs 1, 0 et -1 de l'exposant n, En désignant toujours par x_1, y_1 les plus petits nombres entiers et positifs qui satisfont à la dernière équation, les trois solutions qu'il s'agit de substituer dans les formules (15) sont exprimées par les formules

$$(16)\qquad t, u;\ tx_1 + \Delta u y_1,\ ux_1 + ty_1;\ tx_1 - \Delta u y_1,\ ux_1 - ty_1.$$

Soit par exemple $\Delta = 17$, $m = 19$. Les plus petits nombres entiers et positifs qui vérifient l'équation $x^2 - 17y^2 = 1$, sont $x_1 = 33$, $y_1 = 8$. L'expression $\sqrt{17}$ (mod. 19) présente deux valeurs opposées, 6 et -6. A la première valeur appartient la solution $t = 6$, $u = 1$ de l'équation $t^2 - 17u^2 = 19$. Les formules (16) donnent les trois solutions

$$t = 6,\ u = 1;\ t = 344,\ u = 81;\ t = 62,\ u = -15,$$

auxquelles correspondent, en vertu des formules (15), les trois formes cubiques

$$(2,\ 7,\ 15,\ 43),\ (162,\ 415,\ 1063,\ 2723),\ (-30,\ 47,\ -73,\ 116)$$

La valeur opposée -6 de $\sqrt{17}$ (mod. 19) donne les trois solutions

$$t = 6,\ u = -1;\ t = 334,\ u = -81;\ t = 62,\ u = 15,$$

auxquelles correspondent les trois formes cnbiques

$$(-2,\ 5,\ -3,\ 17),\ (-162,\ 253,\ -395,\ 617),\ (30,\ 77,\ 198,\ 505).$$

Ces trois dernières classes sont improprement équivalentes aux trois précédentes. Donc

La forme quadratique $(38, 19, -8 \times 19)$ *est la forme déterminante d'une infinité de formes cubiques du déterminant* $D = 17\,(19)^2$, *comprises dans six classes opposées deux à deux et représentées par les six formes*

$$(2,\ 7,\ 15,\ 43),\ (2,\ -7,\ 15,\ -43),$$

$$(30,\ 47,\ 73,\ 115),\ (30,\ -47,\ 73,\ -115),$$

$$(162,\ 253,\ 395,\ 617),\ (162,\ -253,\ 395,\ -617).$$

52. Lorsque le déterminant Δ est de la forme $8l + 5$, l'équation

$$(3)\qquad 4mP^3 = t^2 - \Delta a^2$$

classe principale du détetminant Δ, il correspond toujours des formes cubiques à la classe quadratique, représentée par la forme dérivée $\left(2m, m, m\frac{1-\Delta}{2}\right)$. On les détermine en faisant dans les formules précédentes $P = Q = 1$, $R = \frac{1-\Delta}{4}$; on trouve ainsi

$$2m = 2b^2 - 2ab + \frac{1-\Delta}{2}a^2, \quad c = b - \frac{1-\Delta}{4}a, \quad d = c - \frac{1-\Delta}{4}b.$$

Comme dans le cas actuel le nombre $\frac{1-\Delta}{4}$ est pair, tandis que m est impair, on déduit de la première formule que le produit $b\,(b-a)$ doit être impair, ce qui exige que b soit impair et a, pair. Posant donc $a = 2u$, $b - u = t$, on a

$$(15)\quad \left| \begin{array}{l} x = t^2 - \Delta u^2, \quad a = 2u, \quad b = t + u, \\ c = t + \frac{1+\Delta}{2}u, \quad d = \frac{3+\Delta}{4}t + \frac{1+3\Delta}{4}u. \end{array} \right.$$

Ainsi lorsque le nombre m est représenté par la classe principale du déterminant Δ, la forme dérivée $\left(2m, m, m\frac{1-\Delta}{2}\right)$ correspond toujours comme forme déterminante, à des formes cubiques dont les éléments sont déterminés par les formules (15), au moyen des solutions de l'équation $m = t^2 - \Delta u^2$, Lorsque le déterminant Δ est négatif, cette équation n'admet que deux solutionr pour chaque valeur de l'expression $\sqrt{\Delta}$ (mod. m); de plus ces deux solutions (t, u), $(-t, -u)$ correspondent à deux formes cubiques proprement équivalentes, de sorte qu'une seule classe cubique correspond à ces deux solutions. On peut donc se borner aux solutions dans lesquelles t est un nombre positif.

50. Prenons par exemple $\Delta = -47$, $m = 51 = 3.17$. Le nombre 51 admet huit représentations par l'ensemble des formes $(1, 0, 47)$, $(3, \pm 1, 16)$, $(7, \pm 3, 8)$ qui représentent l'ordre proprement primitif du déterminant -47, savoir quatre par la forme $(1, 0, 47)$ et deux par chacune des deux formes opposées $(7, \pm 3, 8)$. Les quatre représentations de 51 par la forme principale sont $\pm(2, 1)$, $\pm(2, -1)$: Nous pouvons nous borner aux deux représentations $(2, 1)$, $(2, -1)$, parce que les deux autres correspondent aux mêmes classes cubi-

ques. On obtient les formes cubiques qui correspondent aux deux représentations considérées, en faisant successivement dans les formules (15), $t = 2$, $u = 1$; $t = 2$, $u = -1$. On trouve ainsi les deux formes

$$(2,\ 3,\ -24,\ -57),\ (-2,\ 1,\ 25,\ 13).$$

Le nombre 51 est reqrésenté par la forme (7, 3, 8) au moyen des valeurs $x = 2$, $y = 1$, ou bien $x = -2$, $y = -1$. Comme cette forme s'obtient par la triplication d la forme (3, − 1, 16), les classes dérivées (6.51, ± 51, 8.51) correspondent à des formes cubiques. Les deux formes cubiques $\pm (a, b, c, d)$ qui ont pour forme déterminante (6.51, − 51, 8.51) s'obtiennent au moyen des formules (14) du n° 48, en y faisant $P = 3$, $Q = -1$, $R = 4$. Quant aux deux nombres α, γ qui vérifient l'équation

$$51 \times 27 = \alpha^2 + 47\gamma^2,$$

on peut les obtenir directement, car la congruence suivant le module 8 exige que γ soit multiple de 4. Posant donc $\gamma = 4l$, on a $1377 = \alpha^2 + 852l^2$; $l^2 < 2$; donc $l = 1$, $\gamma = 4$, $\alpha = 25$. Les formules (14) donnent ensuite $a = 8$, $b = 7$, $c = -13$, $d = -5$. La substitution (1, 0; 0, − 1) change cette forme et son covariant respectivement en la forme (8, − 7, − 13, 5) et en la fonction $3.51\,x^2 + 51\,xy + 204\,y^2$. Ainsi le déterminant -47.51^2 présente quatre classes cubiques dont les formes déterminantes appartiennent à l'ordre dérivé (102, 2), savoir les deux classes représentées par les deux formes (2, 3, − 21, − 57), (− 2, 1, 25, 13), qui corrispondent à une même forme déterminante (102, 51, 24.51), et deux autres classes répréséntées par les deux formes (8, 7, − 13, − 5), (8, − 7, − 13, 5) qui ont respectivement pour formes déterminantes les deux formes opposées (6.51, ± 51, 8.51) Outre ces quatre classes cubiques, le déterminant $-47.(51)^2$ en présente encore d'autres qui correspondent à des formes déterminantes de l'ordre improprement primitif, ou de l'un des deux ordres dérivés (5, 2), (34,2).

51. Lorsque Δ est positif et que le nombre m est représenté par la forme principale du déterminant Δ, trois classes cubiques correspondent à à la forme déterminante $\left(2m, m, m\,\dfrac{1-\Delta}{2}\right)$, pour une même valeur de l'expression $\sqrt{\Delta}$ (mod. m); on obtient trois formes qui représentent ces trois classes, en substituant dans les formules (15) les trois solutions de l'équation $t^2 - \Delta u^2 = m$, que l'on détermine en combinant l'une des solutions (t, u) qui appartiennent à la valeur considérée de l'expression $\sqrt{\Delta}$ (mod. m),

classe principale du détetminant Δ, il correspond toujours des formes cubiques à la classe quadratique, représentée par la forme dérivée $\left(2m, m, m\frac{1-\Delta}{2}\right)$. On les détermine en faisant dans les formules précédentes $P = Q = 1$, $R = \frac{1-\Delta}{4}$; on trouve ainsi

$$2m = 2b^2 - 2ab + \frac{1-\Delta}{2}a^2, \quad c = b - \frac{1-\Delta}{4}a, \quad d = c - \frac{1-\Delta}{4}b.$$

Comme dans le cas actuel le nombre $\frac{1-\Delta}{4}$ est pair, tandis que m est impair, on déduit de la première formule que le produit $b\,(b-a)$ doit être impair, ce qui exige que b soit impair et a, pair. Posant donc $a = 2u$, $b - u = t$, on a

$$(15) \left| \begin{array}{l} x = t^2 - \Delta u^2, \quad a = 2u, \quad b = t + u, \\ c = t + \frac{1+\Delta}{2}u, \quad d = \frac{3+\Delta}{4}t + \frac{1+3\Delta}{4}u. \end{array} \right.$$

Ainsi lorsque le nombre m est représenté par la classe principale du déterminant Δ, la forme dérivée $\left(2m, m, m\frac{1-\Delta}{2}\right)$ correspond toujours comme forme déterminante, à des formes cubiques dont les éléments sont déterminés par les formules (15), au moyen des solutions de l'équation $m = t^2 - \Delta u^2$, Lorsque le déterminant Δ est négatif, cette équation n'admet que deux solutionr pour chaque valeur de l'expression $\sqrt{\Delta}$ (mod. m); de plus ces deux solutions (t, u), $(-t, -u)$ correspondent à deux formes cubiques proprement équivalentes, de sorte qu'une seule classe cubique correspond à ces deux solutions. On peut donc se borner aux solutions dans lesquelles t est un nombre positif.

30. Prenons par exemple $\Delta = -47$, $m = 51 = 3.17$. Le nombre 51 admet huit représentations par l'ensemble des formes $(1, 0, 47)$, $(3, \pm 1, 16)$, $(7, \pm 3, 8)$ qui représentent l'ordre proprement primitif du déterminant -47, savoir quatre par la forme $(1, 0, 47)$ et deux par chacune des deux formes opposées $(7, \pm 3, 8)$. Les quatre représentations de 51 par la forme principale sont $\pm(2, 1)$, $\pm(2, -1)$: Nous pouvons nous borner aux deux représentations $(2, 1)$, $(2, -1)$, parce que les deux autres correspondent aux mêmes classes cubi-

ques. On obtient les formes cubiques qui correspondent aux deux représentations considérées, en faisant successivement dans les formules (15), $t=2$, $u=1$; $t=2$, $u=-1$. On trouve ainsi les deux formes

$$(2, 3, -24, -57), (-2, 1, 25, 13).$$

Le nombre 51 est reqrésenté par la forme (7, 3, 8) au moyen des valeurs $x=2$, $y=1$, ou bien $x=-2$, $y=-1$. Comme cette forme s'obtient par la triplication d la forme (3, −1, 16), les classes dérivées (6.51, ± 51, 8.51) correspondent à des formes cubiques. Les deux formes cubiques $\pm (a, b, c, d)$ qui ont pour forme déterminante (6.51, − 51, 8.51) s'obtiennent au moyen des formules (14) du n° 48, en y faisant $P=3$, $Q=-1$, $R=4$. Quant aux deux nombres α, γ qui vérifient l'équation

$$51 \times 27 = \alpha^2 + 47\gamma^2,$$

on peut les obtenir directement, car la congruence suivant le module 8 exige que γ soit multiple de 4. Posant donc $\gamma = 4l$, on a $1377 = \alpha^2 + 852 l^2$; $l^2 < 2$; donc $l=1$, $\gamma=4$, $\alpha=25$. Les formules (14) donnent ensuite $a=8$, $b=7$, $c=-13$, $d=-5$. La substitution (1, 0; 0, −1) change cette forme et son covariant respectivement en la forme (8, −7, −13, 5) et en la fonction $3.51\, x^2 + 51\, xy + 204\, y^2$. Ainsi le déterminant -47.51^2 présente quatre classes cubiques dont les formes déterminantes appartiennent à l'ordre dérivé (102, 2), savoir les deux classes représentées par les deux formes (2, 3, −24, −57), (−2, 1, 25, 13), qui corrispondent à une même forme déterminante (102, 51, 24.51), et deux autres classes réprésentées par les deux formes (8, 7, −13, −5), (8, −7, −13, 5) qui ont respectivement pour formes déterminantes les deux formes opposées (6.51, ± 51, 8.51) Outre ces quatre classes cubiques, le déterminant $-47.(51)^2$ en présente encore d'autres qui correspondent à des formes déterminantes de l'ordre improprement primitif, ou de l'un des deux ordres dérivés (3, 2), (34,2).

51. Lorsque Δ est positif et que le nombre m est représenté par la forme principale du déterminant Δ, trois classes cubiques correspondent à à la forme déterminante $\left(2m, m, m\,\dfrac{1-\Delta}{2}\right)$, pour une même valeur de l'expression $\sqrt{\Delta}$ (mod. m); on obtient trois formes qui représentent ces trois classes, en substituant dans les formules (15) les trois solutions de l'équation $t^2 - \Delta u^2 = m$, que l'on détermine en combinant l'une des solutions (t, u) qui appartiennent à la valeur considérée de l'expression $\sqrt{\Delta}$ (mod. m),

classe principale du détetminant Δ, il correspond toujours des formes cubiques à la classe quadratique, représentée par la forme dérivée $\left(2m, m, m\frac{1-\Delta}{2}\right)$. On les détermine en faisant dans les formules précédentes $P = Q = 1$, $R = \frac{1-\Delta}{4}$; on trouve ainsi

$$2m = 2b^2 - 2ab + \frac{1-\Delta}{2}a^2, \quad c = b - \frac{1-\Delta}{4}a, \quad d = c - \frac{1-\Delta}{4}b.$$

Comme dans le cas actuel le nombre $\frac{1-\Delta}{4}$ est pair, tandis que m est impair, on déduit de la première formule que le produit $b(b-a)$ doit être impair, ce qui exige que b soit impair et a, pair. Posant donc $a = 2u$, $b - u = t$, on a

$$(15) \quad \left| \begin{array}{l} x = t^2 - \Delta u^2, \quad a = 2u, \quad b = t + u, \\ c = t + \frac{1+\Delta}{2}u, \quad d = \frac{3+\Delta}{4}t + \frac{1+3\Delta}{4}u. \end{array} \right.$$

Ainsi lorsque le nombre m est représenté par la classe principale du déterminant Δ, la forme dérivée $\left(2m, m, m\frac{1-\Delta}{2}\right)$ correspond toujours comme forme déterminante, à des formes cubiques dont les éléments sont déterminés par les formules (15), au moyen des solutions de l'équation $m = t^2 - \Delta u^2$, Lorsque le déterminant Δ est négatif, cette équation n'admet que deux solutionr pour chaque valeur de l'expression $\sqrt{\Delta}$ (mod. m); de plus ces deux solutions (t, u), $(-t, -u)$ correspondent à deux formes cubiques proprement équivalentes, de sorte qu'une seule classe cubique correspond à ces deux solutions. On peut donc se borner aux solutions dans lesquelles t est un nombre positif.

50. Prenons par exemple $\Delta = -47$, $m = 51 = 3.17$. Le nombre 51 admet huit représentations par l'ensemble des formes $(1, 0, 47)$, $(3, \pm 1, 16)$, $(7, \pm 3, 8)$ qui représentent l'ordre proprement primitif du déterminant -47, savoir quatre par la forme $(1, 0, 47)$ et deux par chacune des deux formes opposées $(7, \pm 3, 8)$. Les quatre représentations de 51 par la forme principale sont $\pm(2, 1)$, $\pm(2, -1)$: Nous pouvons nous borner aux deux représentations $(2, 1)$, $(2, -1)$, parce que les deux autres correspondent aux mêmes classes cubi-

ques. On obtient les formes cubiques qui correspondent aux deux représentations considérées, en faisant successivement dans les formules (15), $t = 2$, $u = 1$; $t = 2$, $u = -1$. On trouve ainsi les deux formes

$$(2,\ 3,\ -24,\ -57),\ (-2,\ 1,\ 25,\ 13).$$

Le nombre 51 est reqrésenté par la forme (7, 3, 8) au moyen des valeurs $x = 2$, $y = 1$, ou bien $x = -2$, $y = -1$. Comme cette forme s'obtient par la triplication d la forme (3, −1, 16), les classes dérivées (6.51, ± 51, 8.51) correspondent à des formes cubiques. Les deux formes cubiques $\pm (a, b, c, d)$ qui ont pour forme déterminante (6.51, −51, 8.51) s'obtiennent au moyen des formules (14) du n° 48, en y faisant $P = 3$, $Q = -1$, $R = 4$. Quant aux deux nombres α, γ qui vérifient l'équation

$$51 \times 27 = \alpha^2 + 47\gamma^2,$$

on peut les obtenir directement, car la congruence suivant le module 8 exige que γ soit multiple de 4. Posant donc $\gamma = 4l$, on a $1377 = \alpha^2 + 852 l^2$; $l^2 < 2$; donc $l = 1$, $\gamma = 4$, $\alpha = 25$. Les formules (14) donnent ensuite $a = 8$, $b = 7$, $c = -13$, $d = -5$. La substitution (1, 0; 0, −1) change cette forme et son covariant respectivement en la forme (8, −7, −13, 5) et en la fonction $3.51\, x^2 + 51\, xy + 204\, y^2$. Ainsi le déterminant -47.51^2 présente quatre classes cubiques dont les formes déterminantes appartiennent à l'ordre dérivé (102, 2), savoir les deux classes représentées par les deux formes (2, 3, −21, −57), (−2, 1, 25, 13), qui corrispondent à une même forme déterminante (102, 51, 24.51), et deux autres classes réprésentées par les deux formes (8, 7, −13, −5), (8, −7, −13, 5) qui ont respectivement pour formes déterminantes les deux formes opposées (6.51, ± 51, 8.51) Outre ces quatre classes cubiques, le déterminant $-47.(51)^2$ en présente encore d'autres qui correspondent à des formes déterminantes de l'ordre improprement primitif, ou de l'un des deux ordres dérivés (5, 2), (34,2).

51. Lorsque Δ est positif et que le nombre m est représenté par la forme principale du déterminant Δ, trois classes cubiques correspondent à à la forme déterminante $\left(2m, m, m\, \dfrac{1-\Delta}{2}\right)$, pour une même valeur de l'expression $\sqrt{\Delta}$ (mod. m); on obtient trois formes qui représentent ces trois classes, en substituant dans les formules (15) les trois solutions de l'équation $t^2 - \Delta u^2 = m$, que l'on détermine en combinant l'une des solutions (t, u) qui appartiennent à la valeur considérée de l'expression $\sqrt{\Delta}$ (mod. m),

$$\pm t \pm a\sqrt{5} = (t_0 + a_0\sqrt{5})\ (9 + 2\sqrt{5})^n$$

en donnant à n toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, et en prenant, pour chaque valeur de n, les quatre combinaisons de signes indiquées dans le premier membre. Mais on démontre, comme nous l'avons fait plus haut (n[os] 29, 47 et 48), que les solutions comprises dans la formule

$$\pm(t + a\sqrt{5}) = (t_0 + a_0\sqrt{5})\ (9 + 2\sqrt{5})^{3l+e},$$

où l est un nombre entier quelconque et e, l'un des trois nombres 0, 1, −1, conduisent à des formes cubiques équivalentes entre elles, de sorte que la formule

$$t \pm a\sqrt{5} = (t_0 + a_0\sqrt{5})\ (9 + 2\sqrt{5})^e,\ (e = 0, 1, -1)$$

donne toutes les classes cubiques déterminées par les formules (25). Si le nombre m est composé, il faut prendre successivement pour (t_0, a_0) des solutions appartenant à toutes les valeurs numériquement distinctes de l'expression $\sqrt{\Delta}$ (mod. $4m$).

On procèdera d'une manière toute semblable pour les formules (26).

60. Prenons par exemple $m = 11$. Les plus petits nombres entiers, positifs et premiers entre eux, qui vérifient respectivement les deux équations

$$44 = t^2 - 5a^2,\ 11 = u^2 - 5v^2,$$

sont $t_0 = 13$, $a_0 = 5$; $u_0 = 4$, $v_0 = 1$. Les formes cubiques déterminées par les formules (25) sont comprises dans six classes représentées par les six formes

(2, 5, 7, 12), (− 2, 3, 1, 4);
(14, 23, 37, 60), (− 14, 9, − 5, 4);
(50, 81, 131, 212), (− 50, 31, − 19, 12).

De même les formes cubiques déterminées par les formules (26) sont renfermées dans six classes représentées par les six formes cubiques

(5, 9, 14, 13). (− 5, 4, − 1, 3);
(7, 12, 19, 31), (− 7, 5, 2, 7);
(97, 157, 234, 391), (− 97, 60, − 37, 23).

Ces diverses classes sont, deux à deux, improprement équivalentes; les deux classes de chaque groupe se changent l'une en l'autre par la transformation impropre (− 1, − 1; 0, 1).

Nous arrêterons ici la partie purement théorique de nos recherches sur la classification des formes cubiques. Ce que nous venons de dire suffit pour montrer de quelle manière on pourra faire l'énumération complète de toutes les classes cubiques d'un déterminant donné. Nous entrerons plus tard en de plus amples détails, lorsque nous donnerons des exemples de classification.

SULLE FORMOLE TRIGONOMETRICHE COMUNI ALLE SEZIONI CONICHE DOTATE DI CENTRO

NOTA

DEL P. GIOVANNI EGIDI, D. C. D. G.

1. *Le tre coniche dotate di centro sono rappresentate da una equazione comune.*

Se un circolo si proietti ortogonalmente sopra un piano, sappiamo dalla geometria analitica che la proiezione ne sarà o una ellissi, o una iperbola equilatera, e le tre sezioni coniche dotate di centro sono il circolo, l'ellissi e l'iperbola.

Prendiamo per asse delle ascisse il diametro del circolo di raggio uguale all'unità, che coincida coll' asse maggiore della ellissi e col diametro dell'iperbola equilatera, che sieno proiezioni del circolo medesimo: sia il centro delle tre coniche l'origine degli assi coordinati rettangolari. L'equazione

$$x^2 + c^2y^2 = 1 \qquad (1)$$

rappresenterà in coordinate rettangolari

il circolo per $c = 1$,

l'ellissi per $c > 1$,

l'iperbola per $c = \sqrt{-1}$.

2. *Le ordinate delle tre coniche hanno tra loro rapporti costanti.*

Se sia $\frac{\varkappa}{2}$ un settore circolare, e $\frac{\varkappa'}{2}$, $\frac{\varkappa''}{2}$ sieno i settori ellittico ed iperbolico proiezioni del settore circolare che consideriamo, le aree di questi due settori stanno alla prima in un rapporto costante. Se sieno x, y; x', y'; x'', y'' le coordinate delle estremità degli archi corrispondenti ai doppii settori $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ nelle tre curve, le tre ordinate y, y', y'' stanno tra loro negli stessi rapporti dei settori: hanno dunque tra se rapporti costanti.

3. *Relazioni tra i seni, i coseni, le tangenti e le cotangenti dei doppii settori nelle tre coniche.*

Poichè x, x', x'' sono i coseni dei doppii settori delle tre curve;

40

y, y', y'' ne sono i seni, i rapporti tra i seni e i coseni ne sono le tangenti, e i rapporti inversi le cotangenti: dalla costanza dei rapporti tra i doppi settori e dall'essere l'ellittico e l'iperbolico proiezioni ortogonali del circolare, segue:

1.° che sono uguali tra se i coseni dei doppii settori x, x', x'';

2.° che i seni dell'ellittico e dell'iperbolico sono uguali ai prodotti del seno del doppio settore circolare pel rispettivo coefficiente, coseno dell'angolo di proiezione:

3.° che sono uguali tra se le cotangenti dei medesimi;

4.° che per ottenere le tangenti dell'ellittico e dell'iperbolico dovrà moltiplicarsi la tangente del doppio settore circolare pel rispettivo coefficiente, coseno dell'angolo di proiezione.

4. *Relazioni tra le funzioni trigonometriche comuni ai doppi settori nelle tre coniche.*

Sia r il raggio vettore che dal centro va all'estremità dell'arco; ritenendo i valori stabiliti sopra del coefficiente c; ponendo

pel circolo $r = 1$

per l'ellissi $r < 1$

per l'iperbola $r > 1$

ed esprimendo con ε il doppio settore al quale appartengono le linee trigonometriche; avremo le relazioni comuni alle funzioni trigonometriche delle tre curve che saranno le seguenti

$$(2)\quad \begin{cases} \cos^2\varepsilon + \text{sen}^2\varepsilon = r^2 \\ \cos^2\varepsilon + c^2\text{sen}^2\varepsilon = 1 \\ \text{tang}\varepsilon = \dfrac{\text{sen}\varepsilon}{\cos\varepsilon} = \dfrac{1}{c.\ \text{cotang}\varepsilon} \\ c.\ \text{cotang}\varepsilon = \dfrac{\cos\varepsilon}{\text{sen}\varepsilon} = \dfrac{1}{\text{tang}\varepsilon} \\ \text{sec.}\varepsilon = \dfrac{r}{\cos\varepsilon} \\ \text{cosec.}\varepsilon = \dfrac{r}{c.\text{sen}\varepsilon} \end{cases}$$

Da queste si deducono facilmente le seguenti

$$
(3)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\sec^2.\varepsilon = 1 + \operatorname{tang}^2\varepsilon = \frac{r^2}{\cos^2\varepsilon}\\
&\operatorname{cosec}^2\varepsilon = \frac{1 + c^2\operatorname{cotang}^2\varepsilon}{c^2} = \frac{r^2}{c^2.\operatorname{sen}^2\varepsilon}\\
&\operatorname{tang}^2\varepsilon = \frac{r^2 - \cos^2\varepsilon}{\cos^2\varepsilon} = \frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{1 - c^2\operatorname{sen}^2\varepsilon}\\
&\operatorname{cotang}^2\varepsilon = \frac{r^2 - \operatorname{sen}^2\varepsilon}{c^2\operatorname{sen}^2\varepsilon} = \frac{\cos^2\varepsilon}{1 - \cos^2\varepsilon}\\
&\operatorname{sen}^2\varepsilon = \frac{\operatorname{tang}^2\varepsilon}{1 + c^2\operatorname{tang}^2\varepsilon}\\
&\cos^2\varepsilon = \frac{\operatorname{cotang}^2\varepsilon}{1 + \operatorname{cotang}^2\varepsilon}
\end{aligned}
\right.
$$

5. ***Relazioni comuni per le funzioni delle somme e differenze dei settori.***

Sia η un altro doppio settore della medesima specie di ε; avremo

$$
(4)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\cos(\eta \pm \varepsilon) = \cos\eta\cos\varepsilon \mp c^2\operatorname{sen}\eta\operatorname{sen}\varepsilon\\
&\operatorname{sen}(\eta \pm \varepsilon) = \operatorname{sen}\eta\cos\varepsilon \pm \cos\eta\operatorname{sen}\varepsilon\\
&\operatorname{tang}(\eta \pm \varepsilon) = \frac{\operatorname{tang}\eta \pm \operatorname{tang}\varepsilon}{1 \mp c^2\operatorname{tang}\eta\operatorname{tang}\varepsilon}\\
&\operatorname{cotang}(\eta \pm \varepsilon) = \frac{\operatorname{cotang}\varepsilon\operatorname{cotang}\eta \mp 1}{\operatorname{cotang}\varepsilon \pm \operatorname{cotang}\eta}
\end{aligned}
\right.
$$

Dalle quali per le funzioni dei settori $= 2\varepsilon$ ricaviamo

$$
(5)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\cos 2\varepsilon = 2\cos^2\varepsilon - 1 = 1 - 2c^2\operatorname{sen}^2\varepsilon\\
&\operatorname{sen}2\varepsilon = 2\operatorname{sen}\varepsilon\cos\varepsilon\\
&\operatorname{tang}2\varepsilon = \frac{2\operatorname{tang}\varepsilon}{1 - c^2\operatorname{tang}^2\varepsilon}\\
&\operatorname{cotang}2\varepsilon = \frac{\operatorname{cotang}^2\varepsilon - 1}{2\operatorname{cotang}\varepsilon}
\end{aligned}
\right.
$$

Dalle medesime (4) deduciamo pure

$$(6)\quad \begin{cases} \text{sen}\,(\eta+\varepsilon)+\text{sen}\,(\eta-\varepsilon)=2\text{sen}\eta\,\cos\varepsilon \\ \text{sen}\,(\eta+\varepsilon)-\text{sen}\,(\eta-\varepsilon)=2\cos\eta\,\text{sen}\varepsilon \\ \cos\,(\eta+\varepsilon)+\cos\,(\eta-\varepsilon)=2\cos\eta\,\cos\varepsilon \\ \cos\,(\eta+\varepsilon)-\cos\,(\eta-\varepsilon)=-2c^2\,\text{sen}\eta\,\text{sen}\varepsilon \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \text{sen}\eta+\text{sen}\varepsilon=2\text{sen}\,\dfrac{\eta+\varepsilon}{2}\cos\dfrac{\eta-\varepsilon}{2} \\ \text{sen}\eta-\text{sen}\varepsilon=2\cos\dfrac{\eta+\varepsilon}{2}\,\text{sen}\,\dfrac{\eta-\varepsilon}{2} \\ \cos\eta+\cos\varepsilon=2\cos\dfrac{\eta+\varepsilon}{2}\cos\dfrac{\eta-\varepsilon}{2} \\ \cos\eta-\cos\varepsilon=-2c^2\text{sen}\,\dfrac{\eta+\varepsilon}{2}\,\text{sen}\,\dfrac{\eta-\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\eta+\text{sen}\varepsilon}{\text{sen}\eta-\text{sen}\varepsilon}=c.\ \text{tang}\,\dfrac{\eta+\varepsilon}{2}\,\text{cotang}\,\dfrac{\eta-\varepsilon}{2} \\ \dfrac{\cos\eta+\cos\varepsilon}{\cos\eta-\cos\varepsilon}=-\text{cotang}\,\dfrac{\eta+\varepsilon}{2}\,\text{cotang}\,\dfrac{\eta-\varepsilon}{2} \\ \dfrac{\text{sen}\eta+\text{sen}\varepsilon}{\cos\eta+\cos\varepsilon}=\text{tang}\,\dfrac{\eta+\varepsilon}{2} \\ \dfrac{\text{sen}\eta-\text{sen}\varepsilon}{\cos\eta+\cos\varepsilon}=\text{tang}\,\dfrac{\eta-\varepsilon}{2} \end{cases}$$

6. *Formole differenziali e integrali.*

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{d.\,\text{sen}\varepsilon}{d\varepsilon}=\cos\varepsilon \\ \dfrac{d.\,\cos\varepsilon}{d\varepsilon}=-c^2\text{sen}\varepsilon \\ \dfrac{d.\,\text{tang}\varepsilon}{d\varepsilon}=\dfrac{1}{\cos^2\varepsilon}=1+c^2\text{tang}^2\varepsilon \\ \dfrac{d.\,\text{cotang}\varepsilon}{d\varepsilon}=-\dfrac{1}{c.\text{sen}^2\varepsilon}=-c\,(1+\text{cotang}^2\varepsilon) \\ \dfrac{d.\,\sec\varepsilon}{d\varepsilon}=\dfrac{\sec\varepsilon\sqrt{\sec^2\varepsilon-1}}{r^2} \end{cases}$$

$$(9)\quad \frac{d.\operatorname{cosec}\varepsilon}{d\varepsilon} = -\frac{\operatorname{cosec}\varepsilon\sqrt{c^2\operatorname{cosec}^2\varepsilon - 1}}{r^2}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \int \frac{dx}{\sqrt{1-c^2x^2}} = \varepsilon = 2\text{sett. sen}x \\ \int \frac{-dx}{c\sqrt{1-x^2}} = \varepsilon = 2\text{ sett. cos}x \\ \int \frac{dx}{1+c^2x^2} = \varepsilon = 2\text{sett. tang}x \\ \int \frac{-dx}{c(1+x^2)} = \varepsilon = 2\text{sett. cotang}x \\ \int \frac{r^2dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \varepsilon = 2\text{sett. sec.}x \\ \int \frac{-r^2\,dx}{x\sqrt{c^2x^2-1}} = \varepsilon = 2\text{sett. cosec}x \\ \int \frac{(1-c^2)\cos\varepsilon\ \text{sen}\varepsilon\ d\varepsilon}{\sqrt{1+\text{sen}^2\varepsilon\,(1-c^2)}} = r \end{cases}$$

7. *Relazioni tra le funzioni trigonometriche delle tre coniche con un angolo ausiliare.*

Si conduca dal centro del circolo un raggio all'estremità di un arco circolare $\varphi < 45°$ e si prolunghi fino ad incontrare l'iperbola: questo raggio incontrerà nel suo prolungamento la tangente comune al circolo, all'ellissi e all' iperbola e farà coll'asse delle ascisse un angolo che chiameremo pure φ. Dal punto ove la tangente alle tre curve incontra il prolungamento del raggio si conduca una parallela all'asse delle ascisse la quale incontrerà il circolo in un altro punto, e da questo punto si meni un altro raggio al centro, che farà coll'asse delle ascisse un altro angolo $\theta > \varphi$.

Avremo per tale costruzione la relazione

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

dalla quale si ha

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta}},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta}}; \qquad (11)$$

e poichè

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\operatorname{sen}\varphi$$

per la (1) avremo

$$r = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi + c^2\operatorname{sen}^2\varphi}}$$

Da queste otteniamo

$$\left.\begin{aligned} x = \cos\varepsilon &= \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + c^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \\ y = \operatorname{sen}\varepsilon &= \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + c^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \end{aligned}\right\} (12)$$

e sostituendo in queste i valori di $\operatorname{sen}\varphi$ e $\cos\varphi$ dalle (11)

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}^2\theta}{1+c^2\operatorname{sen}^2\theta}} \\ x &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2\operatorname{sen}^2\theta}} \\ y &= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+c^2\operatorname{sen}^2\theta}} \end{aligned}\right\} (13)$$

Da queste e dalle relazioni (2) abbiamo il modo di esprimere i valori delle diverse linee trigonometriche del doppio settore ε (a qualunque delle tre coniche appartenga) per mezzo delle funzioni trigonometriche circolari dell'angolo θ, e sono le seguenti

$$(13 \text{ bis}) \left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}\varepsilon &= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+c^2\operatorname{sen}^2\theta}} \\ \cos\varepsilon &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2\operatorname{sen}^2\theta}} \end{aligned}\right.$$

$$(14)\quad\begin{cases}\text{tang}\varepsilon = \text{sen}\theta \\[4pt] \text{cotang}\varepsilon = \dfrac{1}{c\,\text{sen}\,\theta} \\[4pt] \text{sec.}\varepsilon = \sqrt{1+\text{sen}^2\theta} \\[4pt] \text{cosec.}\varepsilon = \dfrac{\sqrt{1+\text{sen}^2\theta}}{c\,\text{sen}\theta}\end{cases}$$

8. *Relazioni fra i tre settori ellittico, circolare e iperbolico contenuti tra l'asse delle ascisse e un raggio vettore che fa angolo comune.*

Queste relazioni si ottengono facilmente esprimendo le funzioni circolari dell'angolo θ per le funzioni di uno qualunque dei doppii settori ε: e sono le seguenti

$$(15)\quad\begin{cases}\text{sen}\theta = \text{tang}\varepsilon \\[4pt] \cos\theta = \dfrac{\sqrt{1-\text{sen}^2\varepsilon\,(1+c^2)}}{\cos\varepsilon} = \sqrt{\dfrac{1-\text{sen}^2\varepsilon\,(1+c^2)}{1-c^2\text{sen}^2\varepsilon}} \\[4pt] \text{tang}\theta = \dfrac{\text{sen}\varepsilon}{\sqrt{1-\text{sen}^2\varepsilon\,(1+c^2)}} \\[4pt] \text{cotang}\theta = \dfrac{\sqrt{1-\text{sen}^2\varepsilon\,(1+c^2)}}{\text{sen}\varepsilon} \\[4pt] \text{sec.}\theta = \dfrac{\cos\varepsilon}{\sqrt{1-\text{sen}^2\varepsilon\,(1+c^2)}} = \sqrt{\dfrac{1-c^2\text{sen}^2\varepsilon}{1-\text{sen}^2\varepsilon\,(1+c^2)}} \\[4pt] \text{cosec}\theta = c.\ \text{cotang}\varepsilon\end{cases}$$

L'espressioni integrali di ε in funzione di θ dalle (14) e dalle (10) si riducono alle seguenti

$$(16)\quad\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{1+c^2\,\text{sen}^2\theta} = \varepsilon \\[6pt] \displaystyle\int\frac{(1-c^2)\,\text{sen}\theta\cos\theta\,d\theta}{(1+c^2\text{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\text{sen}^2\theta}} = r \\[6pt] \displaystyle\int\frac{(1-c^2)\,\text{sen}\theta\cos\theta\,d\theta}{(1+c^2\text{sen}^2\theta)\,(1+\text{sen}^2\theta)} = \log.\,r\end{cases}$$

9. *Espressione del settore ellittico e iperbolico in funzione del settore circolare.*

La relazione tra il doppio settore circolare x e il doppio settore ellittico o iperbolico ε, che ne è proiezione è dato dalla uguaglianza

$$(17) \qquad \varepsilon = px$$

dove il coefficiente p per l'ellissi è una quantità reale <1, ma per l'iperbola è imaginaria e uguale a $\sqrt{-1}$. Perciò questa formola semplicissima, e di facile applicazione all'ellissi, non è numericamente applicabile all'iperbola. Per l'iperbola, dietro il Lambert, si esprime ε in funzione di φ di questo modo. Sappiamo che generalmente

$$(18) \qquad \operatorname{tang}\varepsilon = p \operatorname{tang} x$$

e poichè nel caso nostro $$p = \sqrt{-1},$$

$$\varepsilon = x\sqrt{-1},$$

applicando la nota formola

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \, \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1},$$

avremo

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \sqrt{-1}\, \operatorname{tang} x = \frac{e^{2\varepsilon} - 1}{e^{2\varepsilon} + 1};$$

donde

$$e^{2\varepsilon} = \frac{1 + \operatorname{tang}\varepsilon}{1 - \operatorname{tang}\varepsilon}:$$

e poichè (12)

$$(19) \qquad \operatorname{tang}\varepsilon = \operatorname{tang}\varphi,$$

sarà

$$e^{2\varepsilon} = \frac{1 + \operatorname{tang}\varphi}{1 - \operatorname{tang}\varphi} = \operatorname{tang}(45^\circ + \varphi),$$

donde

$$(20) \qquad \varepsilon = \frac{\log.\operatorname{tang}(45^\circ + \varphi)}{2\log.e}.$$

10. Finalmente se si volessero ricavare le relazioni tra il doppio settore circolare x e l'angolo θ, non si avrebbe a fare altro, che sostituire nelle (15) x invece di ε: e per mezzo delle medesime e delle (11) e (12) possono ricavarsi le altre relazioni che si vogliano tra θ e φ.

Le formole del Lambert e del Forti intorno alle funzioni iperboliche non sono altro che alcuni casi particolari delle formole generali che abbiamo stabilito.

LE NEBBIE DEL CLIMA DI ROMA

NOTA

DEL P. GIUSEPPE LAIS

Col nome di nebbia intendiamo quel vapore d'acqua condensato in masse che talvolta si svolge alla superficie terrestre bagnando i corpi circostanti e privando l'aria di trasparenza.

Le nubi non sono che nebbie più o meno elevate nelle regioni dell'atmosfera e di forme più o meno variabili connesse con l'elevazione e la distanza, e quando il vapore che le forma è raro e indeciso può ben dare origine all'aspetto di una nebbia, e potrà il cielo appellarsi nebbioso o caliginoso, ma con poca esattezza potrà dirsi nebbia, perchè nebbia non deve appellarsi qualunque condensazione di vapore nel seno dell'atmosfera, ma solo quella che nasce in vicinanza delle superficie. Si genera la nebbia quando due correnti aeree si trovano a temperatura e stato igrometrico diverso: la formazione è sempre la stessa, ma non l'origine; perchè i vapori che hanno uscita dalla terra riscaldata dal sole sono ben altra cosa del vapore che si trova abitualmente in maggiore o minor quantità in seno dell'atmosfera.

Avvi poi un altro genere di nebbie aride conosciute sotto il nome di secche e sono l'effetto dell'agglomerazione di esilissimi materiali terrestri che non si condensano per variare di temperatura, e avendo altra origine hanno pure caratteristiche diverse sia nel colore sia nell'odore più o meno empireumatico.

La rarità di queste ultime nebbie impedisce di assumerle per tema di studio, mentre la frequenza delle prime e l'importanza che può avere il copioso depositarsi di questo vapore sugli organi dei vegetali, specialmente per le sostanze ammoniacali che raccoglie nello spazio di sua formazione, portano un interesse all'agricoltore di conoscere, se non esattamente, almeno con una certa approssimazione la frequenza di queste idrometeore, e la loro distribuzione nella durata dell'anno.

La poca esattezza nelle denominazioni degli antichi registri e giornali di osservazioni, che non distinguono l'origine terrestre e chiamano nebbia qualunque intorbidamento atmosferico, fa sì che poca fiducia mi hanno ispirato le antiche osservazioni, e delle moderne mi sono servito allora che

il carattere della meteora che volevo studiare mi sembrava bene accertato.

Passando quindi in rivista le osservazioni meteorologiche pubblicate dall'Osservatorio del Collegio Romano dal 1863 fino al 1879, e quelle degli ultimi quattro anni dell'Osservatorio Capitolino, ho preso in considerazione ventuno anni di osservazione, dalle quali risultano 459 nebbie ripartite per anni, mesi secondo lo specchio annessi alla presente nota.

Ecco la distribuzione delle nebbie nelle quattro stagioni

Inverno	*Primavera*	*Estate*	*Autunno*
95	88	167	109

che stanno tra loro nella ragione di 20.7, 19.1, 36.3, 23.7 °/₀.

Da ciò è facile indagare che il mese più ricco di nebbie nell'accenuato periodo è l'agosto, al quale ne corrispondono 80 e il più scarso il maggio nel quale se ne presentarono 18.

Dividendo il totale pel numero degli anni si ottiene il medio annuo che risulta di 21,85 e il medio mensile di 1,8.

L'anno più scarso di nebbie fu il 1868 che appena giunse all'unità e il più ricco fu il 1880 con un novero di 43.

L'agosto del 1873 e l'agosto del 1879 ebbero i due massimi mensili più forti di tutto il dodicennio e raggiunsero e superarono la diecina.

Portando la nostra attenzione su questi mesi e sugli elementi meteorici concomitanti dobbiamo riconoscere che fuvvi mancanza di pioggia ed elevata temperatura in ambedue questi massimi.

L'agosto del 1873 passò con una temperatura media, che fu nelle quattro di osservazione di 27°50 mentre suole essere di 24,16 (ciò apprendiamo dal bullettino di quell'anno).

La temperatura media dell'agosto 1879 fu di 26°, laddove la media di 17 anni è di 24,36, e il medio dei massimi ha superato il normale di 1°4 e quello dei minimi di quasi altrettanto.

Da questo dobbiamo inferire, che nei mesi più caldi e più aridi si presentarono maggior numero di nebbie; circostanza che non deve sfuggire alla nostra osservazione e ci mostra in queste idrometeore un potente ausiliare della rugiada, che nelle calde e serene notti estive bagna i tessuti delle piante, e li rinfranca delle perdite subìte dalla diurna evaporazione.

Il risultato al quale siamo giunti deve considerarsi soltanto come proprio della statistica delle vere e proprie nebbie; che se invece per nebbie si

prendano gli annebbiamenti od offuscamenti delle alte regioni del cielo allora non è meraviglia, che il maggior numero si verifichi nell'inverno e nell'autunno, come afferma il Sig. Houzeau direttore dell'Osservatorio di Bruxelles nel suo recente « Traité élémentaire de météorologie ».

La distribuzione delle nebbie secondo i diversi giorni del mese non offre alcuna regolarità salvo un accentuazione sul principio e sulla fine come può vedersi dallo specchio.

Le nebbie danno dei segni di dichiarata elettricità partecipando esse della stessa natura delle nubi.

Il Bullettino dell'Osservatorio del Collegio Romano che pubblicò osservazioni di elettricità atmosferica ci da mezzo di conoscere lo stato contemporaneo dell'elettricità colle nebbie.

Di fianco alla dichiarazione di nebbie basse e foltissime si trovano cifre discrtamente elevate e che si innalzano fino all' ∞ positivo. Nè so pertanto tanto conciliare questo fatto con l'osservazione del defunto Prof. Parnisetti Direttore dell'Osservatorio del Seminario di Modena, che asserisce essere nelle fitte nebbie elettricità positiva e debolissima. (Osserv. del 1883). Per Roma potrei citare le date del 10 luglio 1873, del 26 aprile 1874 e del 24 Decembre 1875, dove a scura fitta e bassa nebbia si ebbe sempre elettrico ∞.

Fino al presente le osservazioni sulle nebbie ti redigono a stima, caratterizzandole colle espressioni leggiera, densa, densissima. Sembra che il bisogno di adoperare un linguaggio più rigoroso abbia indotto a studiare determinazioni comparabili per località diverse, ed il Sig. Symons nel « Monthly Meteorological Magazin » propone di usare delle stagge con linee bianche sn fondo nero, di uno, due, tre millimetri di spessore, mettendole a 6 metri dall'osservatore, e notando nella serie delle linee bianche la prima visibile: nella notte una lucerna con vetri colorati di vario spessore servirebbe per altrettanti punti di confronto.

Mi permetto un osservazione sulla costituzione fisica del vapore vescicolare. Il vocabolo include una teoria che per quanto sembra difficile spiegarsi in pratica trova appoggio nell'esperienza.

Il vapore si condensa senza dubbio in sferule di microscopiche dimensioni che variano secondo Kaemtz da $0^{mm},014$ a $0^{m},036$.

Il sollevarsi che esse fanno nell'aria con tanta facilità e leggerezza ha imposto ad alcuni fisici di considerarle vuote e formate a guisa di bolle di sapone, per quella tenue viscosità che è propria dell'acqua divisa in mi-

nutissime particelle, ad altri di supporle piene ed elevantisi dal suolo in forza della elettricità del vapore che le circonda e le sostiene.

A me sembra che l'esperimento decisivo consista nell'osservare la indecomposizione della luce riverberata delle vescichette quando vengono colpite lateralmente dai raggi solari.

Il fenomeno dell'arco baleno, come si produce in grande sulle goccie sferiche della pioggia, dovrebbe ripetersi a parità di caso nelle minutissime delle nebbie: può bèn essere che per la tenuità della rifrazione dopo subìte le riflessioni nell'interno delle sferule la luce abbia a mancare, ma l'osservazione da me fatta più volte in aperta campagna e in mezzo alle nebbie esclude l'ipotesi; perchè ho potuto osservare nettissimamente la forma dell'arco rivolgente le sue concavità alla terra nelle condizioni volute di altezza e dimensioni rispetto all'opposta posizione del sole, ma l'arco era costituito da pura luce bianca e non iridescente; il che indica secondo me riflessione e non rifrazione e come corollario le sferule vuote e non piene di liquido.

NEBBIE SECONDO L'ORDINE DEI MESI E DEGLI ANNI

	G.	F.	M.	A.	M.	G.	L.	A.	S.	O.	N.	D.	
1863	»	»	2	1	2	1	»	1	1	»	1	»	9
1864	1	»	»	»	1	1	2	1	1	1	»	»	8
1865	»	»	»	4	»	»	»	3	»	»	»	1	8
1866	3	1	»	2	1	5	2	1	»	»	1	3	19
1867	»	3	1	2	»	»	»	»	2	2	1	»	11
1868	»	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1
1869	2	1	»	»	»	»	3	3	»	»	2	»	11
1870	3	»	»	»	1	4	1	»	1	»	»	»	10
1871	»	3	2	5	1	2	2	2	3	1	1	»	22
1872	»	2	»	1	1	1	4	5	8	1	2	»	25
1873	3	»	2	»	»	3	7	11	2	2	»	3	33
1874	2	2	4	3	»	1	3	2	2	7	1	4	31
1875	1	»	3	2	4	4	2	7	7	2	4	4	40
1876	1	4	3	3	1	4	6	5	4	3	5	3	42
1877	3	2	2	2	2	1	»	7	2	»	1	3	25
1878	»	1	6	1	1	2	1	8	2	1	1	5	29
1879	»	1	2	»	»	1	»	10	2	3	1	»	20
1880	2	2	3	2	1	1	3	6	6	3	5	9	43
1881	3	1	2	2	1	3	1	6	3	1	1	1	25
1882	2	»	4	»	»	»	2	3	»	2	»	2	15
1883	2	1	1	3	1	3	2	8	4	2	1	4	32
	28	25	37	33	18	37	41	89	50	31	28	42	459

COMUNICAZIONI

Lanzi, Dott. M. – *Sui funghi indigeni del territorio romano*:

Il ch. Signor Dott. M. Lanzi in continuazione dello studio dei funghi indigeni del territorio romano, ricordò i caratteri stabiliti dal Fries e propri agli Agarici Clitocibe. Sono essi desunti dal colore delle spore, dal modo di risolversi del velo, dalla forma del pileo, dalla tessitura del gambo, dalla aderenza delle lamelle. Tali funghi sono terrestri, abbenchè prendano nutrimento da materiali di natura vegetale e da legni putridi e sono in gran parte polposi.

Passando alla enumerazione delle specie da lui rinvenute nel suolo romano, disse che alcuni di tali funghi sono mangerecci ed innocui, benchè di sapore non tanto squisito a paragone di altri agarici: altri essendo crudi anno sapore acidulo, qualità che perdono con la cottura; altri sospetti come sono l'*Agaricus inversus* Fries e l'*Ag. flaccidus*, in quanto che talora riescono acri e lievemente irritanti: che l'*Ag. cerussatus* seppure poco sapido e mangiabile quando sia giovane e fresco, acquista invecchiando forte odore e sapore amaro di mandorle, pel quale diviene ributtante e nocivo: che in fine ve ne hanno specie fragranti ed aromatiche, come lo sono l'*Ag. odorus* Fr., il quale tramanda un grato profumo di Eliotropio; e l'*Ag. fragrans* Fr. uno spiccato odore di Anice, qualità che li rendono adatti ad essere talvolta usati come condimento, e che varrebbero eziandio a metterli a profitto della profumeria.

Olivieri, Ing. G. – *Relazione su di una memoria manoscritta*:

L'ingegnere Olivieri presentò la relazione della Commissione accademica per l'esame di una memoria manoscritta del ch. Sig. Ing. A. Arnaud di Cuneo intitolata: *Sulle briglie e sulle serie per impedire il protendimento dei burroni alpini e su i serbatoi artificiali*.

Castracane, Conte Ab. F. – *Presentazione di una nota e annunzio di morte d'un socio*:

Il Presidente presentò da parte del ch. Sig. Prof. Stefano Rossi una nota a stampa intitolata: *Flora del Monte Calvario*. Il medesimo annunziò la dolorosa perdita che la nostra Accademia ha fatto colla morte testè avvenuta del P. Raffaele Piccinini monaco Camaldolese alla Pergola nostro socio corrispondente. Il giorno 6 del corrente mese di Giugno una congestione cerebrale lo ha rapito alla religiosa famiglia, alla quale appar-

teneva, e alle scienze naturali, che hanno perduto in lui uno dei suoi più attivi cultori. Egli ha studiato il Monte Catria sotto tutti i rapporti, esaminandone la geologica struttura, la flora, la fauna, i fossili, i minerali etc., ed i suoi studi ci rimangono in una bella ed importante monografia sulle materie sopra enumerate. Lascia un magnifico e ben ordinato gabinetto, nel quale si ha classificata tutta la storia naturale di quella montagna. Egli era di una singolare modestia accoppiata ad un valore scientifico grandissimo, come lo dimostrano i giudizi dati dai numerosi suoi corrispondenti ed in particolar modo dal Prof. Zittel geologo a Monaco.

Boncompagni, Principe D. B. – *Presentazioni diverse*:

Il ch. Sig. Principe D. Baldassare Boncompagni presentò: 1.° da parte dell'autore P. Teofilo Pepin socio corrispondente l'originale manoscritto di un lavoro intitolato: « *Théorie des fonctions homogènes du troisième degré à deux variables*, che trovasi pubblicato negli Atti della presente sessione; 2.° da parte del Sig. Comm. Prof. Angelo Genocchi un esemplare stampato di ciascuna delle pubblicazioni intitolate: « *La Società dei XL e alcuni degli scienziati che le furono ascritti* »; « *Résumé de différents recherches sur les ovales de Descartes et quelques autres courbes* »; *Sur un manuscrit de Fermat, récemment publié* »; 3.° da parte dell'autore Sig. Prof. Giovanni Luvini un esemplare di ciascuna delle pubblicazioni seguenti: « Fisica – *Articolo estratto dalla Enciclopedia delle arti e industrie scritto a richiesta del Direttore* Ing. Cav. G. Sacheri: » « *Sullo stato sferoidale* »; « *Controverses au XVIII^e siècle, au sujet des trombes à propos d'une Note de M. J. Luvini, par M. Faye* »; 4.° Un esemplare di ciascuno dei fascicoli del *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni*; *Tomo XIV, indici degli articoli e dei nomi. Tomo XVI, Agosto* 1883.

Ferrari, P. G. S. – *Presentazione di una sua memoria*:

Il ch. P. Ferrari essendo impedito d'intervenire alla seduta accademica, comunicò per mezzo del Segretario una sua memoria intitolata: *Fatti e teoriche intorno ai crepuscoli rossi del* 1883-84. Tale memoria verrà inserita in uno dei volumi delle *Memorie della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei*.

De Rossi, Prof. M. S. – *Presentazioni diverse*:

Il Segretario Prof. Cav. M. S. De Rossi presentò da parte dell'autore socio corrispondente Sig. Dott. D. Seghetti un opuscolo intitolato: Tuscolo

E LA BADIA SUBLACENSE – *Schiarimenti ad un periodo della storia tuscolana dal VI al XII secolo*. Presentò anche un opuscolo del ch. Sig. Giulio Grablovitz intitolato: *Dell'influenza lunare sul tempo*, ed altre opere e periodici venuti in dono all'Accademia.

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

1. Lettera di ringraziamento del Dott. M. Venturoli per la sua nomina a socio corrispondente.
2. Lettere di ricevuta degli Atti.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI: Conte Ab. F. Castracane, Presidente. – Prof. M. Azzarelli. – P. F. S. Provenzali. – Dott. M. Lanzi – Prof. V. De Rossi-Re – Ing. A. Statuti. – Comm. C. Descemet. – Principe D. B. Boncompagni. – P. G. Lais. – Cav. G. Olivieri. – Prof. M. S. De Rossi, Segretario.

CORRISPONDENTI: P. G. Egidi.

AGGIUNTI: Prof. O. Persiani.

La seduta aperta legalmente alle ore $5\frac{3}{4}$ p., fu chiusa alle ore $7\frac{3}{4}$ p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Atti della R. Accademia dei Lincei*. — Anno CCLXXXI 1883—84. — Serie terza. — Transunti, Vol. VIII, Fasc. 13, 14. — Roma, 1883, In-4.°
2. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino*. Vol. XIX, disp. 3. Torino, 1884, in-8°.
3. *Boletin de la Academia nacional de ciencias en Córdoba*. — Tomo VI. — Entrega 1.ª — Buenos Aires, 1884, in-8.°
4. *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*. — T. XIV. — indici; T. XVI. Agosto 1883. — Roma, 1883, in-4.°
5. FAYE (M.) — *Controverses, au XVIIIe siècle, au sujet des trombes à propos d'une Note de M. J. Luvini.*
6. GENOCCHI (A.) — *Résumé de différentes recherches sur les ovales de Descartes et quelques autres courbes.*
7. —— *Sur un manuscrit de Fermat, récemment publié.*
8. —— *La Società dei XL e alcuni degli scienziati che le furono ascritti*. Firenze, 1883. in-8.°
9. GRABLOVITZ (G.) — *Dell'influenza lunare sul tempo.*
10. *Jahres-Berichte des naturwissenschaftlichen Vereins in Elberfeld. Sechste Heft.* Elberfeld, 1884, in-8.°
11. *Journal de la Société physico-chimique russe.* — T. XVI. — n.° 5. — St. Pétersbourg, 1884, in-8.°
12. *La Civiltà Cattolica* — A. 36. — Serie XII. — Vol. VI. — Quad. 815. — Firenze, 1884, in-8.°
13. LUVINI (G.) — *Fisica.* — *Articolo estratto dalla enciclopedia delle arti e industrie, etc.* Torino, 1883, in-16.°
14. —— *Sullo stato sferoidale.* Torino 1884, in-8.°
15. *Mittheilungen der k. k. Geographischen Gesellschaft in Wien*, 1883. — Wien, 1883, in-8.°
16. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — *Partie littéraire.* — IIe série, to. XVIIIe, XLe de la collection. — Ve livraison, Mai. Paris, 1884, in-8.°
17. —— *Partie Technique.* — IIe série, to. X, XLIIe de la collection. — Ve livraison. — Mai. Paris, 1884, in-8.°
18. ROSSI (S.) — *Flora del Monte Calvario*. Domodossola, 1883, in-8.°
19. SEGHETTI (D.) — *Tuscolo e la badia sublacense.* Roma 1880, in-8.°

INDICE DELLE MATERIE
DEL VOLUME XXXVII
(1883–1884)

MEMORIE E NOTE

COMUNICAZIONI

COMUNICAZIONI DEL PRESIDENTE E DEL SEGRETARIO

COMITATO SEGRETO

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

COMPILATI DAL SEGRETARIO

ANNO XXXVIII

SESSIONE Iª DEL 21 DICEMBRE 1884.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
Via Lata N°. 3.
1886

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE' NUOVI LINCEI

PUBBLICATI

CONFORME ALLA DECISIONE ACCADEMICA

del 22 *dicembre* 1850

E COMPILATI DAL SEGRETARIO

TOMO XXXVIII - ANNO XXXVIII

(1884-1885)

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
Via Lata N°. 3.
1885

ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI
ANNO XXXVIII.

ELENCO DEI SOCI

DATA DELLA ELEZIONE	SOCI ORDINARI
2 Febbraio 1862.	Azzarelli Prof. Cav. Mattia.
3 Luglio 1847.	Boncompagni Principe D. Baldassarre.
2 Giugno 1867.	Castracane degli Antelminelli, Ab. Conte Francesco.
5 Maggio 1878.	Ciampi P. Felice.
20 Febbraio 1876.	Colapietro Prof. Dott. Domenico.
7 Maggio 1871.	De Rossi Prof. Cav. Michele Stefano.
20 Febbraio 1876.	De Rossi Re Prof. Vincenzo.
18 Giugno 1876.	Descemet Comm. Carlo.
27 Aprile 1873.	Ferrari P. G. Stanislao.
18 Giugno 1876.	Foglini P. Giacomo.
3 Giugno 1866.	Guglielmotti P. Alberto.
20 Febbraio 1876.	Guidi Cav. Filippo.
5 Maggio 1878.	Ladelci Prof. Dott. Francesco.
24 Gennaio 1875.	Lais P. Giuseppe.
5 Maggio 1878.	Lanzi Dott. Matteo.
27 Aprile 1873.	Olivieri Cav. Giuseppe.
7 Maggio 1871.	Provenzali P. Francesco Saverio.
7 Maggio 1871.	Regnani Monsignor Prof. Francesco.
16 Marzo 1879.	Sabatucci Cav. Placido.
15 Gennaio 1882.	Solivetti Dott. Alessandro.
18 Giugno 1876.	Statuti Cav. Prof. Augusto.
20 Febbraio 1876.	Tancioni Prof. Cav. Gaetano.
28 Gennaio 1883.	Tuccimei Prof. Giuseppe.
	SOCI ONORARI
5 Maggio 1878.	Sua Santità LEONE PAPA XIII.
28 Marzo 1883.	S. E. Rma il Card. Gaetano Alimonda, Arcivescovo di Torino.
17 Febbraio 1879.	S. E. Rma Haynald Card. Ludovico, Arcivescovo di Colocza.
16 Marzo 1879.	Boncompagni D. Ugo Marchese di Vignola.
5 Maggio 1878.	Ciccolini Monsignore Stefano.
25 Maggio 1848.	Cugnoni Ing. Ignazio.
5 Maggio 1878.	De Rossi Comm. Giovanni Battista.
25 Maggio 1878.	Palomba Cav. Clemente.
16 Dicembre 1883.	Sterbini Comm. Giulio.
5 Maggio 1878.	Vannutelli Monsignore Vincenzo.

Data della elezione	Soci Aggiunti
16 Giugno 1878.	Boncompagni Ludovisi D. Luigi.
5 Maggio 1878.	Bonetti Prof. D. Filippo.
12 Giugno 1881.	Buti Monsignore Prof. Giuseppe.
26 Maggio 1878.	De Courten Ing. Giuseppe Erasmo.
26 Maggio 1878.	Del Drago dei principi, D. Ferdinando.
23 Maggio 1880.	Fonti Marchese Luigi.
26 Maggio 1878.	Giovenale Ing. Giovanni.
5 Maggio 1878.	Gismondi Prof. D. Cesare.
26 Maggio 1878.	Paloni Prof. D. Venanzio.
5 Maggio 1878.	Persiani Prof. Eugenio.
5 Maggio 1878.	Persiani Prof. Odoardo.
12 Giugno 1881.	Santovetti Prof. D. Francesco.
5 Maggio 1878.	Seganti Prof. Alessandro.
26 Maggio 1878.	Zama Prof. Edoardo.
	Soci Corrispondenti italiani
27 Aprile 1873.	Bertelli P. Timoteo, Professore al Collegio alla Querce, Firenze.
11 Maggio 1851.	Betti Comm. Enrico, Professore nella R. Università di Pisa.
12 Giugno 1881.	Bruno Prof. D. Carlo, Mondovì.
23 Aprile 1876.	Cecchi P. Filippo, Direttore dell'Osservatorio Ximeniano, Firenze.
22 Febbraio 1885.	Cerebotani Prof. Luigi, Verona.
23 Maggio 1880.	De Andreis Ingegnere Angelo, Roma.
2 Maggio 1858.	De Gasperis Comm. Annibale, Professore nella R. Università, Napoli.
27 Aprile 1873.	Denza P. Francesco, Direttore dell'Osservatorio di Moncalieri.
18 Giugno 1876.	De Simoni Cav. Avv. Cornelio, Segretario degli Archivi di Stato, Genova.
23 Maggio 1880.	Donati Biagio, Civitavecchia.
12 Giugno 1881.	Egidi P. Giovanni, Roma.
23 Aprile 1876.	Galli Prof. D. Ignazio, Direttore dell'Osservatorio meteorico municipale, Velletri.
23 Aprile 1876.	Garibaldi Prof. Pietro Maria, Direttore dell'Osservatorio meteorologico, Genova.
19 Aprile 1885.	Genocchi Prof. Angelo, Torino.
19 Aprile 1885.	Grassi Landi Monsignore Bartolomeo, Roma.
28 Gennaio 1883.	Mazzetti Ab. Giuseppe, Modena.
12 Giugno 1881.	Medichini prof. D. Simone, Viterbo.
1 Aprile 1860.	Meneghini Comm. Prof. Giuseppe, Pisa.
19 Aprile 1885.	Mercalli Prof. Sac. Giuseppe, Monza.

Data della elezione	Soci Corrispondenti Italiani
22 Febbraio 1885.	Luvini Prof. Giovanni, Torino.
15 Gennaio 1882.	Ragona prof. Domenico, Modena.
19 Aprile. 1885.	Rossi Prof. Stefano, Domodossola.
4 Maggio 1849.	Scacchi Prof. Arcangelo, Napoli.
28 Gennaio 1883.	Seghetti Dott. Domenico, Frascati.
23 Aprile 1876.	Seguenza Prof. Cav. Giuseppe, Messina.
23 Aprile 1877.	Stoppani Prof. D. Antonio, Dirett. del Museo Civico, Milano.
4 Febbraio 1849.	Tardy Comm. Placido, Professore nella R. Università, Genova.
13 Gennaio 1867.	Turazza Cav. Domenico, Professore nella R. Università, Padova.
16 Dicembre 1883.	Venturoli Cav. Dott. Marcellino, Bologna.
1 Aprile 1860.	Villa Antonio, Milano.
	Soci Corrispondenti Stranieri
17 Novembre 1850.	Airy G. B. Greenwich.
21 Decembre 1873.	Bertin Emilio, ingegnere delle costruzioni navali, Brest.
8 Aprile 1866.	Bertrand Giuseppe Luigi, Membro dell'Istituto di Francia, Parigi.
17 Marzo 1878.	Breithof Nicola, Professore all'Università di Lovanio.
23 Maggio 1880.	Carnoy prof. Giuseppe, Lovanio.
23 Maggio 1880.	Carnoy prof. Giovanni Battista, Lovanio.
12 Giugno 1881.	Catalan prof. Eugenio, Liége.
12 Giugno 1884.	Certes prof. Adriano, Parigi.
20 Aprile 1884.	D'Abbadie Antonio, Parigi.
4 Marzo 1866.	Dausse Battista, Ingegnere idraulico, Parigi.
16 Febbraio 1879.	De Basterot Conte S.
11 Giugno 1865.	De Caligny marchese Anatolio, Versaille.
10 Giugno 1860.	De Candolle Alfonso, Ginevra.
16 Dicembre 1883.	De Jonquières, Ammiraglio, Parigi.
4 Marzo 1866.	De Saint-Venant, Membro dell'Acc. delle scienze dell'Istituto di Francia, Vendôme.
16 Febbraio 1879.	Di Brazzà Savorgnan Conte Pietro.
10 Luglio 1853.	Du Bois Reymond E., Berlino.
8 Aprile 1866.	Fizeau Armando Ippolito, Membro dell'Acc. delle scienze dell'Istituto di Francia, Parigi.
22 Febbraio 1874.	Gilbert Filippo, Professore nell'Università cattolica di Lovanio.
17 Novembre 1850.	Henry, Segretario dell'Istituto Smitsoniano di Washington.

DATA DELLA ELEZIONE	SOCI CORRISPONDENTI STRANIERI
6 Luglio 1873.	Hermite Carlo, Membro dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Francia.
18 Giugno 1876.	Joubert P. Carlo.
4 Marzo 1866.	Le Joli Augusto, Cherbourg.
12 Giugno 1881.	Le Paige Prof. Costantino, Liége.
10 Luglio 1853.	Liais E. Astronomo in Parigi.
10 Luglio 1858.	Malmsten Dott. C. G. professore di matematica nell'Università di Upsal.
20 Aprile 1884.	Meignan Monsignor Guglielmo, Arcivescovo di Tours.
10 Luglio 1853.	Neumann Dott. Professore nell'Università di Könisberg.
18 Giugno 1876.	Pepin P. Teofilo.
28 Gennaio 1883.	Perry P. Stefano Giuseppe, Direttore dell'Osservatorio di Stonyhurst.
20 Aprile 1884.	Renard, R. P. Bruxelles.
10 Luglio 1853.	Roberts G. professore al collegio Monayhan, Dublino.
20 Aprile 1884.	Roig y Torres Prof. Raffaele, Barcellona.
2 Maggio 1858.	Sabine Edoardo, Londra.
20 Gennaio 1884.	Schimd D. Julius, Professore nell'Università di Tubbinga.
10 Giugno 1860.	Soret Luigi, Ginevra.
2 Maggio 1858.	Thomson Guglielmo, Professore nell' Università di Glasgow.
2 Maggio 1858.	Wehlberg Pietro Federico, Stockolm.

PRESIDENTE

Conte Ab. Francesco Castracane degli Antelminelli.

SEGRETARIO

Cav. Prof. Michele Stefano De Rossi

VICE SEGRETARIO

P. Giuseppe Lais.

COMITATO ACCADEMICO

Conte Ab. F. Castracane. Prof. M. S. de Rossi.
Prof. M. Azzarelli. P. F. S. Provenzali.
P. G. S. Ferrari.

COMMISSIONE DI CENSURA

Principe D. B. Boncompagni. Prof. A. Statuti.
P. G. S. Ferrari. P. F. S. Provenzali.

TESORIERE

P. G. S. Ferrari.

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI

SESSIONE Iª DEL 21 DICEMBRE 1884

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

SULLA TRASPARENZA DELL'ACQUA DI MARE
NOTA

DEL P. F. S. PROVENZALI, D. C. D. G.

Le radiazioni solari possono esercitare qualche azione chimica nelle grandi profondità sottomarine? Fu questo il quesito che sul cominciare del nuovo anno accademico il nostro ch. Presidente volgeva ai suoi colleghi ad occasione delle recenti esplorazioni eseguite nei grandi fondi dalle Commissioni a tale scopo nominate da vari Governi e specialmente dall'Inghilterra e dalla Francia. Dopo i risultati ottenuti da queste Commissioni non è più lecito sostenere l'antica ipotesi che nei mari la vita sia limitata a qualche centinaio di metri sotto la superficie; ma è fatto certo che a cinque e più chilometri di profondità passano per tutti gli stadi della vita innumerabili organismi di svariatissime forme, dei quali alcuni anche per vaghezza e vivacità di colorito non la cedono a quelli che vivono in vicinanza delle coste ed ovunque la luce solare esercita liberamente il suo influsso (1). E

(1) Le collezioni zoologiche e mineralogiche raccolte nel fondo del mare dalle sole Commissioni del Travailleur nel 1881 e 1882 e del Talisman nel 1883 furono sì copiose da somministrare tutto il materiale della grande Esposizione aperta al pubblico nei locali annessi al Museo di Storia naturale di Parigi.

se questo influsso non giunge e farsi sentire in quegli abissi, come si potranno conciliare le recenti scoperte coi principî ammessi da tutti i naturalisti sulla necessità della luce pel completo sviluppo e colorazione degli esseri organizzati?

Alcuni sono di opinione che nei grandi fondi sottomarini la luce solare possa essere surrogata dalla fosforescenza, tanto comune fra gli abitanti delle acque che non di rado la superficie del mare presenta nella notte per lunghi tratti l'apparenza del latte o della neve. Questa ingegnosa ipotesi quanto agli effetti puramente fisiologici della luce, ossia per ciò che riguarda i fenomeni della visione, non ha nulla d'inverisimile, anzi deve dirsi oltremodo probabile, se non altro perchè i pesci appartenendo in gran parte alla categoria degli animali notturni, hanno spesso bisogno di un altro mezzo diverso dalla luce solare per mettersi in comunicazione cogli oggetti esteriori. Non è così quanto agli effetti chimici della luce, pei quali non sembra che le radiazioni solari possano essere sostituite dallo splendore fosforico. È antica osservazione che in molti animali marini in attuale condizione di vita la fosforescenza non è permanente, ma solo la manifestano quando ne sentono il bisogno o vengono a ciò stimolati da qualche agente esteriore come p. e. da notevole variazione di temperatura ovvero dall'agitazione del mezzo in cui vivono o dall'attrito di altri corpi. Di più si è osservato in molti dei suddetti animali che per divenire fosforescenti devono produrre delle contrazioni nelle loro membra, onde presto si stancano e cessano di essere luminosi, nè tornano nuovamente a splendere se prima non si sono riposati per qualche tempo. La luce da essi emanata deve dunque mancare di quella continuità di azione che sempre si richiede affinchè le deboli luci producano effetti chimici. Che se non ostante la tranquillità del mezzo e la bassa e costante temperatura che regnano nelle acque profonde, l'emanazione fosforica potesse continuare per un tempo abbastanza lungo ed anche essere permanente, come sembra verificarsi in molti pesci, resterebbe sempre a vedere se la luce che ne proviene sia o no dotata d'azione chimica. Quello che su tale proposito abbiamo dalla sperienza è che le radiazioni emesse dagli animali marini fosforescenti non hanno finora dato che delle imagini prismatiche continue, ossia prive di righe oscure e luminose, epperò simili a quelle de' corpi incandescenti, che non emettono radiazioni chimiche attive o solo debolissime (1). Del resto anche in tutte le altre

(1) V. *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences.* — T. 59. pag. 509.

luci fosforiche, qualunque ne sia l'origine e la natura, l'azione chimica è scarsissima, nè si rende sensibile che di rado e dopo un tempo lunghissimo. Sembra dunque potersi affermare che se gli animali marini sono a dovizia dotati della facoltà di splendere, ciò non è per supplire all'azione chimica delle radiazioni solari; ma forse perchè hanno essi bisogno di un mezzo che secondo le circostanze gli renda capaci e d'illuminare lo spazio circostante e di sottrarsi alla vista dei loro persecutori.

Per ciò che riguarda le azioni chimiche necessarie al perfetto sviluppo e colorazione degli organismi viventi v' ha chi pensa, che nelle circostanze eccezionali de' grandi fondi possano quelle azioni compiersi senza la presenza e l'influsso chimico della luce. A formarsi una giusta idea di questa ipotesi conviene distinguere la fauna dei grandi fondi dalla flora. Quanto alla fauna gli animali terrestri che menano tutta la loro vita nei sotterranei o solo escono all'aperto a notte buia, provano abbastanza che anche nelle circostanze ordinarie la luce non è indispensabile al perfetto sviluppo e conservazione della vita animale: sotto questo rispetto non v'è dunque che opporre alla suddetta ipotesi. Quanto poi alla colorazione della pelle e degli altri integumenti esteriori, sebbene non sia dimostrato che in ogni caso vi debba intervenire l'azione della luce, pure è certo che un colorito molto splendido non si vede negli animali che vivono costantemente all'oscuro, come è certo che la luce rinforza ed abbellisce il colorito di quelli che vi stanno lungamente esposti; d'onde viene che il dorso sia meglio colorito che il ventre sì negli animali terrestri che negli acquatici. Ora se ci facciamo a considerare i risultati delle recenti esplorazioni sottomarine, troviamo che nei crostacei de' grandi fondi non è raro un colore rosso molto intenso e che fra gli echinodermi e polipai tratti su da profondità maggiori di 2000 metri unitamente a dei frammenti delle rocce a cui erano stabilmente fissati, presentarono colori non meno vivi di quelli che si ammirano nei loro congeneri che vivono a piccole profondità. Ciò fu pure osservato in alcune attinie e pentacrini, il cui splendido colore verde d'erba era del tutto simile al colore delle attinie che abitano lungo le coste del Mediterraneo. È vero che siffatta ricchezza di colorito non è molto frequente negli abitanti de' grandi fondi, segnatamente nei pesci che in generale sono neri o al più screziati di bianco. Ma ciò potrebbe anche attribuirsi al costume di tali pesci di rimanere per lo più sepolti nella melma. Una prova di tale costume l'abbiamo dal fatto che quei pesci si sono quasi sempre trovati col corpo più o meno incrostato da parti fangose tenacemente aderenti alla cute. Ma qua-

lunque sia la causa di questa mancanza di colorito in molti animali de'grandi fondi, se da una parte tale mancanza è favorevole all'opinione che in quelle profondità le azioni chimiche si compiano indipendentemente dall'influsso della luce, dall'altra parte poi si trova grande difficoltà nell'ammettere che nella stessa classe di animali, come nei crinoidi e nelle attinie, la medesima vivezza e qualità di colorito si produca tanto sotto l'influsso della luce solare, che senza l'intervento di alcuna sorgente luminosa capace di azione chimica.

Questa difficoltà cresce di molto se dalla fauna de'grandi fondi passiamo a considerarne la flora; per la ragione che attese le molteplici sperienze colle quali i naturalisti da Ray, Bonnet, T. de Saussurre, ecc., fino ai nostri giorni (1) hanno dimostrata la genesi della clorofilla, non possiamo più dubitare che la perfetta nutrizione delle piante non ha mai luogo senza il concorso di radiazioni atte ad agire chimicamente. Il dubbio solo può nascere intorno al supposto, voglio dire se in realtà esista una flora de'grandi fondi. I moderni esploratori degli abissi oceanici (2) sembrano disposti ad ammettere che al di là di 150 metri sotto la superficie del mare non vivano esseri vegetali, ma solo animali; ed è così che danno ragione dei caratteri di carnivori osservati nei pesci che abitano le maggiori profondità. Questo limite di 150^{m} assegnato alla flora sottomarina non è ammesso da tutti i geologi (3), nè si può ritenere come dato dalla sperienza che per le piante di dimensioni ordinarie, le quali non sembra che finora si sieno trovate a profondità molto grandi. E d'altronde non è molto probabile che sotto l'enorme pressione di più centinaia d'atmosfere possano crescere delle piante fino ad acquistare le ordinarie dimensioni, mentre vediamo che i pesci, i crostacei e tutti gli animali che abitano costantemente gli abissi sottomarini sono sempre molto più piccoli dei loro simili che vivono presso la superficie delle acque (4). Se poi si tratti di pianticelle piccolissime può

---

(1) V. Becquerel. — *La lumière.* — T. 2. p. 266.

(2) V. H. Filhol. — *Voyage du Talisman.* — *La Nature.* — An. 1884 premier Sem. p. 183.

(3) Altri geologi assegnano alla flora sottomarina dei limiti assai più estesi « Tandis que certaines hydrophytes se trouvent chaque jour couvertes et découvertes alternativement par la » marée, d'autres vivent dans les abîmes de l'océan à la profondeur énorme de plus de 300^{m} ». C. » Lyell. — Principes de Géologie 4e par. p. 141.

(4) Gli effetti di compressione e ristringimento prodotti dal peso dell'acqua soprastante ai grandi fondi si può argomentare da quei dischi di sughero che fecero parte dello scandaglio a rete nelle esplorazioni del Talisman e tuttora si conservano nel Museo di Storia naturale a Parigi. Questi dischi dopo alcuni giorni di uso sotto la pressione dell'acqua si erano già ridotti alla metà del loro volume primitivo ed avevano acquista la consistenza del legno.

bene essere avvenuto che queste sieno sfuggite alla osservazione o per la loro estrema piccolezza o perchè nell'atto che furono svelte dalla draga e durante l'ascensione rimasero frantumate e scontrafatte per modo da non potersene facilmente accertare la presenza. A conferma di ciò abbiamo l'autorità del ch. nostro collega ed illustre micrografo il Conte F. Castracane, il quale fu già d'opinione (1) ed ora l'ha dimostrato con alcune prove di fatto che le diatomee, cioè quelle alghe microscopiche che tanto abondano alla superficie delle acque salse e delle dolci, vivono anche in fondo ai mari. Di cinque diversi scandagli fatti dal Travailleur nel fondo del Mediterraneo Egli ha potuto accertarsi che tre erano assolutamente ricchi di diatomee e che anche gli altri due non ne erano del tutto privi. Se dunque le diatomee vegetano in realtà e si propagano nelle abissali profondità dei mari, i limiti assegnati alla flora sottomarina non hanno più luogo e la presenza nei grandi fondi di qualche sorgente di azione actino-chimica sembra indispensabile.

Ma è poi certo che in fondo ai mari non penetri mai filo di luce diurna e che le radiazioni solari non valgano ad esercitarvi azione chimica di sorta? Le prove che si sogliono arrecare a favore della totale mancanza di luce solare nel fondo dei mari sono tratte in parte dal potere assorbente dell'acqua e dalla invisibilità degli oggetti in essa profondamente immersi, ed in parte dalle anomalie osservate negli animali che vivono di continuo in quei profondi recessi.

Sul potere assorbente dell'acqua non si hanno prove decisive, che dimostrino nelle grandi profondità l'assorbimento essere completo per ogni specie di raggi contenuti nelle radiazioni solari. Si sa però che quando si fa passare un fascetto di luce solare attraverso uno strato d'acqua la cui spessezza vada progressivamente crescendo, il colore della luce da prima bianco, a poco a poco volge al giallo, quindi al ranciato e finalmente al rosso. Ma nel tempo stesso che la quantità della luce trasmessa va scemando,

(1) V. *Atti della Pont. Accad. de'N. Lincei.* — A. XXXVI, p. 195. ed A. XXXVII, p. 143. Più tardi cioè nella Sessione I[a] dell'anno XXXVIII il medesimo ch. diatomologo annunziò all'Accademia che essendosi Egli procurato dalla Commissione del Challenger il contenuto di sei oloturie pescate fra 2511 e 5274 metri di profondità, vi scoprì un gran numero di esilissime diatomee, alcune delle quali conservavano ancora il protoplasma colorato in giallo dall'endocroma. D'onde conchiuse che quelle diatomee erano state ingoiate dalle oloturie non in condizione fossile o semifossile, ma nello stato di attuale vegetazione epperò che avevano vegetato in fondo al mare; non si potendo ammettere che corpicciuoli tanto esili, cioè di solo qualche centesimo di millimetro in larghezza sopra tre o quattro millimetri di lunghezza, abbandonati dalla vita possano scendere a tali profondità in così breve tempo da conservare il protoplasma e l'endocroma.

l'acqua che non è direttamente attraversata dal fascetto diventa luminosa diffondendo nello spazio circostante una luce azzurra o verdognola, cioè complementaria della luce trasmessa. Quindi si vede che la luce penetrata nell'acqua e non trasmessa, solo in parte cessa di esistere come luce, un'altra parte non piccola si diffonde per la massa liquida e la illumina. Ed è appunto per questa diffusione interna che il colore dell'acqua marina apparisce tanto più azzurro quanto è maggiore la profondità. Ma prescindendo dalla diffusione interna, che non possiamo dire fin dove si estenda, e solo considerando la luce trasmessa, sebbene questa vada sempre diminuendo per tutte le profondità sperimentate, pure non è provato che tale diminuzione si estenda ad ogni specie di raggi luminosi. L'analogia di ciò che accade col calorico oscuro induce piuttosto a credere il contrario. Sono note le sperienze colle quali Delaroche, Melloni ed altri fisici mostrarono che nei corpi diafani l'assorbimento del calorico per lo più non cresce proporzionalmente allo spessore del corpo assorbente, ma v'ha de'raggi oscuri pei quali certi corpi sono perfettamente diatermici. È dunque assai verisimile che ciò valga eziandio pei raggi luminosi e che ve ne abbia di quelli pei quali l'acqua sia perfettamente diafana. E sebbene tali raggi possano essere deboli a segno da non agire sull'organo della vista, non ne segue che sieno affatto privi di azione chimica. Fra l'impressione della luce sull'occhio e le azioni chimiche prodotte dalla luce passa una differenza molto considerevole. Sull'occhio l'impressione della luce dura un tempo brevissimo, onde i singoli impulsi che esso riceve per l'azione continuata di un raggio luminoso non si sommano assieme, di maniera che una luce incapace di produrre la sensazione della vista, continuando ad agire per molto tempo arrivi poi finalmente a destare quella sensazione. Non è così delle azioni chimiche, le quali in realtà non essendo altro che semplici azioni meccaniche, possono accumularsi e conservarsi nei loro effetti, a quel modo che un urto, sia pure debolissimo, se venga ripetuto un gran numero di volte produce lo stesso effetto di un urto più energico e di meno lunga durata.

L'ipotesi che l'acqua sotto qualunque profondità sia perfettamente diafana rispetto ad alcuni raggi sembrerà in contradizione col rapido indebolimento che soffre la luce crescendo la spessezza dello strato d'acqua che attraversa. Tale contradizione svanisce se si osserva che l'assorbimento della luce è un fenomeno complesso, dovuto in parte alle molecole pesanti ed in parte all'etere misto alle molecole medesime. Per l'acqua questa doppia origine di assorbimento ci è pure indicata dal fatto che il suo potere assorbente

per i raggi luminosi si esercita di preferenza sui più rifrangibili, mentre poi il suo potere assorbente per i raggi oscuri di minima rifrangibilità supera di tanto quello della luce, che fra tutti i corpi diafani l'acqua è uno dei più adiatermici che si conoscano. Quando dunque vediamo che la luce di qualunque rifrangibilità essa sia passando per l'acqua rapidamente s'indebolisce, possiamo solo inferirne che per l'acqua delle due cause di assorbimento almeno una, probabilmente la prima, è assoluta cioè si estende ad ogni specie di raggi luminosi. Quanto all'altra essa potrebbe non estendersi che ad alcune di quelle specie o anche a tutte tranne una sola. Sicchè a conchiudere che l'azione dell'acqua sulla luce giunge fino al totale assorbimento, non basta l'aver provato il progressivo indebolirsi della luce col crescere la spessezza dell'acqua, ma bisogna anche provare che arriva finalmente un punto in cui ogni specie di raggi luminosi rimane estinta; cosa che attesa la poca intensità che possono avere i raggi trasmessi non potrebbe accertarsi mediante l'organo della vista. E se al detto fin qui si aggiunga che le radiazioni solari oltre i raggi luminosi e calorifici oscuri ne contengono molti altri, i quali sebbene incapaci di destare in noi la sensazione della luce, qualunque sia la loro intensità, pure agiscono chimicamente (1) e sono in parte trasmessi dall'acqua, con più ragione potremo conchiudere che le sperienze fatte fin ora sul potere assorbente dell'acqua non valgono a dimostrare che le radiazioni solari non possano produrre alcun effetto chimico nelle grandi profondità sottomarine (2).

(1) Sulla efficacia dei raggi ultra violacei a promuovere la vegetazione furono fatte molte sperienze da M. Guillemin ed il risultato fu che sotto l'azione di quei raggi la colorazione e nutrizione delle piante si opera ugualmente bene che in presenza de'raggi luminosi; solo il tempo a ciò richiesto è maggiore con quelli che con questi. *V. Ann. des Sciences naturelles 4. série partie botanique.*

(2) La presente nota era già consegnata per la stampa quando ebbi notizia che i Signori Fol e Serrazin di Ginevra avevano presentato all'Accademia delle Scienze di Parigi (V. *Comptes Rendus du* 13 *Avril* 1885) i risultati dei loro studi sulla trasparenza dell'acqua marina. Questi studi furono fatti nella rada di Villefranche a bordo dell'*Albatros* calando a delle profondità sempre crescenti un apparato che portava delle lamine rese sensibili alla luce mediante l'albumina bromurata. Il tempo dell'esposizione alla luce filtrata attraverso l'acqua fu sempre di 10′ e la conclusione a cui pervennero è che al di là di 400 metri alcun raggio capace di azione chimica non penetra nell'acqua del mare. Ma da siffatti sperimenti non mi sembra che si possa trarre una conclusione generale per ogni sorta di raggi e di sostanze impressionabili alle radiazioni solari. Sappiamo infatti che i diversi corpi non sono sensibili alla luce dentro gli stessi limiti di rifrangibilità e che certi raggi capaci di agire chimicamente sui corpi viventi, non hanno azione o l'hanno diversa sui composti inorganici ed anche sugli organici dopo sottratti all'azione della vita. Lo stesso bromuro d'argento che tanto prontamente viene alterato dai raggi più rifrangibili, rimane insensibile ai raggi gialli, ranciati e rossi, che sono appunto i più facilmente trasmessi dall'acqua e i più efficaci a promuovere la formazione della clorofilla, e la nutrizione delle piante.

Anche meno concludenti sono le sperienze fatte sulla invisibilità dei corpi profondamente immersi nel mare. La vista di tali corpi ci può essere tolta da varie cause indipendenti dalla luce da cui sono illuminati. Primieramente bisogna tener conto della luce riflessa e diffusa dalla superficie dell'acqua e dai corpi circostanti, la quale quando sia abbastanza intensa confonde e toglie la percezione dei corpi immersi. A tale inconveniente si ovvia in parte facendo uso dello *Scopeloscopio* proposto da Arago, affine di rendere visibili gli scogli nascosti sott'acqua. Questo apparato consiste in un cannocchiale munito di un polariscopio che convenientemente orientato estingue la luce polarizzata nel primo azimut. Ma sebbene con tale artifizio si arrivi talvolta a scoprire sott'acqua degli oggetti che altrimenti passerebbero inosservati, contuttociò rimanendo sempre accessibile all'occhio la luce non polarizzata per riflessione e quella che viene diffusa dalla superficie dell'acqua e degli strati sottostanti arriva presto il punto in cui l'intensità di queste luci supera notabilmente quella emanata dal corpo immerso; il quale diventa invisibile non perchè cessi di essere illuminato, ma perchè sotto una impressione assai forte l'occhio è insensibile alle più deboli. Oltre di che la visibilità dei corpi illuminati non dipende solo dalla luce che ricevono, ma eziandio dal loro potere riflettente e diffusivo. I corpi che riflettono molto la luce o molta ne assorbono senza diffonderla, poco o nulla si vedono ancorchè sieno fortemente illuminati. Lo stesso avviene degli oggetti che hanno il medesimo colore de' corpi circostanti o del fondo su cui riposano Nel caso poi dei corpi immersi si deve anche aver riguardo alla purezza e tranquillità del liquido. In alcuni laghi d'acqua limpida e tranquilla si distinguono gli oggetti immersi anche a notabile profondità, senza bisogno di alcun artifizio che ripari l'occhio dalla luce emanata e riflessa dagli altri corpi. Più facilmente ciò accade nelle acque del mare che sogliono essere più trasparenti delle acque dolci. Presso le Antille ove il fondo del mare è gremito di conchiglie, di brecce e d'altri corpi eminentemente atti a diffondere la luce, quando l'acqua è tranquilla se ne vede il fondo fino a 150 metri di profondità, e nel mare polare del Nord presso Novaya alcuni

---

Ma la clorofilla, che nei vegetali viventi non si forma senza il concorso della luce, dopo estratta fuori dei tessuti che la contenevano si scolora per l'azione della luce stessa.

Trattandosi medesima poi di radiazioni molto affievolite dall'assorbimento l'esposizione di soli 10' non basta perchè dalla mancanza di effetto chimico se ne possa legittimamente inferire la totale assenza di raggi capaci d'azione chimica. In tali circostanze l'effetto chimico delle radiazioni non si manifesta che dopo un tempo assai lungo, ed anche allora è limitato a sole alcune specie di composti, cioè a quelli che sono sensibili ai raggi sfuggiti all'assorbimento.

naviganti hanno continuato a vederne il fondo quando lo scandaglio accusava 220 metri di profondità. Ciò importa che la luce dopo avere attraversato 440 metri d'acqua di mare conservi ancora intensità sufficiente per agire sul nostro organo della vista, non ostante la luce che questo riceve da altri corpi meglio illuminati. Quindi si vede quanto sia incerto il limite a cui possono giungere nel mare le radiazioni solari; tanto più che nei mari la trasparenza sembra dovere aumentare colla profondità. Ciò si deduce dal fatto che l'acqua fredda è più trasparente dell'acqua calda e presso il fondo del mare la temperatura è sempre più bassa che in vicinanza della superficie (1). Anche la pressione degli strati soprastanti cospirando col raffreddamento nel ravvicinare le molecole, deve facilitare la trasmissione della luce attraverso l'acqua ed i gas che abondantemente vi sono sciolti (2). Riguardo ai gas pare confermato dalla sperienza che la loro presenza faccia crescere la trasparenza dell'acqua. Certo che l'idrogeno sotto molto forti pressioni acquista la facoltà di concepire e trasmettere le vibrazioni d'ogni periodo, per modo che le righe del suo spettro col crescere la pressione si vanno sempre più dilatando finchè lo spettro diviene tutto continuo e più luminoso.

Alla grande pressione che domina in fondo ai mari si può anche attribuire che gli animali ivi dimoranti hanno l'involucro esterno tanto sottile che alcuni crostacei del gruppo degli *erinoidi* si trovarono trasparenti per modo da vedersene lo stomaco e gli altri visceri, come se questi fossero racchiusi in vasi di cristallo (3).

Le anomalie osservate negli animali che vivono nelle grandi profondità sottomarine, e si considerano come grandemente favorevoli all'opinione che in quei recessi mai non penetri raggio di luce diurna, sono quelle che risguardano l'organo della vista e la colorazione della pelle. Quanto a questa colorazione già dicemmo di sopra che sebbene negli animali de' grandi fondi i belli colori che ammiriamo in molti che vivono presso la superficie sieno spesso surrogati dal nero, dal bianco o da una tinta rosea molto languida,

(1) M. Milne Edwards nel golfo di Guascogna dai 2590 ai 5100 metri di profondità trova costantemente la temperatura + 3°,5. Ed è questa una delle più elevate che siasi osservata in simili profondità. Generalmente sul fondo dell'Oceano si trova la temperatura 0° nelle basse latitudini e nelle alte — 1°,5 ovvero — 2° e anche — 3°.

(2) La quantità di gas sciolto nelle acque de'grandi fondi è tale che delle robuste bottiglie empite d'acqua nel fondo del mare durante la campagna del Talisman, nell'atto che venivano stappate a contatto dell'aria producevano de'getti d'acqua molto più impetuosi di quelli che danno le bottiglie di acqua di Seltz.

(3) *La Nature*, 1884, prem. sem. p. 231.

non siamo perciò necessitati ad ammettere che in quelle profondità non giunga mai raggio di sole; potendo bene accadere che siffatti animali durante il giorno si tengano sepolti nel fango o in nascondigli inaccessibili alla luce, oppure che in essi per lo sviluppo della materia colorante sia necessario il concorso di altre circostanze di temperatura, pressione ecc., diverse da quelle che regnano nelle grandi profondità sottomarine. Altrettanto a un dipresso si può dire intorno all'altro fatto, cioè che negli animali de' grandi fondi l'organo visivo si trova spesso in uno stato embrionale o anche del tutto atrofizzato. Possono cioè questi animali essere portati dal loro istinto a passare quasi tutta la loro vita nei cavi degli scogli, a quel modo che p. e. la talpa ed il proteo anguino vivono nei cunicoli o nelle acque delle grotte sotterranee, epperò hanno gli occhi pochissimo sviluppati e coperti dalla pelle per modo che appena potrebbero loro servire a distinguere il giorno dalla notte. Ma ciò che più fa pel caso nostro è che se da una parte non pochi degli animali de'grandi fondi sono ciechi e scoloriti, dall'altra ve n'ha pure parecchi adorni di vivacissimi colori e forniti di buoni occhi. Anzi si è osservato che in uno stesso genere di crostacei alcune specie che abitano in fondo al mare sono provviste di occhi perfettamente sviluppati, mentre altre che vivono a non molto grandi profondità ne sono prive. Così p. e. *l'ethusa granulata* che si pesca nei mari del Nord fra 200 e 1300 metri di profondità è cieca, laddove non lo era *l'ethusa alba* catturata nell'Oceano dagli esploratori del Talisman a 5000 metri di profondità; come non lo erano il *malacosteus niger* e lo *stomias boa* pescati a 1500 e 1900 metri di profondità. (1)

Si è però notato che mentre nei pesci i quali vivono a diverse ma non molto grandi profondità, le dimensioni dell'organo visivo vanno crescendo a misura che cresce la profondità; al contrario nei pesci che abitano i grandi fondi e sono provvisti di occhi, questi per lo più nulla presentano di speciale nella struttura e sono del tutto simili a quelli dei pesci che non mai si allontanano molto dalla superficie dell'acqua. Questo fatto però non è generale; ma come fra gli abitanti degli abissi sottomarini alcuni sono ciechi, così altri hanno occhi molto grandi ed in quelli che gli hanno più piccoli, come il *bathypterois longipes* che neppure è fosforescente, le minori dimensioni dell'organo visivo possono essere vantaggiosamente com-

---

(1) Quanto ai crostacei M. Filhol nella sua relazione dice che « chez les animaux de cette » classe la disparition de ces organes est un fait assez rare. La plupart des espèces, même cel- » les recueillies par 5000 mètres, possèdent des yeux bien développés ». V. *La Nature*, 12 sept. 1885.

pensate da una più squisita sensibilità della retina. Del resto che i pesci de' grandi fondi sieno provvisti di occhi normali, piuttosto che alla presenza o mancanza di luce diurna in quelle profondità, sarebbe favorevole all'opinione di coloro i quali credono che sul fondo dei mari le radiazioni solari vengano surrogate dalla fosforescenza, tanto comune negli animali marini. Ma già si disse di sopra che se la luce fosforica può fare le veci della solare quanto ai fenomeni della visione, non è così quanto alle azioni chimiche, in ordine alle quali le emanazioni fosforiche neppure possono equivalere a quelle radiazioni solari, che per difetto d'intensità o eccesso di rifrangibilità non sono atte ad agire efficacemente sull'organo della vista.

Molte altre cose si potrebbero dire su questo interessante argomento; io non aggiungo altro perchè il mio scopo era solamente di mostrare che i risultati delle antiche e recenti osservazioni e sperienze non sono tali che se ne possa con certezza inferire, nelle grandi profondità sottomarine la vita essere del tutto indipendente dell'azione *actino-chimica* del Sole. Se le indagini con tanto zelo e perseveranza intraprese dei naturalisti confermeranno il completo sviluppo e vegetazione delle diatomee in fondo ai mari; allora si potrà dire non solo possibile, ma molto probabile che anche laggiù penetrino in qualche modo le radiazioni solari.

SOLUTION DES DEUX ÉQUATIONS

$$13x^4 - 11y^4 = 2z^2, \quad 8x^4 - 3y^4 = 5z^2,$$

PAR LE P. TH.[LE] PEPIN

1. La solution complète d'une équation indéterminée, comprise dans la formule $ax^4 + by^4 = cz^2$ exige en général une discussion d'autant plus compliquée que les nombres a, b, c sont plus grands. Les deux équations que nous allons résoudre font exception à cette règle; celle dont les coefficients ont la moindre valeur, présente une difficulté bien plus grande que l'autre; on ne peut la résoudre qu'au moyen de transformations dont le succès n'est pas facile à prévoir. L'autre au contraire se résout d'une manière complète au moyen de deux systèmes de formules, auxquelles on parvient par une discussion obvie.

Comme les équations proposées ne changent pas de forme lorsqu'on les divise par le plus grand commun diviseur des deux bicarrés x^4, y^4, nous supposons immédiatement que les deux nombres x, y n'ont pas de diviseur commun.

Il résulte de là que les trois nombres x, y, z sont premiers entre eux, deux à deux.

I. *Solution de l'équation* $13x^4 - 11y^4 = 2z^2$.

2. L'équation proposée peut s'écrire de la manière suivante

$$13\,(x^4 - y^4) = 2\,(z^2 - y^4),$$

et elle se ramène au système des deux équations

$$\frac{13\,(x^2 + y^2)}{z + y^2} = \frac{p}{q}, \quad \frac{x^2 - y^2}{z - y^2} = \frac{2q}{p},$$

$$(1) \qquad px^2 + (2q - p)y^2 - 2qz = 0, \quad 13qx^2 + (13q - p)y^2 - pz = 0,$$

où l'on désigne par p, q deux nombres entiers et premiers entre eux. Ces deux équations sont résolues par les formules

$$\frac{x^2}{p^2 - 4pq + 26q^2} = \frac{y^2}{p^2 - 26q^2} = \frac{-z}{p^2 - 26pq + 26q^2},$$

$$\left\{\begin{array}{ll}(a) & \mu x^2 = p^2 - 4pq + 26q^2 = (p-2q)^2 + 22q^2 \\ (b) & \mu y^2 = p^2 - 26q^2, \\ (c) & -\mu z = p^2 - 26pq + 26q^2,\end{array}\right.$$

dans lesquelles on désigne par μ le plus grand diviseur commun des seconds membres. L'équation (a) exige que μ soit positif, premier avec q et non divisible par 4. D'ailleurs, on déduit des trois congruences

$$p^2 - 4pp + 26q^2 \equiv 0, \; p^2 - 26\, q^2 \equiv 0; \; p^2 - 26pq + 36q^2 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

que μ doit être diviseur du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 13 \\ 1, & 0, & -13 \\ 1, & 13, & 13 \end{vmatrix} = 2.\ 11.\ 13\,;$$

par conséquent le nombre μ ne peut avoir que les huit valeurs 1, 11, 13, 143, 2, 22, 26 et 286. Or les valeurs paires de μ sont immédiatement exclues de la manière suivante. Si μ est pair, on déduit des équations (a) et (b) que p est pair et q impair. D'ailleurs en combinant par soustraction ces deux équations, on trouve la formule

$$\mu\,(x^2 - y^2) = 4q\,(13q - p),$$

dont le premier membre est multiple de 16, puisque μ est de la forme $4l + 2$, et que le produit $\mu\,(x^2 - y^2)$ doit être divisible par 4; le second membre au contraire est de la forme $8l + 4$, parce que p est pair, tandis que q est impair. Les deux valeurs 11 et 13 sont aussi exclues par les équations (a) et (b) qui exigent que μ soit résidu quadratique de chacun des deux nombres 11 et 13. Il ne reste ainsi pour μ que les deux valeurs 1 et 143.

3. Or les solutions (x, y) de l'équation proposée, qui correspondent à la valeur $\mu = 143$, sont les mêmes qui correspondent à la valeur $\mu = 1$. Soit en effet $\mu = 143$. L'équation (a) exige que $p - 2q$ soit divisible par 11 ; posons donc $p - 2q = 11p_1$; les formules (a), (b) deviennent

$$13x^2 = 11p_1^2 + 2q^2, \; 13y^2 = 13p_1^2 - 2\,(p_1 - q)^2.$$

Comme $(p_1 - q)$ doit être multiple de 13, nous prenons $q = p_1 - 23q_1$ et nos deux formules se ramènent aux suivantes

$$x^2 = p_1^2 - 4p_1q_1 + 26q_1^2, \quad y^2 = p_1^2 - 26q_1^2.$$

Le système de ces deux équations est identiquement le même que celui qu'on déduit immédiatement des formules (a) et (b) en y faisant $\mu = 1$. Par conséquent toutes les valeurs de x et de y propres à vérifier l'équation proposée peuvent se déduire du système unique

$$(3) \qquad x^2 = (p - 2q)^2 + 22q^2, \quad y^2 = p^2 - 26q^2.$$

Dans ces deux équations p, x et y sont impairs; de plus les deux nombres $+26$ et -26 étant résidus quadratiques de p, tous les diviseurs de ce dernier nombre doivent être de la forme $4l + 1$. Enfin l'équation

$$p^2 - y^2 = 26q^2$$

exige que le nombre q soit pair, de sorte qu'elle se décompose de la manière suivante:

$$q = 2mn, \quad p \pm y = 2m^2 \text{ ou } 26m^2, \quad p \mp y = 52n^2 \text{ ou } 4n^2,$$

$$1^\circ \quad p = m^2 + 26n^2, \quad \pm y = m^2 - 26n^2,$$

$$2^\circ \quad p = 13m^2 + 2n^2, \quad \pm y = 13m^2 - 2n^2.$$

Comme p est de la forme $4l + 1$, le nombre n doit être pair.

De son côté, la première des équations (3) se décompose au moyen des formules suivantes :

$$q = 2fg, \quad x \pm (p - 4fg) = 2f^2,\ 22f^2, \quad x \mp (p - 4fg) = 44g^2,\ 4g^2,$$

$$1^\circ \quad x = f^2 + 22g^2, \quad \pm p = f^2 + 4fg - 22g^2,$$

$$2^\circ \quad x = 11f^2 + 2g^2, \quad \pm p = 11f^2 + 4fg - 2g^2.$$

Le nombre n étant pair, on déduit de l'égalité $fg = mn$ que g doit être aussi pair, ce qui exclut le signe inférieur dans la première expression de p et le signe supérieur dans la seconde. En égalant ces expressions de p aux deux précédentes, on obtient quatre combinaisons

$$f^2 + 4fg - 22g^2 = m^2 + 26n^2 \text{ ou } 13m^2 + 2n^2,$$

$$-11f^2 + 4fg + 2g^2 = m^2 + 26n^2 \text{ ou } 13m^2 + 2n^2.$$

On doit exclure la deuxième combinaison et la troisième, parce que, en vertu des identités

$$f^2 + 4fg - 22g^2 = (f + 2g)^2 - 26g^2, \quad -11f^2 + 4fg + 2g^2 = -13f^2 + 2(f+g)^2,$$

on en déduirait que 2 est résidu quadratique de 13, ce qui n'est pas. Il ne reste ainsi que les deux combinaisons

$$\text{(A)} \qquad fg = mn, \quad f^2 + 4fg - 22g^2 = m^2 + 26n^2,$$

$$x = f^2 + 22g^2, \quad \pm y = m^2 - 26n^2;$$

$$\text{(B)} \qquad fg = mn, \quad -11f^2 + 4fg + 2g^2 = 13m^2 + 2n^2,$$

$$x = 11f^2 + 2g^2, \quad \pm y = 13m^2 - 2n^2.$$

4. Toutes les valeurs de x et de y propres à vérifier les équations (3) sont renfermées dans les deux systèmes (A) et (B). L'équation $fg = mn$, qui fait partie des deux systèmes, est complètement résolue par les formules

$$m = \lambda\mu, \quad n = hk, \quad f = \lambda h, \quad g = \mu k$$

où l'on désigne par λ, μ, h, k des nombres entiers, premiers entre eux deux à deux. Comme les deux nombres f, m sont impairs, tandis que g et n sont pairs, λ, μ et h sont impairs et k, pair. En substituant ces expressions dans le système (A), on trouve

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} x = \lambda^2 h^2 + 22\mu^2 k^2, \quad \pm y = \lambda^2\mu^2 - 26h^2k^2, \\ k^2(26h^2 + 22\mu^2) - 4\lambda\mu hk + \lambda^2(\mu^2 - h^2) = 0. \end{array} \right.$$

La même substitution remplace les formules (B) par les suivantes :

$$(5) \quad \left| \begin{array}{l} x = 11\lambda^2 h^2 + 2\mu^2 k^2, \quad \pm y = 13\lambda^2\mu^2 - 2h^2k^2, \\ \lambda^2(13\mu^2 + 11h^2) - 4\lambda\mu hk + 2k^2(h^2 - \mu^2) = 0. \end{array} \right.$$

Le nombre k étant pair, x est de la forme $8l + 1$ dans les formules (4) et de la forme $8l + 3$ dans les formules (5). En résolvant la dernière équation du système (4) par rapport au quotient $k : \lambda$, et la dernière équation du système (5) par rapport au quotient inverse $\lambda : k$, on reconnaît que les deux nombres μ, h satisfont à l'équation proposée, de sorte que la solution considérée (x, y) se trouve exprimée au moyen d'une autre solution en nombres moindres. Il n'y a d'exception que pour la solution irréductible (1, 1, 1); car si l'on suppose $x = 1$, on doit faire $k = 0$, $h = \lambda = \mu = 1$.

5. Il nous reste à démontrer que les formules (4) et (5) donnent une solution complète de l'équation proposée, c'est-à-dire qu'elles permettent d'obtenir avec certitude toutes les solutions formées de nombres inférieurs à une limite donnée.

D'abord la dernière des équations (5) donne

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{2\mu h \pm \sqrt{2(13\mu^4 - 11h^4)}}{13\mu^2 + 11h^2}, \quad \frac{\mu}{h} = \frac{2\lambda k \pm \sqrt{4k^4 - 143\lambda^4}}{13\lambda^2 - 2k^2},$$

et comme ces quotients sont rationnels, il faut que l'on ait

$$13\mu^4 - 11h^4 = 2r^2, \quad 4k^4 - 143\lambda^4 = \rho^2,$$

r et ρ désignant deux nombres entiers. On voit par la première de ces deux équations que les valeurs $x = \mu$, $y = h$ satisfont à l'équation proposée, comme nous l'avons annoncé ci-dessus.

De même on déduit de la dernière des équations (4)

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{2\mu h \pm \sqrt{2(13h^4 - 11\mu^4)}}{2(13h^2 + 11\mu^2)}, \quad \frac{h}{\mu} = \frac{2\lambda k \pm \sqrt{\lambda^4 - 572k^4}}{26k^2 - \lambda^2};$$

on conclut de là, comme précédemment, que les nombres h, μ, λ, k satisfont respectivement aux deux équations

$$13h^4 - 11\mu^4 = 2r^2, \quad \lambda^4 - 572k^4 = \rho^2,$$

dans lesquelles r et ρ désignent deux nombres entiers.

6. Ainsi toute solution (x, y) de l'équation proposée, pourvu que le nombre x soit supérieur à 1, s'exprime au moyen d'une solution en nombres moindres de la même équation, par l'un des deux systèmes suivants:

$$\text{I.} \quad \left| \begin{array}{l} x = \lambda^2 h^2 + 22\mu^2 k^2, \quad \pm y = \lambda^2\mu^2 - 26h^2k^2, \\ 13h^4 - 11\mu^4 = 2r^2, \quad \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{\mu h \pm r}{13h^2 + 11\mu^2}; \end{array} \right.$$

$$\text{II.} \quad \left| \begin{array}{l} x = 11\lambda^2 h^2 + 2\mu^2 k^2, \quad \pm y = 13\lambda^2\mu^2 - 2h^2k^2, \\ 13\mu^4 - 11h^4 = 2r^2, \quad \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{\mu h \pm r}{h^2 - \mu^2}. \end{array} \right.$$

Le nombre k étant pair, le nombre x est de la forme $8l + 1$, dans le

système I, et de la forme $8l+3$, dans le système II; de plus l'ambiguité du signe disparaît dans les deux expressions du rapport $k:\lambda$; car le dénominateur étant multiple de 8, on doit prendre au numérateur celui des deux signes qui satisfait à la congruence $h\mu \pm r \equiv 0$ (mod. 4). Il est même nécessaire de démontrer qu'en déterminant le signe de cette manière, on obtient pour $k:\lambda$ une fraction irréductible dont le numérateur est pair. En effet, en vertu de la formule $2r^2 = 13h^4 - 11\mu^4$, on a dans le système I :

$$(\mu^2 - h^2)(13h^2 + 11\mu^2) = 2(h^2\mu^2 - r^2),$$

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{h\mu \pm r}{13h^2 + 11\mu^2} = \frac{\mu^2 - h^2}{2(h\mu \mp r)}.$$

Or si l'on a $h\mu \pm r \equiv 0$ (mod. 4), le signe opposé donne pour $h\mu \mp r$ une valeur de la forme $4l+2$, de sorte que le dénominateur $2(h\mu \pm r)$ est de la forme $8l+4$, tandis que le numérateur $\mu^2 - h^2$ est multiple de 8. La fraction irréductible $k:\lambda$ à laquelle se réduit le quotient $(h\mu \pm r)$: $(13h^2 + 11\mu^2)$ a donc un numérateur pair. Une démonstration toute semblable s'applique au système II.

7. En employant les formules précédentes dans un ordre inverse, on déduit d'une solution quelconque de l'équation proposée, deux autres solutions en nombres plus grands, savoir une au moyen de chacun des systèmes I et II. Il faut excepter pourtant la solution irréductible (1, 1, 1), qui ne donne qu'une seule solution nouvelle, parce que le système I reproduit la même solution $x=1$, $y=1$. En faisant $x=1$, $y=1$, on obtient pour le rapport $k:\lambda$ une expression indéterminée $\frac{0}{0}$; mais en recourant à la dernière des formules (5), on trouve $\frac{\lambda}{k} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. Les deux autres formules donnent ensuite $x = 83$, $y = 59$. Cette solution en fournit deux autres, chacune de celles-ci deux autres, et ainsi de suite. Si l'on a soin de ranger les solutions obtenues, suivant l'ordre croissant des valeurs de x, et de les employer dans le même ordre au moyen des formules I et II, on est assuré d'obtenir toutes les solutions dans lesquelles la valeur de x ne surpasse pas le carré de la valeur que présente cette indéterminée, x, dans la première des solutions non employées. On peut par conséquent déterminer toutes les solutions formées de nombres inférieurs à une limite donnée, avec la certitude de n'en laisser échapper aucune.

Soit, en effet, (x, y, z) une solution de l'équation proposée. Si la valeur de x est supérieure à l'unité, cette solution se ramène à une autre solution de la même équation en nombres moindres (h, μ, r) ou (μ, h, r), par l'un des deux systèmes I, II, suivant la forme du nombre x relativement au module 8. Si cette nouvelle solution est elle-même formée de nombres supérieurs à l'unité, elle se ramène de même à une autre solution en nombres moindres, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on parvienne à la solution irréductible (1, 1, 1). Comme, dans cette suite de solutions, les valeurs de x décroissent rapidement, puisque chacune d'elle est inférieure à la racine carrée de la précédente, on ne saurait manquer d'arriver promptement à la solution (1, 1, 1). Ainsi à partir d'une solution quelconque (x, y, z) de l'équation proposée on peut former une suite de solutions décroissantes, se terminant par la solution irréductible (1, 1, 1) et dans laquelle chaque terme s'exprime au moyen du terme suivant par l'un des systèmes I ou II. L'avant dernier terme de cette suite est toujours la solution (83, 59, 15 551), puisque cette solution est la seule qui se déduise immédiatement de la solution (1, 1, 1).

8. Soit

$$\text{(S)} \qquad (1, 1, 1),\ (83, 59, 15551),\ (x_1, y_1, z_1), \ldots .\ (x_n, y_n, z_n),\ (x, y, z)$$

cette suite écrite dans un ordre inverse. On peut obtenir successivement tous les termes de cette suite, et par conséquent la solution considérée (x, y, z). Pour cela on calcule au moyen des formules I et II, les deux solutions qui se déduisent de la solution (83, 59, 15551), l'une de ces deux solutions est nécessairement le troisième terme, (x_1, y_1, z_1), de la suite (S); si donc l'on déduit de chacune d'elles les deux solutions qui en dépendent en vertu des formules I et II, on est assuré d'employer le terme (x_1, y_1, z_1) et d'en déduire le terme suivant (x_2, y_2, z_2) de la suite (S). On rangera les quatre nouvelles solutions suivant l'ordre croissant des valeurs de x, puis on les emploiera successivement pour déduire de chacune d'elles les deux solutions qu'elle détermine moyennant les formules I et II. L'une des huit nouvelles solutions sera le terme $(x_3, y_3,)$ de la suite (S). En ordonnant ces solutions suivant l'ordre croissant des valeur de x, en prenant successivement chacune de ces solutions pour en déduire les deux solutions qui en dépendent, et en continuant de la même manière, on obtiendra nécessairement tous les termes de la suite (S) et conséquemment la solution considérée (x, y, z) qui en est le dernier terme. Ainsi en procédant de la ma-

nière indiquée on est assuré d'obtenir une solution quelconque de l'équation proposée.

On voit par l'expression de x dans les formules I, II que la valeur de cette indéterminée croît très rapidement; elle dépasse le carré de la valeur de cette même indéterminée dans la solution précédente. Par conséquent, lorsqu'on a employé comme valeurs des nombres (h, μ) toutes les solutions dans lesquelles la valeur de x est inférieure à une limite donnée L, on est assuré d'avoir obtenu toutes les solutions dans lesquelles la valeur de x ne surpasse pas le carré de cette limite. On obtient donc avec certitude toutes les solutions de l'équation proposée en nombres inférieurs à une limite assignée, quelconque; par conséquent les formules I et II donnent une solution complète de cette équation.

II. *Solution de l'équation* $8x^4 - 3y^4 = 5z^2$.

9. La méthode que nous venons d'employer fournit aussi une solution complète de l'équation

$$(1) \qquad 8x^4 - 3y^4 = 5z^2;$$

seulement le nombre des cas à distinguer est beaucoup plus grand, et la discussion plus compliquée. Après avoir mis cette équations sous la forme

$$8(x^4 - y^4) = 4(z^2 - y^4),$$

on la ramène au système suivant

$$\frac{z - y^2}{x^2 - y^2} = \frac{4p}{q}, \quad \frac{z + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{2q}{5p},$$

$$(2) \qquad 4px^2 - (4p - q)y^2 - qz = 0, \quad 2qx^2 + (2q - 5p)y^2 - 5pz = 0,$$

dans lequel on désigne par p, q deux nombres entiers, premiers entre eux. On déduit de ces équations les égalités suivantes

$$\frac{x^2}{20p^2 - 10pq + 2q^2} = \frac{y^2}{20p^2 - 2q^2} = \frac{-z}{20p^2 - 16pq + 2q^2},$$

$$(3) \quad \left|\begin{aligned} \mu x^2 &= 10p^2 - 5pq + q^2, \\ \mu y^2 &= 10p^2 - q^2, \\ -\mu z &= 10p^2 - 8pq + q^2, \end{aligned}\right.$$

en désignant par μ le plus grand commun diviseur des seconds membres. Ces équations réduites en congruences suivant le module μ montrent que μ est diviseur du déterminant

$$\begin{vmatrix} 5, & -5, & 1 \\ 5, & 0, & -1 \\ 5, & -8, & 1 \end{vmatrix} = -30.$$

D'ailleurs en mettant la première des équations (4) sous la forme

$$(3') \qquad 4\mu x^2 = (2q-5p)^2 + 15p^2,$$

on voit que μ est positif et résidu quadratique de 15; il ne peut donc avoir que l'une des quatre valeurs 1, 6, 10, 15.

10. La valeur $\mu = 1$ donne le système

$$\text{I.} \qquad x^2 = 10p^2 - 5pq + q^2, \quad y^2 = 10p^2 - q^2.$$

Si $\mu = 9$, q doit être pair. Posant donc $q = 2q'$, on a

$$3x^2 = 5p^2 - 5pq' + 2q'^2, \quad 3y^2 = 5p^2 - 2q'^2.$$

Les deux nombres p, q étant premiers entre eux, aucun d'eux n'est divisible par 3; on a donc par la première formule

$$-1 + pq' + 2 \equiv 0, \quad p \equiv -q' \pmod{3}.$$

On peut donc prendre $q' = 3t - p$, et nos formules deviennent

$$x^2 = 4p^2 - 9pt + 6t^2, \quad y^2 = (p+2t)^2 - 20t^2.$$

La substitution $p = u - 4v$, $t = u - 3v$ remplace ces formules par les suivantes

$$x^2 = u^2 - 5uv + 10v^2, \quad y^2 = 10v^2 - u^2,$$

qui ne diffèrent du système I que par la notation.

Lorsqu'on suppose $\mu = 10$, on doit prendre $q = 10q'$; les équations (3) deviennent alors

$$\text{II.} \qquad x^2 = p^2 - 5pq + 10q^2, \quad y^2 = p^2 - 10q^2.$$

Enfin, quand $\mu = 15$, on doit prendre $q = 5q'$; en supprimant le facteur 5, on trouve

$$4.3x^2 = 5(2q' - p)^2 + 3p^2,\ 3y^2 = 2p^2 - 5q'^2.$$

En considérant la dernière formule par rapport au module 8, on voit que p doit être pair; d'ailleurs la première formule exige que $(p - 2q')$ soit multiple de 3; on peut donc poser $p = -q' + 3t$, ce qui donne

$$x^2 = 6t^2 - 9tq' + 4q'^2,\ y^2 = 10t^2 - (2t + q')^2.$$

La substitution $q' = u - 4v$, $t = u - 3v$ remplace ces formules par les suivantes

$$x^2 = u^2 - 5uv + 10v^2,\ y^2 = u^2 - 10v^2,$$

qui ne diffèrent des formules II que par la notation. Donc

Toutes les valeurs x *et* y *propres à vérifier l'équation proposée, se déduisent des deux systèmes*

I. $x^2 = 10p^2 - 5pq + q^2,\ y^2 = 10p^2 - q^2,$

II. $x^2 = 10p^2 - 5pq + q^2,\ y^2 - q^2 = 10p^2.$

11. Comme les deux nombres x et y sont premiers entre eux, q doit être impair. Quant au nombre p, il est impair dans le premier système et pair dans le deuxième, parce qu'autrement y^2 serait de la forme $8l + 7$.

Pour obtenir avec certitude toutes les solutions de l'équation proposée en nombres inférieurs à une limite donnée, il est nécessaire d'exprimer une solution quelconque, formée de nombres supérieurs à l'unité, au moyen d'une solution de la même équation, en nombres moindres. On ne parvient à exprimer de cette manière les solutions renfermées dans le système I, qu'en faisant subir à ce système une transformation, qui permette d'appliquer à la deuxième équation la décomposition en facteurs rationnels. Pour cela posons

$$p = t + 3s,\ q = 3t + 10s;$$

le système I sera remplacé par le suivant:

$$x^2 = 4t^2 + 25ts + 40s^2,\ y^2 = t^2 - 10s^2.$$

La dernière équation, considérée relativement au module 8, exige que s soit pair. Mais si l'on suppose s de la forme $4l + 2$, la valeur de x^2 est de même forme. Le nombre s doit donc être multiple de 4. Posant donc $s = 4u$ nous trouvons

$$(4).\qquad x^2 = (2t + 25u)^2 + 15u^2,\ y^2 = t^2 - 160u^2.$$

12. Comme les deux nombres t et y sont impairs et premiers entre eux, la décomposition en facteurs de la dernière équation s'effectue de la manière suivante

$$u = mn,\ t + y = 2m^2 \text{ ou } 10m^2,\ t \pm y = 80n^2 \text{ ou } 16n^2;$$

$$(a).\qquad t = m^2 + 40n^2,\ \pm y = m^2 - 40n^2,$$

$$(b).\qquad t = 5m^2 + 8n^2,\ \pm y = 5m^2 - 8n^2.$$

La décomposition en facteurs de la première des équations (4) exige que l'on distingue deux cas, suivant que u est pair ou impair. Dans le dernier cas, on a les formules suivantes:

$$u = fg,\quad x \pm (2t + 25fg) = f^2 \text{ ou } 3f^2,$$

$$x \mp (2t + 25fg) = 15g^2 \text{ ou } 5g^2,$$

$$(c).\qquad 2x = f^2 + 15g^2,\ \pm 2(2t + 25fg) = f^2 - 15g^2,$$

$$(d).\qquad 2x = 6f^2 + 5g^2,\ \pm (4t + 50fg) = 3f^2 - 5g^2.$$

Lorsque le nombre u est pair, on doit d'abord supprimer le facteur 4, après avoir posé $x = 2x'$, $u = 2u'$, ce qui donne la formule

$$x'^2 = (t + 25u')^2 + 15u'^2,$$

dans laquelle u' doit être multiple de 4, parce que si u' était impair, on aurait $x'^2 = 4l + 3$, et si u' était de la forme $4k + 2$, on aurait $x^2 = 8l + 5$.

Posant donc $u' = 4fg$, on aura

$$u = 8fg,\ x' \pm (t + 100fg) = 2f^2,\ 10f^2,\ 6f^2,\ 30f^2,$$

$$x' \mp (t + 100fg) = 120g^2,\ 24g^2,\ 40g^2,\ 8g^2,$$

$$(a')\qquad x' = f^2 + 60g^2,\quad \pm t = f^2 - 100fg - 60g^2,$$

$$(b')\qquad x' = 5f^2 + 20g^2,\quad \pm t = 5f^2 + 100fg - 12g^2,$$

$$(c')\qquad x' = 3f^2 + 20g^2,\quad \pm t = 20g^2 + 100fg - 3f^2,$$

$$(d')\qquad x' = 15f^2 + 4g^2,\quad \pm t = 4g^2 + 190fg - 15f^2.$$

13. Le nombre t doit avoir la même valeur, soit qu'on l'exprime au mo-

yen des nombres m, n, comme dans les formules (a), (b), soit qu'on l'exprime en fonction de f et g, comme dans les autres formules. Mais ce nombre étant résidu quadratique de 5 dans les formules (a), (c), (a'), (d'), tandis qu'il est non-résidu de 5 dans les formules (b), (d), (b') et (c'), les formules (a) ne peuvent s'associer qu'avec les formules (c), (a') et (d'), et les formules (b) avec les formules (d), (b') et (c'). On a donc les combinaisons suivantes :

$$\pm(m^2 + 40n^2) = \left(\frac{f + 25g}{2}\right)^2 - 160g^2,\ f^2 + 100fg - 60g^2,\ 4g^2 + 100fg - 15f^2,$$

$$\pm(5m^2 + 8n^2) = 5\left(\frac{g + 5f}{2}\right)^2 - 32f^2,\ 5f^2 + 100fg - 12g^2,\ 20g^2 + 100fg - 3f^2.$$

La considération du module 4 exclut les signes inférieurs dans toutes ces formules. De plus on a $u = mn = fg$, pour les formules (c) et (d) et $u = mn = 8fg$ pour les formules suivantes. Le nombre n est donc multiple de 8 pour ces dernières formules ; nous remplacerons n par $8n$, de manière à n'avoir entre m, n, f, g qu'une seule relation, $mn = fg$. Les solutions de l'équation proposée qui satisfont aux équations (4) seront donc exprimées par le six groupes de formules :

$$(\alpha)\ \left|\begin{array}{l} \pm y = m^2 - 40n^2,\ 2x = f^2 + 15g^2,\ mn = fg, \\ 4m^2 + 160n^2 = f^2 + 50fg - 15g^2, \end{array}\right.$$

$$(\beta)\ \left|\begin{array}{l} \pm y = m^2 - 2560n^2,\ x = 2(f^2 + 60g^2),\ mn = fg, \\ m^2 + 2560n^2 = f^2 + 100fg - 60g^2, \end{array}\right.$$

$$(\gamma)\ \left|\begin{array}{l} \pm y = m^2 - 2560n^2,\ x = 2(15f^2 + 4g^2),\ mn = fg, \\ m^2 + 2560n^2 = 4g^2 + 100fg - 15f^2, \end{array}\right.$$

$$(\delta)\ \left|\begin{array}{l} \pm y = 5m^2 - 8n^2,\ 2x = 3f^2 + 5g^2,\ mn = fg, \\ 20m^2 + 32n^2 = 5g^2 + 50fg - 3f^2, \end{array}\right.$$

$$(\varepsilon)\ \left|\begin{array}{l} \pm y = 5m^2 - 512n^2,\ x = 2(5f^2 + 12g^2),\ mn = fg, \\ 5m^2 + 512n^2 = 5f^2 + 100fg - 12g^2, \end{array}\right.$$

$$(\eta)\quad \left|\begin{array}{l} \pm y = 5m^2 - 512n^2,\ \ x = 2(3f^2 + 20g^2),\ \ mn = fg, \\ 5m^2 + 512n^2 = 20g^2 + 100fg - 3f^2. \end{array}\right.$$

Il est important de remarquer que les décompositions au moyen desquelles nous avons ramené les équations (4) aux formules présentes, ne deviennent illusoires que dans le cas où l'on a $u = 0$, c'est-à-dire lorsque la solution considérée est $x = 2$, $y = 1$.

Les nombres t et y étant premiers entre eux, le nombre m, dans les formules (a), et le nombre n, dans les formules (b), doivent être premiers avec 5. Le nombre m est donc premier avec 5 dans les trois systèmes (α), (β), (γ), et le nombre n dans les trois autres systèmes.

14. L'équation $mn = fg$ commune à ces divers systèmes est complètement résolue par les formules

$$(5)\qquad f = \lambda\mu,\ \ g = hk,\ \ m = \lambda h,\ \ n = \mu k$$

dans lesquelles λ, μ, h, k désignent quatre nombres entiers, premiers entre eux, deux à deux. Ces quatre nombres sont impairs dans les deux systèmes (α), (δ); le nombre k peut être pair dans les quatre autres systèmes. Les nombres λ, μ, h sont premiers avec 5 dans les systèmes (α), (β), les nombres λ, h, k dans le système (δ), les nombres λ, μ, k dans les systèmes (δ), (η), enfin les nombres h, k, μ dans le système (ϵ).

Moyennant la substitution (5), la solution considérée (x, y) sera exprimée en fonctions de quatre nombres entiers λ, μ, h, k assujétis à vérifier une équation homogène du quatrième degré, dont la résolution dépend ellemême de celle de l'équation proposée. C'est ce que nous allons démontrer successivement pour chacun de nos six groupes de formules.

Dans le système (α) l'équation à résoudre est

$$(6).\qquad h^2(4\lambda^2 - k^2) - 50\lambda\mu hk + 5\mu^2(32k^2 + 3\lambda^2) = 0.$$

On en déduit successivement

$$\frac{h}{\mu} = \frac{25\lambda k \pm 2\sqrt{5(8k^4 - 3\lambda^3)}}{4\lambda^2 - k^2},\quad \frac{k}{\lambda} = \frac{25h\mu \pm 2\sqrt{h^4 - 600\mu^4}}{160\mu^2 - h^2},$$

d'où l'on conclut que les nombres h, μ, k, λ vérifient respectivement les deux équations

$$h^4 - 600\mu^4 = \tau^2,\ \ 8k^4 - 3\lambda^4 = 5\rho^2$$

dont la dernière est l'équation proposée elle-même. Si cette dernière équation était résolue, on connaitrait tous les systèmes de valeurs des nombres k, λ qui satisfont à l'équation (6), et l'on obtiendrait les valeurs correspondantes des indéterminées h, μ au moyen de la formule

$$\frac{h}{\mu}=\frac{25\lambda k \pm 10\rho}{4\lambda^2-k^2},$$

en ayant soin de réduire à sa plus simple expression la fraction qui forme le second membre.

Ainsi les solutions de l'équation proposée qui dépendent du système (α), sont exprimées au moyen de solutions en nombres moindres de la même équation, par les formules

$$(7). \quad \left| \begin{array}{l} 2x=\lambda^2\mu^2+15h^2k^2, \quad \pm y=\lambda^2h^2-40\mu^2k^2, \\ 8k^4-3\lambda^4=5\rho^2, \quad \dfrac{h}{\mu}=\dfrac{25\lambda k-10\rho}{4\lambda^2-k^2}. \end{array} \right.$$

Toutes les solutions de l'équation (6) ne sont pas admissibles dans ces formules; on ne peut employer que celles où les nombres k, λ vérifient la congruence $\lambda^2+k^2\equiv 0$ (mod. 5), car autrement les nombres h et y seraient divisibles par 5, tandis que y doit être premier avec 5. De plus, k doit être impair.

15. Les solutions (x, y) renfermées dans les formules (δ) dépendent de l'équation biquadratique

$$(8) \qquad 5h^2(4\lambda^2-k^2)-50\lambda\mu hk+\mu^2(3\lambda^2+32k^2)=0,$$

d'où l'on déduit les deux formules

$$\frac{h}{\mu}=\frac{25\lambda k\pm 2\sqrt{5\,(8k^4-3\lambda^4)}}{5\,(4\lambda^2-k^2)}, \quad \frac{k}{\lambda}=\frac{25h\mu\pm\sqrt{25h^4-24\mu^4}}{32\mu^2-5h^2}.$$

Pour que les deux fractions $h:\mu$, $k:\lambda$ soient rationnelles, il est nécessaire et suffisant que les nombres h, μ, k, λ vérifient respectivement les deux équations

$$25h^4-24\mu^4=\tau^2, \quad 8k^4-3\lambda^4=5\rho^2,$$

ρ et τ désignant des nombres entiers. Les solutions renfermées dans le système (δ) se ramènent donc à d'autres solutions de l'équation proposée

en nombres moindre k, λ, au moyen desquelles on les exprime par les formules

$$(9)\quad \left|\begin{array}{ll} 8k^4 - 3\lambda^4 = 5\rho^2, & \dfrac{h}{\mu} = \dfrac{5\lambda k \pm 2\rho}{4\lambda^2 - k^2} \\ 2x = 3\lambda^2\mu^2 + 5h^2k^2, & \pm y = 5\lambda^2 h^2 - 8\mu^2 k^2. \end{array}\right.$$

On ne peut pas employer dans ces formules les solutions (k, λ) auxquelles correspondent pour μ des valeurs multiples de 5, parce que les nombres x et y ne seraient plus premiers entre eux.

16. Dans les deux systèmes (β) et (γ) on doit résoudre respectivement les deux équations

$$(10)\qquad 20\,(128\mu^2 + 3h^2)\,k^2 - 100\lambda\mu hk + (h^2 - \mu^2)\,\lambda^2 = 0,$$

$$(11)\qquad (\lambda^2 - 4k^2)\,h^2 - 100\lambda\mu hk + 5\,(512k^2 + 3\lambda^2)\,\mu^2 = 0.$$

L'équation (10) se résout au moyen des formules

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{25h\mu \pm \sqrt{5\,(8\,(2\mu)^4 - 3h^4)}}{10\,(128\mu^2 + 3h^2)}, \quad \frac{h}{\mu} = \frac{50\lambda k \pm \sqrt{\lambda^4 - 600\,(4k)^4}}{\lambda^2 + 60k^2},$$

et l'équation (11) au moyen des suivantes

$$\frac{h}{\mu} = \frac{50\lambda k \pm \sqrt{5\,(8(4k)^4 - 3\lambda^4)}}{\lambda^2 - 4k^2}, \quad \frac{\lambda}{k} = \frac{50h\pi \pm 2\sqrt{h^4 - 600\,(2\mu)^4}}{h^2 + 15\mu^2},$$

On a dans le premier cas

$$8\,(2\mu)^4 - 3h^4 = 4\rho^2, \quad \lambda^4 - 600\,(4k)^4 = \tau^2,$$

et dans le second,

$$8\,(4k)^4 - 3\lambda^4 = 5\rho^2, \quad h^4 - 600\,(2\mu)^4 = \tau^2.$$

Dans les deux cas la solution (x, y) de l'équation proposée est ramenée à une autre solution de la même équation, au moyen de laquelle on l'exprime par les formules suivantes :

$$(12)\quad \left|\begin{array}{ll} 8\,(2\mu)^4 - 3h^4 = 5\rho^2, & \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{5h\mu \pm \rho}{2\,(128\mu^2 + 3h^2)} \\ x = 2\,(\lambda^2\mu^2 + 60h^2k^2), & \pm y = \lambda^2 h^2 - 2560\mu^2 k^2 ; \end{array}\right.$$

$$(13)\quad \left| \begin{array}{ll} 8\,(4k)^4 - 3\lambda^4 = 5\rho^2, & \dfrac{h}{\mu} = \dfrac{5\,(10\lambda k \pm \rho)}{\lambda^2 - 4k^2}, \\ x = 2(15\lambda^2\mu^2 + 4h^2k^2), & \pm y = \lambda^2 h^2 - 2560\mu^2 k^2. \end{array} \right.$$

Dans les formules (12) l'expression $5h\mu \pm \rho$ doit avoir une valeur paire; par conséquent le nombre μ doit être impair; de plus les nombres μ, h doivent vérifier la congruence $\mu^2 - h^2 \equiv 0$ (mod. 5), sans quoi les nombres λ et y seraient multiples de 5. Dans les formules (12), les nombres k, λ doivent vérifier la congruence $k^2 + \lambda^2 \equiv 0$ (mod. 5), parce qu'autrement h et y seraient divisibles par 5.

17. De même les solutions qui se ramènent aux deux systèmes (ε) et (η) s'expriment au moyen de solutions en nombres moindres de l'équation proposée. Les deux équations dont elles dépendent, savoir

$$(14)\qquad 4\,(128\mu^2 + 3h^2)k^2 - 100\lambda\mu hk + 5\,(h^2 - \mu^2)\,\lambda^2 = 0,$$

$$(15)\qquad 5\,(\lambda^2 - 4k^2)h^2 - 100\lambda\mu hk + (512k^2 + 3\lambda^2)\,\mu^2 = 0,$$

se résolvent respectivement au moyen des formules

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{25h\mu \pm \sqrt{5\,(8(2\mu)^4 - 3h^4)}}{2\,(128\mu^2 + 3h^2)}, \quad \frac{h}{\mu} = \frac{50\lambda k \pm \sqrt{25\lambda^4 - 24\,(4k)^4}}{5\lambda^2 + 12k^2};$$

$$\frac{h}{\mu} = \frac{50\lambda k \pm \sqrt{5(8(4k)^4 - 3\lambda^4)}}{5\,(\lambda^2 - 4k^2)}, \quad \frac{\lambda}{k} = \frac{50h\mu \mp 2\sqrt{25h^4 - 24\,(2\mu)^4}}{5h^2 + 3\mu^2}.$$

Les nombres 2μ, h, dans le premier cas; et les nombres $4k$, λ, dans le deuxième, forment une solution de l'équation proposée. Dans les deux cas, la solution considérée (x, y) se trouve exprimée au moyen d'une autre solution de l'équation proposée, par les formules respectives :

$$(16)\quad \left| \begin{array}{ll} 8\,(2\mu)^4 - 3h^4 = 5\rho^2, & \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{25h\mu \pm 5\rho}{2(128\mu^2 + 3h^2)}, \\ x = 2\,(5\lambda^2\mu^2 + 12h^2k^2), & \pm y = \lambda^2 h^2 - 512\mu^2 k^2; \end{array} \right.$$

$$(17)\quad \left| \begin{array}{ll} 8\,(4k)^4 - 3\lambda^4 = 5\rho^2, & \dfrac{h}{\mu} = \dfrac{10\lambda k \pm \rho}{\lambda^2 - 4k^2}, \\ x = 2\,(3\lambda^2\mu^2 + 20h^2k^2), & \pm y = 5\lambda^2 h^2 - 512\mu^2 k^2. \end{array} \right.$$

Le nombre μ doit être impair dans les formules (16) pour la même raison que dans les formules (12); mais, tandis que dans les formules (12) les nombres h, μ doivent vérifier la congruence $h^2 - \mu^2 \equiv 0 \pmod{5}$, dans les formules (16) ils doivent satisfaire à la congruence $h^2 + \mu^2 \equiv 0 \pmod{5}$. Dans les formules (17), les trois nombres λ, μ et k doivent être premiers avec 5.

18. Il résulte de l'analyse précédente que toutes les solutions de l'équation proposée dans lesquelles la valeur de x est paire, pourvu que cette valeur soit supérieure à 2, se ramènent à des solutions de la même équation en nombres moindres, au moyen desquelles on les exprime par les formules obtenues dans les quatre derniers numéros. Nous allons démontrer qu'il en est de même pour les solutions dans lesquelles la valeur de x est impaire, pourvu que cette valeur soit supérieure à l'unité. Nous avons trouvé précédemment (n° 11) que ces solutions sont exprimées par les formules

$$x^2 = 10p^2 - 5\,pq + q^2,\quad y^2 = q^2 - 10\,p^2,$$

où q désigne un nombre impair et p un nombre pair. Or, si p est de la forme $4l+2$, x^2 est de la forme $4l+3$; si p est de la forme $8l+4$, x^2 est de la forme $8l+5$. Le nombre p doit donc être multiple de 8; c'est pourquoi, remplaçant p par $8p$, nous avons à résoudre le système des deux équations

$$\text{II.}\qquad x^2 = (q-20p)^2 + 240p^2,\quad y^2 = q^2 - 640\,p^2.$$

Comme les deux nombres q et y sont impairs et premiers entre eux, les deux facteurs $q+y$ et $q-y$ ont pour plus grand diviseur commun le nombre 2, de sorte que la décomposition de la dernière équation s'effectue de la manière suivante:

$$p = mn,\quad q \pm y = 2m^2,\ 10m^2,\quad q \mp y = 320\,n^2,\ 64n^2$$

$$(a)\qquad q = m^2 + 160n^2,\quad \pm y = m^2 - 160\,n^2$$

$$(b)\qquad q = 5m^2 + 32n^2,\quad \pm y = 5m^2 - 32\,n^2.$$

19. De même la première équation du système II se décompose en facteurs, au moyen des formules suivantes:

$$p = fg, \quad x \pm (q - 20p) = 2f^2,\ 6f^2,\ 10f^2,\ 30f^2,$$

$$x \mp (q - 20p) = 120g^2,\ 40g^2,\ 24g^2,\ 8g^2,$$

$$\pm (q - 20fg) = f^2 - 60g^2,\ 3f^2 - 20g^2,\ 5f^2 - 12g^2,\ 15f^2 - 4g^2.$$

La première et la dernière hypothèse, dans lesquelles q est résidu quadratique de (5) ne peuvent s'accorder qu'avec les formules (a); de même les deux autres hypothèses, dans lesquelles q est non-résidu quadratique de 5, ne peuvent s'associer qu'avec les formules (b). On a donc

$$m^2 + 160n^2 = \pm (f^2 + 20fg - 60g^2),\ \pm (4g^2 + 20fg - 15f^2),$$

$$5m^2 + 32n^2 = \pm (20g^2 + 20fg - 3f^2),\ \pm (5f^2 + 20fg - 12g^2).$$

Dans toutes ces formules, le signe inférieur est exclu par la considération du module (4). Le système des équations II est donc résolu au moyen des quatre systèmes suivants :

$$(\alpha) \left| \begin{array}{l} x = f^2 + 60g^2,\ \pm y = m^2 - 160n^2, \\ fg = mn,\ m^2 + 160n^2 = f^2 + 20fg - 60g^2, \end{array} \right.$$

$$(\beta) \left| \begin{array}{l} x = 15f^2 + 4g^2,\ \pm y = m^2 - 160n^2, \\ fg = mn,\ m^2 + 160n^2 = 4g^2 + 20fg - 15f^2, \end{array} \right.$$

$$(\gamma) \left| \begin{array}{l} x = 5f^2 + 12g^2,\ \pm y = 5m^2 - 32n^2, \\ fg = mn,\ 5m^2 + 32n^2 = 5f^2 + 20fg - 12g^2, \end{array} \right.$$

$$(\delta) \left| \begin{array}{l} x = 3f^2 + 20g^2,\ \pm y - 5m^2 - 32n^2, \\ fg = mn,\ 5m^2 + 32n^2 = 20g^2 + 30fg - 3f^2. \end{array} \right.$$

20. Comme dans le cas précédent, l'équation $fg = mn$ comune à ces quatre systèmes est résolue complètement par les formules

$$(5) \qquad f = \lambda\mu,\ g = hk,\ m = \lambda h,\ n = \mu k,$$

dans lesquelles λ, μ, h, k désignent quatre nombres entiers et premiers entre eux, deux à deux, dont les trois premiers sont impairs et dont le quatrième, k, peut être pair ou impair. Les formules (5) ramènent la ré-

solution des systèmes précédents à celle d'une seule équation biquadratique. Dans le système (α) cette équation biquadratique est

$$(18) \qquad 20\,(8\mu^2 + 3h^2)\,k^2 - 20\lambda h\mu k + (h^2 - \mu^2)\,\lambda^2 = 0\,;$$

on en déduit

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{5h\mu \pm \sqrt{5\,(8\mu^4 - 3h^4)}}{10\,(8\mu^2 + 3h^2)}, \quad \frac{\mu}{h} = \frac{10\lambda k \pm \sqrt{\lambda^4 - 600\,(2k)^4}}{160k^2 - \lambda^2},$$

et comme les rapports $k : \lambda$, $\mu : h$ sont rationnels, les nombres μ, h, k, λ doivent vérifier les deux équations

$$8\mu^4 - 3h^4 = 5\rho^2, \quad \lambda^4 - 600(2k)^4 = \tau^2,$$

dans lesquelles on désigne par ρ et τ deux nombres entiers. Il résulte de là que les solutions renfermées dans le système (α) sont exprimées au moyen de solutions en nombres moindres de l'équation proposée, par les formules

$$(19). \quad \left|\begin{array}{l} 8\mu^4 - 3h^4 = 5\rho^2, \quad \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{h\mu \pm \rho}{2(8\mu^2 + 3h^2)} \\[2ex] x = \lambda^2\mu^2 + 60h^2k^2, \; \pm y = \lambda^2h^2 - 160\mu^2k^2. \end{array}\right.$$

Comme les nombres λ, μ, h doivent être premiers avec 5, on ne peut admettre dans ces formules que les solutions $x = \mu$, $y = h$ qui vérifient la congruence $\mu^2 - h^2 \equiv 0$ (mod. 5) ; car en résolvant l'équation (18) par rapport au quotient $\lambda : k$, on trouve

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{10\,(h\mu \pm \rho)}{h^2 - \mu^2}.$$

Cette expression montre que λ serait multiple de 5 si le dénominateur $h^2 - \mu^2$ n'était pas divisible par 5..

21. Dans le système (γ) la transformation (5) remplace la dernière équation par la suivante

$$(20) \qquad 4\,(8\mu^2 + 3h^2)\,k^2 - 20\lambda\mu hk + 5\,(h^2 - \mu^2)\,\lambda^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{5h\mu \pm \sqrt{5\,(8\mu^4 - 3h^4)}}{2(8\mu^2 + 2\rho^2)}, \quad \frac{h}{\mu} = \frac{19\lambda k \pm \sqrt{25\lambda^4 - 24\,(2k)^4}}{32k^2 - 5\lambda^2},$$

$$8\mu^4 - 3h^4 = 5\rho^2, \quad 25\lambda^4 - 24\,(2k)^4 = \tau^2.$$

Les deux nombres μ, h forment donc une solution de l'équation proposée, et la solution considérée (x, y) s'exprime au moyen de cette solution (μ, h) par les formules

$$(21)\quad \left|\begin{array}{l} 8\mu^4 - 3h^4 = 5\rho^2, \quad \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{5(h\mu \pm \rho)}{16\mu^2 + 6\mu^2} \\ x = 5\lambda^2\mu^2 + 12h^2k^2, \quad \pm y = 5\lambda^2h^2 - 32\mu^2k^2. \end{array}\right.$$

Le nombre k doit être premier avec 5, sans quoi x et y seraient divisibles par 5. On ne peut donc employer dans ces formules que les solutions (μ, h) qui rendent la somme $\mu^2 + h^2$ divisible per 5. De plus le nombre μ doit être impair, puisque l'on suppose x impair.

22. En vertu de la même transformation (5), les deux systèmes (β) et (δ) dépendent respectivement des deux équations biquadratiques

$$(22)\qquad (\lambda^2 - 4k^2(h^2 - 20\lambda\mu hk + 5\,(32k^2 + 3\lambda^2)\,\mu^2 = 0,$$

$$(23)\qquad 5(\lambda^2 - 4k^2)h^2 - 20\lambda\mu hk + (32k^2 + 3\lambda^2)\,\mu^2 = 0.$$

On en déduit respectivement les deux formules

$$\frac{h}{\mu} = \frac{10\lambda k \pm \sqrt{5\,(8(2k)^4 - 3\lambda^4)}}{\lambda^2 - 4k^2}, \quad \frac{h}{\mu} = \frac{10\lambda k \pm \sqrt{5\,(8\,(2k)^4 - 3\lambda^4)}}{5\,(\lambda^2 - 4k^2)},$$

où l'on voit que les nombres $2k$, λ forment une solution de l'équation proposée. Ainsi la solution considérée (x, y) est exprimée au moyen d'une solution de la même équation en nombres moindres $(2k, \lambda)$, par les formules

$$(24)\quad \left|\begin{array}{l} 8\,(2k)^4 - 3\lambda^4 = 5\rho^2 \quad \dfrac{h}{\mu} = \dfrac{5\,(2\lambda k \pm \rho)}{\lambda^2 - 4k^2} \\ x = 15\lambda^2\mu^2 + 4h^2k^2, \quad y = \lambda^2h^2 - 160\mu^2k^2\,; \end{array}\right.$$

$$(25)\quad \left|\begin{array}{l} 8\,(2k)^4 - 3\lambda^4 = 5\rho^2 \quad \dfrac{h}{\mu} = \dfrac{2\lambda k \pm \rho}{\lambda^2 - 4k^2}, \\ x = 3\lambda^2\mu^2 + 20h^2k^2, \quad \pm y = 5\lambda^2h^2 - 32\mu^2k^2. \end{array}\right.$$

Le nombre h doit être premier avec 5 dans les formules (24) et le nombre μ, dans les formules (25). Le dénominateur $\lambda^2 - 4k^2$ doit donc être divisible par 5 dans les formnles (24) et premier avec 5 dans les formules (25).

On voit par l'analyse précédente qu'une solution quelconque de l'équation proposée, pourvu qu'elle soit formée de nombres supérieurs à l'unité, se ramène à une autre solution de la même équation en nombres moindres, au moyen de laquelle on l'exprime, suivant la forme des valeurs de x et de y relativement au module 8, par l'un des dix systèmes de formules que nous avons obtenus, savoir par l'un des six premiers, quand x est pair, et par l'un des quatre derniers, quand x est impair. Il résulte de là que nos formules donnent une solution complète de l'équation proposée; mais avant d'aborder cette démonstration, nous dirons quelques mots de la méthode posthume d'Euler pour trouver les valeurs rationnelles de x qui rendent rationnelle la racine carrée d'un polynome du quatrième degré en x.

23. La solution complète de l'une des équations biquadratiques (6) (8), (18) ou (20) suffirait pour faire connaître toutes les solutions de l'équation proposée. Considérons par exemple l'équation

$$(6) \qquad h^2(4\lambda^2 - k^2) - 50\,\lambda\mu hk + 5(32k^2 + 3\lambda^2)\mu^2 = 0,$$

avec les expressions qui s'en déduisent pour les deux rapports $h:\mu$, $k:\lambda$, savoir

$$\frac{h}{\mu} = \frac{25\lambda k \pm 2\sqrt{5(8k^4 - 3\lambda^4)}}{4\lambda^2 - k^2}, \quad \frac{k}{\lambda} = \frac{25h\mu \pm 2\sqrt{h^4 - 600\,\mu^4}}{160\mu^2 - h^2}.$$

On voit par l'expression du rapport $h:\mu$ que toute solution $(x = k, y = \lambda)$ de l'équation proposée détermine deux systèmes de valeurs des nombres h, μ propres à vérifier l'équation (6), lorsqu'on les associe aux valeurs considérées des nombres k, λ. Si donc l'on connaissait tous les systèmes de valeurs des nombres k, λ, h, μ qui satisfont à l'équation (6), en prenant dans tous ces systèmes $x = k$, $y = \lambda$, on obtiendrait toutes les solutions de l'équation proposée.

Proposons-nous de résoudre l'équation (6) par la méthode posthume d'Euler, dont j'ai parlé avec détail dans mon *Étude sur l'équation indéterminée* $ax^4 + by^4 = cz^2$ (Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei, Sess. VII, 1883). Pour cela transformons l'équation (6) en posant

$$\frac{k}{\lambda} = \xi, \quad \frac{h}{\mu} = \zeta,$$

ce qui donne l'équation

$$(6') \qquad (4 - \xi^2)\zeta^2 - 50\xi\zeta + 5(32\xi^2 + 3) = 0.$$

En désignant par ζ, ζ' les deux valeurs de ζ qui correspondent à une même valeur de ξ, par ξ, ξ' les deux valeurs de ξ qui correspondent à une même valeur de ζ, on obtient les deux formules

$$(a) \quad \zeta + \zeta' = \frac{50\xi}{4 - \xi^2}, \qquad (b) \quad \xi + \xi' = \frac{50\zeta}{160 - \zeta^2},$$

dont l'emploi alternatif constitue la méthode posthume d'Euler.

Les solutions qu'Euler appelle primitives se réduisent ici à deux, savoir $\xi = 2$, $\xi = -2$. Si l'on fait $\xi = 2$, on déduit de l'équation $(6')$, $\zeta = \frac{131}{20}$; la seconde valeur de ζ est infinie. Les deux valeurs correspondantes $\xi = 2$, $\zeta = \frac{131}{20}$ ne peuvent s'employer que dans la formule (b), d'où l'on déduit pour ξ une nouvelle valeur $\xi' = \frac{37332}{46839}$. En substituant cette dernière valeur dans la formule (a), ainsi que la valeur correspondante $\zeta = \frac{131}{20}$ on en déduit

$$\zeta' + \frac{131}{20} = \frac{3\,497187096}{135232839}, \quad \zeta' = \frac{5\,2228240011}{2704656781}.$$

En associant dans la formule (b) cette valeur de ζ avec la dernière valeur de ξ, on obtient une nouvelle valeur de cette indéterminée, et ainsi de suite. On obtient de la sorte une suite indéfinie

$$\zeta = \frac{1}{0}, \ \xi = 2, \ \zeta' = \frac{131}{20}, \ \xi' = \frac{37332}{46839}, \ \zeta'' = \frac{52228240011}{2704656780}, \ldots$$

dans laquelle chaque valeur de ξ est comprise entre les deux seules valeurs de ζ qu'on puisse lui associer de manière à vérifier l'équation $(6')$. La solution $\xi = -2$ donnerait une autre suite qui ne diffère de la précédente que par les signes des valeurs de ξ et de ζ. La solution $\xi = 1$, rendue évidente par l'équation proposée, ne figure pas parmi les solutions que l'on peut déduire par la méthode présente des solutions qu'Euler appelle primitives.

14. Si l'on fait $\xi = 1$ dans l'équation $(6')$ on trouve pour ζ deux valeurs rationnelles $\frac{5}{1}$, $\frac{35}{3}$. En associant successivement dans la formule (b) les deux valeurs $\xi = 1$, $\zeta = 5$, puis $\xi = 1$, $\zeta = \frac{35}{3}$ on obtient deux nouvelles valeurs

de ξ; savoir $\xi' = \frac{33}{27}$ et $\xi = \frac{1007}{43}$. La formule (a) donne ensuite pour ζ les deux valeurs

$$\zeta'' = \frac{19115}{2387}, \quad ''\zeta = -\frac{4636445}{335551},$$

et en continuant l'emploi alternatif des formules (b) et (a), on forme une suite indéfinie dans les deux sens

$$\ldots''\zeta = -\frac{4\,636445}{335551}, \quad '\xi = \frac{1007}{43}, \quad '\zeta = \frac{35}{5}, \quad \xi = 1,$$

$$\zeta' = \frac{5}{1}, \quad \xi' = \frac{23}{27}, \quad \zeta'' = \frac{19115}{2387}, \ldots$$

Dans cette suite, comme dans celle du n.° précédent, chaque valeur de ξ est comprise entre les deux seules valeurs de ζ qu'on puisse lui associer de manière à vérifier l'équation (6'). Chacune de ces valeurs de ξ détermine une solution de l'équation proposée qu'on obtient en égalant x et y aux deux termes de cette valeur réduite à sa plus simple expression. Mais cette suite ne donne pas toutes les solutions en nombres impairs, pas plus que la suite précédente ne fait connaitre toutes les solutions dans lesquelles la valeur de x est paire. L'équation proposée admet la solution

$$x = 107, \quad y = 83, \quad z = 13463,$$

qui correspond à la solution $\xi = \frac{107}{83}$ de l'équation (6'), solution qui ne figure dans aucunes des deux suites précédentes. A cette valeur de ξ l'équation (6') fait correspondre les deux valeurs

$$\zeta = \frac{155}{7}, \quad \zeta = \frac{12485}{2301}.$$

En associant successivement dans la formule (b) ces deux valeurs de ζ à la valeur correspondante de ξ, savoir $\xi = \frac{107}{83}$, on obtient deux nouvelles valeurs de ξ, $-\frac{181}{39}$ et $\frac{1313869}{1665689}$.

Ainsi la solution $\xi = 107 : 83$ est la base d'une suite analogue à la précédente et indéfinie dans les deux sens. Les valeurs de ξ qui figurent dans cette suite correspondent à des solutions de l'équation proposée dans les-

quelles la valeur de x est impaire; la valeur $\xi = -181 : 39$ correspond à la solution

$$x = 181, \quad y = 39, \quad z = 41423.$$

25. Ainsi l'emploi de la méthode posthume d'Euler pour trouver les valeurs rationnelles de ξ qui rendent rationnelle l'expression $\sqrt{40\xi^4 - 15}$ ne donne qu'une solution incomplète, parce que cette méthode ne fournit aucun moyen de trouver avec certitude les solutions qui servent de bases à des suites indéfinies, semblables aux précédentes.

Au contraire les formules auxquelles nous sommes parvenus dans ce Mémoire donnent une solution complète de l'équation proposée. Quelle que soit en effet la solution (x, y, z) de cette équation, pourvu que la valeur de x soit supérieure à 2, elle suppose une autre solution de la même équation en nombres moindres, au moyen de laquelle on l'exprime par l'un des systèmes précédents. Si dans cette dernière solution la valeur de x est encore supérieure à 2, elle suppose une autre solution de la même équation en nombres moindres, au moyen de laquelle on l'exprime par l'un des mêmes systèmes de formules, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on parvienne à une solution où la valeur de x ne surpasse pas 2. Dailleurs si l'on fait $x = 1$, on doit prendre $y = z = 1$; si l'on fait $x = 2$, on ne peut vérifier l'équation proposée qu'en prenant $y = 1$, $z = 5$. Par conséquent l'équation proposée n'admet que deux solutions irréductibles, savoir $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 5)$.

Toute autre solution (x, y, z) donne lieu à une suite de solutions en nombres décroissants, commençant par la solution considérée, finissant par l'une des deux solutions $(1, 1, 1)$ ou $(2, 1, 5)$ et telles que chacun de ses termes s'exprime au moyen du suivant par l'un de nos dix systèmes de formules.

26. Supposons que la suite dont nous venons de parler ait pour dernier terme la solution $(1, 1, 1)$. Il suffit d'employer les mêmes formules dans un ordre inverse, en partant de la solution $(1, 1, 1)$, pour obtenir successivement tous les termes de cette suite. Il est vrai que la solution $(1, 1, 1)$ fournit plusieurs solutions et qu'on ignore quelle est celle de ces solutions qui est l'avant dernier terme de notre suite; mais si l'on emploie toutes les solutions obtenues afin d'en déduire toutes les solutions qui en dépendent en vertu de nos formules, nous sommes assurés d'avoir employé l'avant dernier terme de notre suite et d'avoir obtenu le terme qui le précède. On rangera suivant l'ordre croissant des valeurs de x toutes les solutions calculées, et on les emploiera successivement pour en déduire toutes

les solutions qu'elles peuvent fournir au moyen de nos formules. En continuant de la même manière, on obtiendra tous les termes de la suite considérée et, conséquemment, la solution demandée (x, y, z) qui en est le dernier terme. Ces solutions sont accompagnées d'un grand nombre d'autres, étrangères à notre suite; mais toutes ces solutions se ramènent par nos formules à la même solution primitive $(1, 1, 1)$ au moyen d'une suite semblable à la suite considérée. Si l'on désigne par L la plus petite valeur de x dans les solutions non encore employées, nous sommes assurés d'avoir obtenu toutes les solutions qui se ramènent à la solution $(1, 1, 1)$ et dans lesquelles la valeur de x ne surpasse pas L^2.

La solution $(1, 1, 1)$ ne peut s'employer que dans les formules (7), (9), (19) et (21), parce que les autres formules supposent que la première indéterminée est un nombre pair. De plus on doit exclure les deux systèmes (7) et (21), parce que les valeurs $h = \mu = 1$ ne satisfont pas à la condition $h^2 + \mu^2 \equiv 0 \pmod{5}$. Il ne reste ainsi que les deux systèmes (9) et (19).

En faisant $k = \lambda = 1$ dans les formules (9), on trouve

$$\frac{h}{\mu} = \frac{5 \pm 2}{3} = \frac{1}{1}, \frac{7}{3}.$$

La combinaison $\lambda = k = 1$, $h = \mu = 1$ donne $x = 4$, $y = 3$, $z = 19$; la combinaison $\lambda = k = 1$, $h = 7$. $\mu = 3$ donne $x = 136$, $y = 173$, $z = 3149$.

Pour employer la même solution $(1, 1, 1)$ dans les formules (19), il faut faire $h = \mu = 1$, ce qui donne

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{1 \pm 1}{22} = \frac{0}{1}, \frac{1}{11}.$$

La combinaison $k = 0$, $\lambda = 1$, $h = \mu = 1$ donne $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. La combinaison $h = \mu = 1$, $k = 1$, $\lambda = 11$ donne la solution $x = 181$, $y = 39$, $z = 41423$.

Ainsi la solution $(1, 1, 1)$ en détermine trois autres

$$(4,\ 3,\ 19),\quad (136,\ 173,\ 3149),\quad (181,\ 39,\ 31423).$$

L'une de ces trois solutions est le second terme de la suite considérée, écrite dans un ordre inverse

$$\text{(S)} \qquad (1, 1, 1),\ (x_1, y_1, z_1), \ldots (x_n, y_n, z_n),\ (x, y, z).$$

Si nous les employons toutes trois dans nos formules, nous sommes assurés d'employer le terme (x_1, y_1, z_1) et d'obtenir le terme suivant (x_2, y_2, z_2).

27. La solution $(4, 3, 19)$ ne peut s'employer que dans les deux sytèmes (13) et (25). Dans les formules (13) on doit prendre $k = 1$, $\lambda = 3$, $\rho = 19$; on

en déduit $\frac{h}{\mu} = \frac{11}{1}, \frac{49}{1}$. La combinaison $k = 1$, $\lambda = 3$, $h = 11$, $\mu = 1$ donne $x = 1238$, $y = 1471$, $z = 974203$; l'autre combinaison, $k = 1$, $\lambda = 3$, $h = 49$, $\mu = 1$ donne $x = 19478$, $y = 19049$.

Dans les formules (25) on doit faire $k = 2$, $\lambda = 3$, ce qui donne pour le rapport $h : \mu$ les deux valeurs $\frac{1}{1}$, $\frac{-31}{7}$. En combinant successivement ces deux valeurs avec $k = 2$, $\lambda = 3$, on obtient les deux solutions

$$x = 107, \quad y = 83, \quad z = 13463;$$
$$x = 78203, \quad y = 86973.$$

Ainsi la solution (4, 3, 19) en détermine quatre nouvelles au moyen de nos formules. Si cette solution est le second terme de la suite (S), l'une des quatre solutions obtenues en est le troisième terme.

On a en tout huit solutions de l'équation proposée, en employant seulement les deux solutions (1, 1, 1), (4, 3, 19). Celle des solution non encore employée où la valeur de x est la plus petite est (107, 83, 13463); elle ne peut donner que des solutions dans lesquelles la valeur de x est supérieure au carré de 107. Par conséquent toutes les solutions dans lesquelles la valeur de x est inférieure à 10000 et qui dépendent de la solution primitive (1, 1, 1) s'obtiennent par l'emploi des deux solutions (1, 1, 1), (4, 3, 19). Elles sont au nombre de six, savoir

(1, 1, 1), (4, 3, 19), (107, 83, 13463), (136, 173, 3149),
(181, 39, 41423), (1238, 1471, 974203).

Il reste à chercher les solutions qui dépendent de la solution primitive (2, 1, 5). Cette solution ne peut s'employer que dans les formules (12) et (25), au moyen desquelles elle fournit trois nouvelles solutions

(23, 37, 359), (1007, 43, 1282681), (54442, 46839, z).

La solution (23, 27, 359) ne peut s'employer que dans les formules (9) et (19). On en déduit quatre solutions nouvelles dont une seule présente une valeur de x inférieure à 10000, savoir

$$x = 2416, \quad y = 587, \quad z = 7378531.$$

Ainsi l'équation proposée admet dix solutions en nombres entiers et positifs, dans lesquelles la valeur de x est inférieure à 10000, et nous sommes assurés qu'il n'existe aucune autre solution au dessous de la limite énoncée.

COMUNICAZIONI

Castracane, Conte Ab. F. – *Sopra il vegetare delle Diatomee in fondo al mare*:

Il Conte Ab. Francesco Castracane facendo seguito alla prima comunicazione presentata alla Accademia sopra il vegetare delle Diatomee in fondo al mare, dal qual fatto seguirebbe che si dovesse riconoscere l'azione della luce in quelli abissi; notò come un fatto di tanta importanza non fosse appoggiato se non ad una osservazione. Perciò a stabilire con più certezza la cosa, si è procacciato dalla Commissione del Challenger i contenuti di sei oloturie pescate in diversi luoghi ed a profondità di 2511 a 5274 metri. Il risultato già ottenuto su i due echini provenienti dalla profondità di 2638 metri fu perfettamente conforme a quello delle sei oloturie, le quali egualmente che gli echini hanno soltanto un moto di reptazione e perciò non poterono sostentarsi che con Diatomee viventi, site alla loro portata. La qualità delle Diatomee incontrate negli echini e nelle oloturie escludono la possibilità che quelle fossero cadute dalla superficie. Alcuna delle oloturie presentò copia stragrande della esilissima *Synedra Thalassiotrix*, Cleve, in stato di integrità, la quale non si incontra mai negli scandagli o nei fanghi marini se non che in frammenti e in condizione di detrito, mentre, lunghe di tre o quattro millimetri, non hanno che qualche centesimo di millimetro di larghezza. Così negli echini vi erano molti tubi di *Rhizosolenia* di pareti fragilissime, per cui non una sola volta il disserente li ha incontrati nei moltissimi scandagli e fanghi marini da lui medesimo esaminati. Ma in seguito si è ottenuta altra prova più evidente che le Diatomee ritrovate fra i contenuti di quelli animali devono essere state ingurgitate non in condizione fossile o semifossile, ma in stato di vegetazione. Sottomesso al microscopio alquanto di quei materiali bruti in condizione diluita, alcuna rara Diatomea fu veduta, che conservava all'interno della cellula il protoplasma colorato in giallo dall'endocroma. Non può quindi rimaner dubbio che quelle Diatomee abbiano vegetato in fondo al mare, a meno che non si pensasse che quelle abbiano vissuto alla superficie, e abbandonate dalla vita siano precipitate al fondo in così breve tempo da conservare il loro protoplasma e l'endocroma. Ma l'inammissibilità di così celere precipitazione venne a lungo e dettagliatamente dimostrata con argomenti dedotti dalla struttura delle Diatomee, dal rapporto fra il peso specifico delle medesime e quello dell'acqua marina, dal confronto con quanto accade con le pol-

veri atmosferiche, e da più altri argomenti e confronti, per i quali il disserente ritenne dimostrato non solamente che la precipitazione della Diatomea morta non potrà aver luogo in tempo più breve di quello determinato dalla decomposizione del protoplasma, ma che la discesa della cellula diatomacea alla suindicata profondità non potrà non esigere un tempo estremamente e incalcolabilmente lungo.

CASTRACANE, Conte Ab. F. – *Sulle fermentazioni sotto pressione, studi del socio Sig. A. Certes:*

Il Presidente a nome del socio corrispondente Sig. Adriano Certes fece conoscere all'Accademia alcuni interessantissimi risultati ottenuti sull'argomento delle fermentazioni sotto pressione. Tali esperienze furono eseguite nel laboratorio di Pasteur a mezzo dell'apparecchio di Caillotet, coadiuvato dal Dr. Cochin. L'importanza di tali ricerche apparisce evidente quando si riflette che mentre un tempo con il nome di fermentazione si intendeva soltanto la trasformazione dello zucchero in alcool, ora invece con tal nome si comprendono tutti i fenomeni, per i quali un organismo superiore, abbandonato dalla vita, presta l'alimento ad altri organismi di ordine inferiore, i quali sembrano avere lo scopo provvidenziale di ricondurre la materia organica allo stato elementare. Quanto la teoria della fermentazione sia stata sviluppata e trasformata dalle ricerche dell'illustre Pasteur, il quale alla teoria chimica sostituì la vitalistica, riconoscendo nell'agente delle fermentazioni tutte, alcooliche, acetiche, lattiche, panarie, putride e quante altre si vogliano, un principio organizzato vitale, nessuno può ignorarlo. Però questi fenomeni che si svolgono sotto i nostri occhi avranno egualmente luogo negli abissi marini, che sappiamo popolati da innumerevoli animali? Questo è ciò che si è proposto elucidare sperimentalmente il valente Sig. Certes. Questi ha incominciato dallo sperimentare l'azione del lievito su una soluzione zuccherina assoggettata a pressioni enormi di più centinaia di atmosfere; e ne è venuto alle seguenti conclusioni: 1.° Che la vitalità del lievito non è distrutta dalla pressione prolungata di 300 e 400 atmosfere, purchè la pressione e la decompressione si operi lentamente; 2.° Che la fermentazione si opera a quelle grandi pressioni, però quella è più lenta, ciò che sarà elucidato dosando lo zucchero o l'alcool; 3.° Finalmente che l'acido carbonico sviluppato sotto queste alte pressioni si trova in uno stato di equilibrio particolare, per cui al principio non si manifesta, per lo che alcuni osservatori ne furono ingan-

nati. Che se, per esempio, si rompa l'estremità del tubo capillare, per il quale si trasmette la pressione, subito ha luogo uno sviluppo abbondante di gas, e il tubetto si vuota in qualche secondo, con una bottiglia di vino di Champagne. Il Sig. Certes si è messo su così bel cammino, nel quale non vorrà certamente arrestarsi; e ne ritrarrà la ricompensa del plauso di tutti quelli che si interessano all'allargamento delle nostre cognizioni su quanto accade nei più profondi, inaccessibili abissi del mare.

De Rossi, Prof. M. S. – *Presentazione di una memoria del socio P. T. Bertelli*:

Il Segretario a nome del ch. P. Timoteo Bertelli, socio corrispondente, presentò una Memoria col titolo: « Risposta ad alcune antiche e nuove » obbiezioni contro le osservazioni microsismiche, e riflessioni sull'origine e » forma delle manifestazioni endodinamiche », che verrà pubblicata nel volume I delle Memorie.

Boncompagni, D. B. – *Presentazioni diverse*:

Il Principe D. B. Boncompagni presentò all'Accademia, da parte del P. Pepin socio corrispondente, l'originale manoscritto d'un suo lavoro intitolato « Solution des deux équations $13x^4 - 11y^4 = zz^2$, $8x^4 - 3y^4 = 5z^2$; » par le P. Théophile Pepin, S. J. », che viene pubblicato negli Atti della presente sessione.

Presentò anche un esemplare di ciascuna delle pubblicazioni seguenti:

1. UN MODO || DI || FORMAZIONE DELLA GRANDINE || NOTA || DEL PROF. GIOVANNI LUVINI || Estratto dalla *Rivista Scientifico-Industriale* || diretta dall'Ing. G. VIMERCATI. In-8°, di 16 pagine, nella 16ª delle quali (lin. 15) si legge: « 887–1874. Firenze, Tip. dell'Arte della Stampa ».

2. ORIGINE DELL'ELETTRICITA' DELL'ARIA || DELLE NUBI TEMPORALESCHE || E DELLE ERUZIONI VULCANICHE || PER || GIOVANNI LUVINI || Prof. di Fisica a Torino || Estratto dalla *Rivista Scientifico-Industriale* || diretta dall'Ing. G. Vimercati. In-8°, di 25 pagine, nell'ultima delle quali (lin. 21) si legge: 1124. – Firenze, » Tip. dell'Arte della Stampa, Via Pandolfini, 14, diretta da S. Landi ».

3. RELAZIONE || TRA LE || RADICI DI ALCUNE EQUAZIONI || FONDAMENTALI DETERMINANTI || NOTA || DI || P. TARDY. || TORINO || ERMANNO LOESCHER. || Libraio della R. Accademia delle Scienze || 1884. In–8°. di 16 pagine, nella 2ª delle quali si legge: « Estr. dagli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, Vol. XIX. || » Adunanza del 25 Maggio 1884. || TORINO, STAMPERIA REALE || DI G. B. Paravia e C. ».

4. NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE. || *Intorno alla vita ed ai lavori di Antonio-*

Carlo-||*Marcellino Poullet-Delisle*; *Notizie raccolte da* || *B. Boncompagni.* In-8°, di 2 pagine, nella 2ª delle quali (lin. 32–33) si legge: « (Extrait des » *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3ᵉ série, t. III; 1884.) || 9789 Paris. – » Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55 », firmato (pag. 2ª, lin. 31) « ARISTIDE MARRE » Recensione di un lavoro intitolato « INTORNO || » ALLA VITA ED AI LAVORI || DI || ANTONIO CARLO MARCELLINO POULLET-DELISLE, » ecc. indicato più oltre.

5. Jahrbuch || über die || Fortschritte der Mathematik || im Verein mit anderen Mathematikenn || und unter besonderer Mitwirkung der Herren || Felix Müller und Albert Wangerin || herausgegeben || von || Carl Ohrtmann. || Vierzehnter Band || Jahrgang 1882 || (In 3 Heften) || Heft 1 || Berlin, || Druck und Verlag von Georg Reimer. || 1884.

6. INTORNO AD UNA LETTERA || DI || CARLO FEDERICO GAUSS || AL || D.R ENRICO GUGLIELMO MATTIA OLBERS || MEMORIA || DI B. BONCOMPAGNI, ecc., ESTRATTO DAGLI *ATTI DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI* || TOMO XXXVI. – ANNO XXXVI, SESSIONE VIIª DEL 20 MAGGIO 1883. || ROMA || TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE. || Via Lata, N.° 3. || 1884. In-4°, di 96 pagine.

7. INTORNO || ALLA VITA ED AI LAVORI || DI || ANTONIO CARLO MARCELLINO POULLET-DELISLE || NOTIZIE RACCOLTE || DA B. BONCOMPAGNI || ESTRATTO DAL *BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA* || *DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE*, || TOMO XV. – NOVEMBRE 1882. || ROMA || TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE || Via Lata, N. 3. || 1883. In-4°, di 12 pagine.

8. CASSINI GIAN DOMENICO. In-8°, di 12 pagine, nella 12ª delle quali si legge: « Estratto dal *Giornale degli Eruditi e dei Curiosi* || Vol. IV, pag. 269–276. » Padova 1884, Tipografia Crescini », contenente notizie intorno ad un poema astronomico di Gian Domenico Cassini.

9. IL MATEMATICO P. FRANCESCO LUINO. In-8°, di 4 pagine nella 2ª delle quali si legge: « Estratto dal *Giornale degli Eruditi e dei Curiosi.* || Vol. V, » pagg. 48–49. || Padova 1884, Tipografia Crescini », in risposta ad un quesito fatto nel giornale medesimo.

10. Extrait de la *Revue des questions scientifiques*, Octobre 1884. In-8°, di 4 pagine, nell'ultima delle quali (lin. 9) si legge: « Bruxelles. – A. VROMANT, imprimeur éditeur, rue de la Chapelle 3 », firmata (pag. 4ª, lin. 8) « MANSION », e contenente una recensione fatta dal Sig. Prof. Paolo Mansion delle tre pubblicazioni seguenti: LETTRE || DE || CHARLES-FRÉDÉRIC GAUSS || AU || D.R HENRI-GUILLAUME-MATHIAS OLBERS, ecc., BERLIN, ecc., MDCCCLXXXIII. Riproduzione fotolitografica, in 4.° p.°

LETTERA ‖ DI ‖ CARLO FEDERICO GAUSS ‖ AL ‖ D.[R] ENRICO GUGLIELMO MATTIA OLBERS, ecc., 1883. In-4.° (1)

INTORNO AD UNA LETTERA ‖ DI ‖ CARLO FEDERICO GAUSS ‖ AL ‖ D.[R] ENRICO GUGLIELMO MATTIA OLBERS, ecc. ROMA, ecc. 1884. In-4.° (2)

11. ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE. ‖ (Extrait des Bulletins, 3.[me] série, tome VIII, n.[os] 9–10, 1884.) ‖ CLASSE DES SCIENCES. In–8°, di due pagine, nella seconda delle quali (lin. 26) si legge: « Imprimerie de F. HAYEZ, Bruxelles, rue de Louvain, 108 », contenente una nota del Sig. Prof. Eugenio Carlo Catalan, relativa specialmente alla terza delle dette tre pubblicazioni relative al Gauss.

CASTRACANE, Conte Ab. F. – *Presentazioni di note*:

Il Presidente presentò da parte del Sig. A. Certes socio corrispondente le seguenti Note a stampa: 1.° « De l'action des hautes pressions sur les » phénomènes de la putréfaction et sur la vitalité des micro-organismes » d'eau douce et d'eau de mer: » 2.° « Parasites et commenseaux de l'huitre » (note complémentaire.) »

DE ROSSI, Prof. M. S. – *Presentazioni di note*:

Il Segretario presentò da parte degli autori, soci corrispondenti, le seguenti note a stampa: 1.° « Quelque théorème d'arithmétique, per E. Catalan ». 2.° « Problèmes et théorèmes de probabilités, par Eugène Catalan ». 3° « Note sur le théorème de Lambert; par M. E. Catalan. » 4.° « Stonyhurst College Observatory. – Results of meteorological and magnetical » observations by the Rev. S. J. Perry, S. J., F. R. S. » 5° « Zur » Geschichte der Gregorianischen Kalenderreform, von Repetent Dr. Schmid, » III, Nachtrage » 6.° « Crónica científica, revista internacional de cien- » cias, Director D. R. Roig y Torres. »

Il socio Prof. G. Tuccimei propose all'Accademia di inviare al socio corrispondente Prof. G. Meneghini una lettera di congratulazione per il cinquantesimo anniversario del suo insegnamento. La proposta venne unanimemente approvata; ed il Segretario fu incaricato di trasmettere al nostro illustre socio Prof. Meneghini i sentimenti di felicitazione del corpo accademico.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI: Conte Ab. Francesco Castracane, Presidente. – P. G. Foglini. –

(1) Un esemplare di ciascuna di queste due pubblicazioni fu presentata all'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei, nella Sessione 7.[a] dei 20 Maggio 1883. (Vedi ACCADEMIA PONTIFICIA ‖ DE'NUOVI LINCEI ‖ ANNO XXXVI (1882—83) ‖ Sessioni V.[a], VI[a] e VII[a], pag. 3.

(2) Vedi sopra, n. 6.

Ing. A. Statuti. - P. F. S. Provenzali. - Cav. F. Guidi. - Prof. G. Tuccimei. - D. B. Boncompagni. - Prof. M. S. De Rossi.
AGGIUNTI: March. L. Fonti.

L'Accademia apertasi legalmente alle ore 2 1/2 p. venne chiusa alle 4 1/2 p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1883. — Berlin, 1884., in-4°
2. *Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Classe der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften*. München 1884. In-4.°
3. *Académie Commerciale catholique de Montreal. Année académique* 1876—77. Montréal, 1877.
4. *Almanach dar Koeniglich Bayerischen Akademie der Wissenschaften für das Jahr* 1884. München.
5. AMENDUNI (G.) — *Sulle opere di bonificazione della plaga litoranea dell'agro romano, ecc., Testo.* - Roma, 1884. In-4°
6. —— *Tavole.* — Roma, 1884.
7. *Archives de Musée Teyler.* — Série II. — Quatrième Partie. — Haarlem, 1883, in-8.°
8. *Atti della Accademia Olimpica di Vicenza.* — 1° e 2° Semestre 1882. — Vol. XVII. — Vicenza, 1882. In-8°
9. *Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania.* — Catania, 1883. In-4°
10. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXI, 1883—84. — Serie terza — Transunti — Vol. VIII. — Fasc. 15, 16. — Roma, 1884, in-4°
11. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.* — Vol. XIX, disp. 4—7. Torino 1884. In 8.°
12. *Atti della Reale Accademia Lucchese di scienze, lettere ed arti.* — T. XXIII. — Lucca, 1884, in-8°
13. *Atti della Società crittogamologica italiana.* — A. XXVII. — Serie Seconda, Vol. III. — Disp. III, — Varese, 1884. In-8°
14. *Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.* — T. II. — Serie VI. — disp. 4—9. Venezia, 1883—84, in-8°
15. BACHMETIEFF (B. E.) — *Meteorologische Beobachtungen, etc.*, Moskau, 1883. In-4,°
16. *Boletin de la Academia nacional de ciencias en Córdoba.* — T. VI. — Entr. 2ª y 3ª — Buonos Aires, 1884. In-8.°
17. *Bollettino dell'Osservatorio della Regia Università di Torino.* — A. XVIII (1883). Torino, 1884. In-4.°
18. *British Association for the Advancement of science. Montreal Meeting.* — Montreal, 1884. In-8.° — *Report on conveyance.* — *List of Hotels, etc.* — *Programme of local arrangements.* — *Second list of Members and Associates* — *Enquiries respecting public education.* — *Special excursions.* — *Visit to the City ot Quebec.*
19. BONCOMPAGNI D. B. — *Intorno ad una lettera di Carlo Federico Gauss al D. Enrico Guglielmo Mattia Olbers.* — Roma, 1884. In-4.°
20. —— *Intorno alla vita ed ai lavori di Antonio Carlo Marcellino Poullet-Delisle.* — Roma, 1883. In-4.°
21. —— *Cassini Gian Domenico.* — Padova, 1884. In-8.°
22. —— *Il matematico P. Francesco Luino.* — Padova, 1884. In-8.°
23. *Bulletin astronomique et météorologique de l'observatoire impérial de Rio de Janeiro.* — Déc. 1883, n.° 12. — Rio de Janeiro, 1883. In-4.°

24. *Bulletin de la Société académique Franco-Hispano-Portugaise de Toulouse.* — T. IV, 1883, n. 3, 4. — *Statuts et règlements.* — Toulouse, 1883. In-8.°
25. *Bullettin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou.* — A. 1883. — n.° 3. — Moscou, 1884. In-8.°
26. *Bullettino della R. Accademia medica di Roma.* — A. X. — n. 3—7. — Roma, 1884, in-8.°
27. *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche.* — T. XVI, Dic. 1883. — T. XVII, Gennaio, Febbraio, 1884. — Roma, 1884. In-4.°
28. CAHIS Y BALMANYA (D. M.) — *Concepto cientifico de la Homeopatia.* — Barcelona, 1883. In-8.°
29. *Catalogo della esposizione collettiva del Ministero dei Lavori Pubblici alla Esposizione nazionale di Torino del 1884.* In-8.°
30. CATALAN (E.) — *Note sur le théorème de Lambert.* — Paris. 1884. In-8.°
31. —— *Recensione di una memoria del Principe D. B. Boncompagni intitolata « Intorno ad una lettera di Carlo Federico Gauss.* — Bruxelles, 1884. In-8.°
32. —— *Quelques théoremes d'arithmetique.* — Bruxelles, 1884. In-4.°
33. —— *Problèmes et théorèmes de probabilités.* — Bruxelles, 1884. In-4.°
34. *Cenni monografici dei singoli servizi dipendenti dal Ministero dei Lavori Pubblici per gli anni* 1881, 1882, 1883. — Roma, 1884. In f.°
35. CERTES (A.) — *De l'action des hautes pressions sur les phénomènes de la putréfaction et sur la vitalité des micro-organismes d'eau douce et d'eau de mer.* — Paris, 1884, In-4.°
36. —— *Parasites et commensaux de l'huitre (Note complémentaire).* — Paris, 1883. In-8.°
37. CHARRIER (A.) — *Effemeridi del Sole, della luna, e dei principali pianeti per l'anno* 1884 : idem *per l'anno* 1885.
38. *Crónica cientifica.* — A. VII. N. 162, 164, 166—168. — Barcelona, 1884. In-8.°
39. DAHL (B.) — *Die Lateinische Partikel VT.* Kristiania, 1882. In-8.°
40. DORNA (A.) — *Prime osservazioni con anelli micrometrici all'osservatorio di Torino.* — *Nota sulla determinazione dei raggi degli anelli micrometrici con stelle.* — Torino, 1884. In-8.°
41. —— *Nuovo materiale scientifico e prime osservazioni con anelli micrometrici all'Osservatorio di Torino.* — Torino, 1884. In-8.°
42. FOLIE (F.) — *Douze tables pour le calcul des réductions stellaires.* — Bruxelles, 1883. In-4.°
43. HAUSHOFER (K.) — *Franz von Kobell.* — München, 1884. In-4.°
44. *Jahrbüch über die Fortschritte der Mathematik, etc.*, — Jahr, 1882. — Heft. 1. — Berlin, 1884, in-8.°
45. *Jahreshefte des Vereins fur vaterländische Naturkunde in Wurttemberg.* — Stuttgart, 1884. In-8.°
46. *Journal de la société physico-chimique russe.* — T. XVI. — n.° 6—8. — St. Pétersbourg, 1884, in-8.°
47. KUPFFER (C.) — *Gedächtnissrede auf Theodor L. W. von Bischoff.* — München, 1884. In-4.°
48. *La Civiltà Cattolica.* — A. XXXV, Serie XII, Vol. VI, quad. 816, Vol, VII, 817—823: Vol. XIII, quad. 824—828. — Firenze, 1884, in-8.°
49. LUVINI (G.) — *Un modo di formazione della grandine.* — Firenze, 1884. In-8.°
50. —— *Origine dell'elettricità nell'aria delle nubi temporalesche e delle eruzioni vulcaniche.* Firenze, 1884. In-8.°
51. MANSION (P.) — *Intorno ad una lettera di Carlo Federico Gauss al Dr. Enrico Guglielmo Mattia Olbers etc.* — *Rivista.* — Bruxelles, 1884. In 8.°
52. MARRE (A.) — *Intorno alla vita ed ai lavori di Antonio-Carlo-Marcellino Poullet-Delisle etc.* — *Rivista.* — Paris, 1884. In-8.°
53. *Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux.* — 2e Série, T. V, 3e cahier. — Paris, 1883. In-8.°
54. *Meteorologische Beobachtungen angestelt in Dorpat in den Jahren* 1877, 1878, 1879, 1880. Dorpat, 1884. In-8.°

55. PERRY (S. J.) — *Results of Meteorological and Magnetical Observations*, 1883. — Manresa 1884. In-8.° piccolo.
56. *Polybiblion. — Revue bibliographique universelle. — Partie littéraire.* — Juin — Novembre 1884: *Partie tecnique.* — Juin—Novembre 1884. — Paris, 1884, in-8.°
57. *Proceedings of the Royal Institution of Great Britain.* — n,° 76, 77. — London, 1883—84. In-8.°
58. *Publications of the Cincinnati Observatory. Observations of Comets*, 1880—82. — Cincinnati, 1883. In-8.°
59. *Puissance du Canada. Le grand Occident canadien.* Ottawa, 1882. In-8.°
60. RAYET. *Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde de Juin* 1882 *à Mai* 1883. Bordeaux 1883. In-8.°
61. *R. Comitato Geologico d'Italia.* — Bollettino n. 3—10: 1884. Roma, 1884, in-8.°
62. *Rendiconto delle sessioni dell'Accademia reale delle scienze dell'Istituto di Bologna.* Anno 1883—84. — Bologna, 1884. In-8.
63. *Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli.* — Aprile—Settembre 1884. — Napoli, 1884, in-4.°
64. REUSCH (H.) — *Silurfossiler og pressede Konglomerater.* — Kristiania, 1882. In-4.°
65. SARS (G. O.) — *Carcinologiscke Bidrag til Norges Fauna.* — Christiania, 1879. In-4.°
66. SCHMID. — *Zur Geschichte der Gregorianischen Kalenderreform.*
67. SIEBKE (H.) — *Enumeratio insectorum Norvegicorum,* — Christiania, 1880. In-8.°
68. *Sitzungberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* — I—XXXIX. Berlin, 1884, in-8.°
69. STADERINI (A.) — *Brevi cenni sopra due sistemi di schedario per catologhi.* — Roma, 1884. In-8.°
70. SPARAGNA (A.) — *Lettera di C. F. Gauss al Dr. E. G. M, Olbers etc. traduzione dal tedesco.*
71. STENERSEN (L. B.) — *Myntfundet fra Graeslid i Thydalen.* — Christiania, 1881. In-4.°
72. TARANTELLI (R.) — *Fiori e spine.* — *Origine, svolgimento ed effetti del sapere.* — Chieti, 1884. In-8.°
73. —— *La voce dell'amor fraterno.* — *Discorsi.* — Chieti, 1884. In-8.°
74. —— *Il mondo non è angusto.* — Chieti, 1884. In-8.°
75. TARDY (P.) — *Relazioni tra le radici di alcune equazioni fondamentali determinanti.* — Torino, 1884, In-8.°
76. TASSÉ (E.) — *Le Nord-Ouest: la province de Manitoba. etc.* — Ottawa, 1882. In-8.°
77. *Teuth Annual Report of the public Library and Gallery of Art committee.* 1883—84. — Swansea, 1884. In-8.°
78. *The Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society.* Vol. III, Part VI, VII. Vol. IV. Part 1—4. — Dublin, 1883. In-8.°
79. *The scientific Transactions of the Royal Dublin Society.* Vol. I, XXII—XXV: Vol. III, I, II, III. — Dublin, 1884. In-4.°
80. *Three Middies Ashore, or a Land Cruise to the North.* — Montreal.
81. TORP. (A.) — *Die Flexion des Pali in ihrem Verhältniss zum Sanskrit.* — Christiania, 1881. In-8.°
82. TRAVAGLINI (T.) — *Il sacro volume biblico tradotto e commentato secondo la mente della Chiesa Cattolica*, Fasc. 1.° — Vasto, 1884. In-4.°
83. *Verhandlungen und Mittheilungen des Siebenbürgischen Vereins fur Naturwissenschaften in Hermannstadt, XXXIV Jahrgang.* — Hermannstadt, 1884. In-8.°
84. VIMERCATI (G.) — *Rivista scientifico-industriale. etc.* A. 1883. — Firenze, 1883. In-8.°
85. ZANON (G.) — *Analisi delle ipotesi fisiche.* — Venezia, 1885. In-8.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE IIª DEL 18 GENNAIO 1885

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE
DEGLI ANTELMINELLI

MEMORE E NOTE

DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

ÉTUDE SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES NUMÉRIQUES DANS LEUR RELATION AVEC LA RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES;

I. On sait, par la *Règle des signes de Descartes,* qu'une équation algébrique, rationnelle et entière, ne peut avoir plus de racines réelles positives qu'elle ne présente de variations, ni plus de racines réelles négatives que sa transformée en $-x$ n'offre elle-même de variations. Mais cette Règle ne dit pas si une telle équation peut *toujours,* quelle qu'en soit l'espèce, atteindre cette double limite maxima, moyennant des valeurs numériques convenables attribuées aux coefficients de ses différents termes. Il y a là une question élémentaire qui semble n'avoir pas été étudiée et qui n'est pas sans intérêt au point de vue doctrinal.

La question dont il s'agit peut s'énoncer ainsi:

Peut-on toujours former des équations numériques d'une espèce et d'un degré donnés, telles qu'on soit certain à priori qu'elles possèdent effectivement un nombre prévu de racines réelles et de racines imaginaires, respectivement?

Il est clair que si le degré de l'équation était seul imposé et non son *espèce* (1), il n'y aurait pas, à vrai dire, de question; car il suffirait, une

(1) *L'espèce* d'une équation est déterminée par les signes de ses termes successifs et par la parité ou l'imparité de leurs exposants.

fois les racines choisies arbitrairement, de former le produit de facteurs connus, du premier et du second degrés, pour obtenir une équation satisfaisant à cette vague condition. Mais le problème est tout autre, si l'équation qu'on propose d'écrire, non seulement doit posséder un nombre déterminé de racines réelles, positives et négatives, et de racines imaginaires, mais encore est astreinte à présenter dans ses différents termes (dont quelques-uns peuvent manquer intentionnellement) une succession déterminée de signes. Car il est évident qu'en formant le produit dont il vient d'etre parlé, avec des facteurs composés de racines prises au hasard, la succession des signes y serait, en général, très différente de celle qui aurait été demandée, et, en outre, que si certains termes y manquaient par hasard, ce serait à des places quelconques et non à celles désignées par l'énoncé du problème.

II. Afin de procéder méthodiquement, il convient d'examiner d'abord le cas où l'équation qu'il s'agit de former doit être *complète*. Dans ce cas, le problème est toujours susceptible, et même d'une infinité de manières différentes, d'être résolu par un procédé uniforme et simple. Quant aux équations *incomplètes*, la solution est plus délicate; elle se complique même si rapidement, au fur et à mesure que s'accroît le nombre des termes absents, qu'on ne saurait se flatter de découvrir, comme dans l'autre cas, une démonstration générale et un procédé de calcul uniforme. Toutefois la marche à suivre dans chaque cas particulier peut être indiquée et mise en lumière, comme on aura soin de le faire dans la suite de cette Étude, à l'aide d'exemples variés.

§ I. *Équations complètes.*

III. La solution de la question proposée, repose, dans ce cas, sur les deux lemmes suivants:

Lemme I. *Le produit d'un polynôme algébrique* $f(x)$, *entier, rationnel, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la variable* x, *et complet, de degré* m, *par le binôme* $(x \pm a)$, *se compose d'un premier terme* $+x^{m+1}$, *suivi de* $m+1$ *termes dont les signes sont les mêmes (pour* $x+a$), *ou inverses (pour* $x-a$), *que ceux de mêmes degrés respectifs dans* $f(x)$, *à la seule condition que le nombre* a *soit plus grand qu'une limite inférieure facile à déterminer d'après les valeurs des coefficients de* $f(x)$.

En effet, soient $\pm px^r \pm qx^{r-1}$, deux termes consécutifs quelconques de $f(x)$. Le terme en x^r dans le produit sera

$$(\pm pa \pm q)\,x^r, \text{ si le multiplicateur est } x+a\,; \text{ et}$$

$$(\mp pa \pm q)\,x^r, \text{ si le multiplicateur est } x-a.$$

Si l'on donne à l'ensemble de la parenthèse le signe dont pa est affecté, on aura

$\pm (pa \pm q)\, x^r$, dans le premier cas, et

$\mp (pa \mp q)\, x^r$, dans le second.

Chaque parenthèse se composera donc, sauf pour les termes extrêmes, de deux termes, dont le premier, ayant a pour facteur, y sera toujours positif, tandis que le signe qui régit toute la parenthèse sera le même que celui de px^r dans $f(x)$, si le multiplicateur a été $x+a$, et inverse de celui-ci, lorsque le multiplicateur est $x-a$.

Il suffit donc, pour satisfaire aux conditions du lemme, que la valeur numérique de la somme algébrique des deux termes soit plus grande que zéro *dans chaque parenthèse*, abstraction faite du signe qui régit cette parenthèse elle-même. Or il en sera d'abord ainsi pour toutes celles où le terme q se présentera avec le signe $+$, et il n'y a point à s'en occuper. Quant aux autres, chacune d'elles donne lieu à une condition de la forme $pa > q$, d'où $a > \frac{q}{p}$. Il suffira donc qu'on prenne a plus grand que le plus grand de tous les nombres fractionnaires $\frac{q}{p}$, qui expriment le quotient d'un coefficient quelconque de $f(x)$ divisé par la coefficient qui le précède immédiatement, s'il a un signe contraire au sien. Supposons, par exemple, qu'on ait $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 10$, et que le multiplicateur soit $x+a$, on aura pour produit

$$F(x) = x^4 + (a-3)\, x^3 - (3a-7)\, x^2 + (7a+10)\, x + 10\, a,$$

et l'on voit que les signes de $f(x)$ seront conservés dans les termes de mêmes degrés de $F(x)$, si l'on prend

$$a > 3,\ > \tfrac{7}{3};\ \text{donc } a > 3.$$

$f(x)$ restant le même que ci-dessus, si le multiplicateur est $x-a$, on trouve pour le produit, en y écrivant chaque terme avec un signe contraire à celui de même degré dans $f(x)$:

$$F(x) = x^4 - (a+3)\, x^3 + (3a+7)\, x^2 - (7a-10)\, x - 10a,$$

où la seule condition qu'il y ait lieu de satisfaire est $7a > 10$, d'où $a > \frac{10}{7}$.

Lemme II. — *Le produit d'un polynôme* $f(x)$, *défini comme ci-dessus, par le trinôme* $x^2 \pm cx + d$, *se compose de deux termes*

$$+\, x^{m+2} \pm (p_1 \pm c)\, x^{m+1},$$

suivis de $m+1$ *termes, dont les signes sont les mêmes, respectivement, que ceux de mêmes degrés dans* $f(x)$, *si le nombre* d *est choisi plus grand que la plus grande des quantités* $\mp\left(\frac{t \mp qc}{p}\right)$, p, q, t, *étant les va-*

leurs absolues des coefficients de trois termes consécutifs quelconques de f(x).

La démonstration de ce lemme étant analogue à celle du précédent, il serait superflu de la répéter ici. Il suffira d'offrir un exemple. Soit encore

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 10,$$

à multiplier par $x^2 \pm cx + d$, on trouve pour le produit

$$F(x) = x^5 (\pm c - 3)\, x^4 + (d \mp 3c + 7)\, x^3 - (3d \mp 7c - 10)\, x^2 + (7d \pm 10c)\, x + 10d,$$

et par conséquent on satisfera à la condition requise, en prenant d plus grand que la plus grande des quantités de signe contraire, par exemple, si c est positif, plus grand que $\frac{7c + 10}{3}$. Quant au nombre c, il sera pris > 3, si le terme en x^4 doit être positif, et, au contraire, < 3, si ce terme doit être négatif.

IV. Ces préliminaires établis, la solution du problème posé au § I ne présente plus de difficultés, lorsque l'équation est complète.

Supposons, en premier lieu, que toutes les racines de l'équation doivent être réelles, et que cette équation ait la forme

$$F(x) = x^m \pm p_1\, x^{m-1} \pm \ldots\ldots + px^7{}_{m-7} + p_{m-6}\, x^6 = p_{m-5}\, x^5 +$$
$$+ p_{m-4}\, x^4 + p_{m-3}\, x^3 - p_{m-2}\, x^2 - p_{m-1}\, x + p_m = 0.$$

Les deux derniers termes présentant la succession de signes $- +$, on prendra comme point de départ le binôme $-x + a$ ou, par inversion, $x - a$, et l'on y fera, pour plus de simplicité dans les calculs ultérieurs, $a = 1$.

Adjoignant le terme en x^2, qui est de même signe que celui en x, et inversant les signes, on voit qu'il s'agit de former une équation du second degré, où les signes se succèdent dans l'ordre $+ + -$, et dont l'un des facteurs linéaires soit $x - 1$. Il faut donc multiplier $(x - 1)$ par le binôme $x + a$, ce qui donne (a étant ici une nouvelle indéterminée):

$$x^2 + (a - 1)\, x - a,$$

et pour que les signes écrits soient conservés, on doit prendre $a > 1$. Si l'on veut que les racines successives soient des nombres entiers et les moindres possibles, on fera $a = 2$, d'où

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Adjoignant le terme en x^3, qui est positif, l'équation qu'il s'agit de former, à l'aide de la précédente, devra présenter la succession de signes $+--+$, ce qui montre que le nouveau facteur linéaire à introduire doit être $x-a$, et donne

$$x^3 - (a-1)\,x^2 - (a+2)\,x + 2a$$

avec la condition $a > 1$, afin que les signes écrits soient effectivement conservés. Soit donc $a = 2$, il vient, pour l'équation cubique cherchée :

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)\;(x-2)\;(x+2) = 0.$$

L'adjonction du terme en x^4 entraîne l'intervention d'un facteur $x+a$, puisque ce terme est de même signe que celui en x^3 dans la proposée $\mathrm{F}(x) = 0$. Le produit est

$$x^4 + (a-1)\,x^3 - (a-4)\,x^2 - 4\,(a-1)\,x + 4a = 0.$$

On devra donc, pour conserver les signes, prendre $a > 1$. Si l'on fait $a = 2$, l'équation aura deux racines égales. Si l'on veut des racines inégales, soit pris $a = 3$, ce qui donne pour l'équation transitoire en x^4 :

$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = (x-1)\;(x-2)\;(x+2)\;(x+3) = 0.$$

L'adjonction du terme en x^5 oblige à inverser les signes de l'équation précédente, puisqu'il est de signe contraire à celui en x^4. Le nouveau facteur linéaire sera donc $x-a$, ce qui donne

$$x^5 - (a-2)\,x^4 - (2a+7)\,x^3 + (7a-8)\,x^2 + (8a+12)\,x - 12\,a = 0,$$

et exige qu'on prenne $a > 2$. Soit $a = 3$, il vient

$$x^5 - x^4 - 13\,x^3 + 13\,x^2 + 36\,x - 36 = (x-1)\;(x-2)\;(x-3)\;(x+2)\;(x+3) = 0.$$

L'adjonction du terme en x^6, qui est positif, nécessite l'intervention du facteur $x-a$, et de la sorte les signes, qui avaient été inversés dans l'équation en x^5, seront rétablis. Il vient

$$x^6 - (a+1)\,x^5 + (a-13)\,x^4 + 13\,(a+1)\,x^3 - (13a-36)\,x^2 - 36\,(a+1)\,x + 36a = 0,$$

et l'on voit que l'on doit prendre $a > 13$. Soit $a = 14$, on trouve pour l'équation transitoire en x^6 :

$$x^6 - 15x^5 + x^4 + 195x^3 - 146x^2 - 540x + 504 = (x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-14)\,(x+2)\,(x+3) = 0.$$

On continuera d'après la même procédé, en adjoignant successivement les termes en x^7, x^8, ... etc. ... x^{m-1}, x^m, et employant à chaque fois, soit le facteur $x+a$, soit le facteur $x-a$, selon que le nouveau terme introduit a dans $F(x)$, le même signe, ou un signe contraire, que celui qui le suit, et, de la sorte, on parviendra à une équation en x^m, ayant les signes prescrits et toutes ses racines réelles, et même, si l'on veut, entières et les moindres possibles. La question proposée se trouve ainsi résolue, de la manière la plus générale et la plus simple, par un procédé uniforme, dans le cas où l'équation complète, dont l'espèce est donnée, doit avoir toutes ses racines réelles.

V. Il faut maintenant examiner le cas où cette même équation doit avoir des racines imaginaires. Ces racines devant alors être conjuguées deux à deux, l'introduction successive de facteurs *linéaires* ne peut plus avoir lieu, en ce qui les concerne, et il faut recourir, pour chaque couple de ces racines, à un facteur du second degré de la forme $x^2 \pm cx + d$, introduisant deux racines à la fois, avec la condition $c^2 < 4d$.

Pour fixer les idées, supposons que l'équation proposée, du septième degré, doive avoir deux racines imaginaires et soit de l'espèce.

$$F(x) = x^7 - p_1 x^6 - p_2 x^5 + p_3 x^4 + p_4 x^3 - p_5 x^2 - p_6 x + p_7 = 0.$$

Le moyen le plus simple de résoudre la question consiste à former une équation auxiliaire du $3^{ème}$ degré, ayant deux racines imaginaires et présentant, comme les quatre derniers termes de $F(x)$, la succession de signes $+ - - +$. On choisit ici l'équation du 3^e degré, parce que le terme en x^3, savoir $p_4 x^3$, est positif dans $F(x)$. Si c'eût été le terme en x^2, on aurait pris directement une équation du 2^e degré comme équation auxiliaire, ce qui ne serait pas possible dans le cas présent, puisqu'après avoir inversé les signes des trois derniers termes, le terme constant p_7 devient négatif, circonstance qui est incompatible avec l'existence de deux racines imaginaires dans une équation du second degré.

On trouve aisément que l'équation cubique

$$(x^2 - 3x + 4)(x + 2) = x^3 - x^2 - 2x + 8 = 0,$$

satisfait aux deux conditions demandées. Nous la prendrons pour point de départ. Il suffit, cela fait, d'introduire successivement, à l'aide de facteurs linéaires, quatre autres racines réelles, en faisant usage du procédé déjà

exposé. On trouve ainsi, en prenant à chaque fois, le moindre nombre entier compatible avec les conditions du problème, que l'équation

$$\varphi(x) = (x+2)(x+5)(x+5)(x-5)(x-5)(x^2-3x+4) =$$
$$= x^7 - x^6 - 52\,x^5 + 53\,x^4 + 725\,x^3 - 1026\,x^2 - 1250\,x + 5000 = 0,$$

satisfait à l'énoncé, en admettant deux racines égales positives, et deux racines égales négatives.

Supposons, en second lieu, que l'équation $F(x)$ ci-dessus doive avoir quatre racines imaginaires et seulement trois racines réelles.

On pourra profiter de ce que le terme en x^4, dans $F(x)$, est positif, en même temps que le terme constant, pour attribuer les quatre racines imaginaires prescrites à une équation auxiliaire du 4ᵉ degré, presentant, comme la proposée dans ses cinq derniers termes, le succession de signes

$$+ + - - +.$$

A cet effet, on pourra combiner l'équation du second degré, employée dans l'exemple précédent, $x^2 - 3x + 4 = 0$, avec celle-ci : $x^2 + cx + d = 0$, où les coefficients c et d sont laissés indéterminés. Effectant le produit de ces deux trinômes, il vient

$$f(x) = x^4 + (c-3)\,x^3 - (3c - d - 4)\,x^2 - (3d - 4c)\,x + 4d = 0.$$

Les conditions auxquelles il y a lieu de satisfaire, moyennant des valeurs convenables de c et d, sont donc :

$$c^2 < 4d,$$

puisque les deux racines à introduire doivent aussi être imaginaires ; puis

$$c > 3\,;\ 3c > d + 4\,;\ c < \tfrac{3}{4}d.$$

On y satisfait évidemment en prenant $c = 4$ et $d > \frac{16}{3} < 8$. Par exemple, si l'on adopte les valeurs $c = 4$, $d = 6$, on a pour l'équation auxiliaire en x^4:

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2\,x^2 - 30\,x + 24 = (x^2 - 3\,x + 4)(x^2 + 4\,x + 6) = 0.$$

Il reste à introduire trois autres racines réelles. L'application du procédé exposé ci-dessus, montre que les conditions requises seront satisfaites par l'introduction successive des facteurs linéaires $(x-16)$, $(x+16)$, $(x-15)$, ce qui donne enfin

$$F(x) = (x-15)(x-16)(x+16)(x^2 - 3\,x + 4)(x^2 + 4\,x + 6)$$
$$= x^7 - 14\,x^6 - 273\,x^5 + 3584\,x^4 + 4826\,x^3 - 360\,x^2 - 121344\,x + 92160 = 0,$$

pour l'équation demandée.

VI. On voit, par ce qui précède, et sans qu'il soit utile de multiplier les exemples, que le même procédé s'appliquerait au cas où l'équation proposée, étant d'un degré quelconque supérieur au septième, devrait posséder plus de quatre racines imaginaires; son application étant d'ailleurs facilitée, dans tous les cas, par une adresse convenable à tirer parti, pour la formation des équations auxiliaires successives, des signes positifs que pourront présenter les termes intermédiaires de l'équation, ainsi qu'on l'a fait dans l'exemple ci-dessus.

VII. Lorsque l'équation proposée devra posséder le nombre maximum de racines imaginaires compatible avec son degré, c'est-à-dire toutes si le degré est pair, et toutes moins une s'il est impair, on résoudra aisément la question en prenant arbitrairement les valeurs numériques de tous les coefficients, sauf du dernier qui est indépendant de x, et en déterminant ensuite celui-ci, de telle que l'équation ainsi complétée ait le nombre maximum de racines imaginaires, c'est-à-dire en lui donnant une valeur numérique plus grande que celle de l'ordonnée maxima, de signe contraire au sien, que possède la courbe parabolique $y = F_1(x)$, en désignant par $F_1(x)$ le polynôme $F(x)$ privé de son dernier terme.

S'il s'agit, par exemple, de l'équation $x^3 - p_1 x^2 - p_2 x + p_3 = 0$, et qu'on y fasse $p_1 = 5$ et $p_2 = 7$. Comme le maximum *négatif* de $y = x^3 - 5x^2 - 7x$ est égal à $-44{,}01$, environ, on sera certain que l'équation $x^3 - 5x^2 - 7x + 45 = 0$, entre autres, n'a pas de racines réelles positives. Elle ne peut donc avoir qu'une seule racine négative, qu'on trouve être égale à $-2{,}87$.

Si l'équation proposée est

$$F(x) = x^7 - p_1 x^6 - p_2 x^5 + p_3 x^4 + p_4 x^3 - p_5 x^2 - p_6 x + p_7 = 0,$$

avec la condition de ne posséder qu'une seule racine réelle; on prendra, par exemple, $p_1 = 1$; $p_2 = 5$; $p_3 = 3$; $p_4 = 6$; $p_5 = 4$; $p_6 = 2$, et il suffira, pour résoudre la question, de prendre p_7 plus grand que l'ordonnée négative maxima de la courbe parabolique

$$y = x^7 - x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 2x,$$

par exemple $p_7 = 155$.

En résumé, lorsque l'équation proposée est complète, on peut toujours, quelle que soit la proportion des nombres de racines réelles et imaginaires qu'elle devra posséder, déterminer, d'une infinité de manières différentes, mais non arbitraires, les valeurs numériques de coefficients qui satisfassent

cette condition, et les développements dans lesquels nous venons d'entrer montrent comment peut se faire cette détermination.

On peut même satisfaire à la condition supplémentaire que l'équation ait un terme nul; car il suffira pour cela, après qu'on aura effectué le produit du polynôme auxiliaire de degré $m-1$ déjà trouvé, par le binôme $x \pm a$, de prendre pour valeur de l'indéterminée a celle du plus grand nombre fractionnaire $\frac{p}{q}$, parmi tous ceux exprimant le quotient d'un coefficient de $F(x)$ par le coefficient qui le précède immédiatement, si ce quotient est négatif, au lieu de prendre une valeur plus grande, comme on le fait lorsque l'équation doit être complète. Mais il y a lieu de remarquer que le terme qu'on ferait ainsi disparaître aurait son rang déterminé par les circonstances finales du calcul, et qu'ainsi ce rang ne pourrait être fixé à priori. Lorsque le rang du terme qui doit manquer est, au contraire, indiqué par les conditions de l'énoncé, le problème à resoudre se rattache à la formation des équations incomplètes, dont nous allons maintenant nous occuper.

SECONDE PARTIE

ÉQUATIONS INCOMPLÈTES.

VIII. La formation d'une équation numérique incomplète, dont le degré et l'espèce sont désignés, dérive, en thèse générale, des mêmes principes que ci-dessus, mais en introduisant dans leur application les modifications ou précautions nécessaires que cette circonstance nouvelle comporte. Celles-ci deviennent d'ailleurs de plus en plus nombreuses et compliquées, au fur et à mesure que s'accroît le nombre des termes qui, d'après l'énoncé du problème, doivent manquer dans l'équation, à des rangs déterminés.

Pour procéder méthodiquement, nous commencerons par le cas le plus simple, celui où il ne manque qu'un seul terme.

Il est clair qu'alors la marche tracée pour le cas des équations complètes, ne saurait être suivie telle quelle. En effet, l'obligation de satisfaire aux deux conditions:

1° que le terme désigné disparaisse,

2° que les valeurs numériques des coefficients des autres termes, comprises entre les parenthèses, soient *positives* en valeur absolue;
exige qu'on puisse disposer finalement de deux indéterminées, et non plus d'une seule.

En conséquence, le dernier multiplicateur ne saurait plus être un binôme du premier degré, de la forme $x \pm a$. Il devra consister en un trinôme du second degré, tel que $x^2 \pm cx \pm d$, c et d étant deux indéterminées dont la valeur numérique reste disponible. Le signe à attribuer à d, dans ce trinôme, dépendra d'ailleurs de celui dont le terme en x^{m-2} est affecté, dans l'équation proposée du degré m. Si celui-ci est positif, d devra être pris avec le signe $+$; s'il est négatif, d devra être pris avec le signe $-$. Quant au signe du terme cx, il pourra, selon le cas, être positif, ou négatif, où l'un et l'autre indistinctement.

On formera préalablement une équation auxiliaire $f(x) = 0$, numérique et du degré $m - 2$, dont le premier terme, x^{m-2} sera positif, tandis que tous les termes suivants seront affectés des mêmes signes que ceux de mêmes degrés respectifs dans la proposée $F(x) = 0$. Cela fait, on multipliera $f(x)$ par le trinôme $(x^2 \pm cx + d)$, si le terme en x^{m-2} est positif dans $F(x)$, et par le trinôme $(x^2 \pm cx - d)$ si le terme en x^{m-2} est négatif dans $F(x)$. Enfin on déterminera c et d, de façon à satisfaire, à la fois, à l'égalité qui résulte, dans le produit ainsi obtenu, de la condititi*o*n d'y rendre nul le coefficient du terme qui doit manquer, et à celle des inégalités qui emporte, par à fortiori, toutes celles de même nature, de façon que les valeurs absolues des coefficients de tous les termes soient positives, indépendamment du signe extérieur qui régit chacune des parenthèses qui en contiennent l'expression. On devra d'ailleurs, selon le cas, avoir aussi égard à la condition que les deux dernières racines à introduire ainsi simultanément soient réelles, ou imaginaires, c'est-à-dire $c^2 > 4d$, ou $c^2 < 4d$, lorsque d peut être pris avec le signe $+$, comme il a été expliqué plus haut.

En général, cette double indétermination de c et d suffira, comme on va le voir, pour obtenir, et même en nombre infini, la solution du problème.

IX. Pour mieux fixer les idées, nous prendrons comme exemple l'équation du septième degré

$$F(x) = x^7 - p_1 x^6 + p_2 x^5 - p_3 x^3 - p_4 x^2 + p_5 x + p_6 = 0,$$

où le terme en x^4 manque, et nous supposerons d'abord que l'équation nu-

mérique qu'il s'agit de former doive avoir toutes ses racines réelles, ce à quoi la Règle de Descartes ne s'oppose pas, puisque le terme absent est compris entre deux termes de signes contraires.

L'équation auxiliaire $f(x)=0$, à former préalablement, sera donc du type

$$f(x)=x^5-q_1x^4-q_2x^3-q_3x^2+q_4x+q_5=0,$$

où l'on donne, préférablement mais non pas nécessairement, le signe $-$ au terme en x^4, qui n'a pas son analogue dans $F(x)$.

L'une des équations numériques les plus simples qu'on puisse former, avec des racines entières et inégales, et qui soit de l'espèce requise, est la suivante:

$$f(x)=x^5-19x^4-149x^3-49x^2+580x+500=(x+1)(x+2)(x+5)(x-2)(x-25)=0,$$

à laquelle on arrive par le procédé expliqué dans la *Première Partie*.

Le terme en x^5 étant positif dans $F(x)$, c'est, comme il a été dit plus haut, le trinôme $x^2 \pm cx+d$, qui doit intervenir comme multiplicateur. Nous y adopterons le signe $-$ pour le terme cx, afin de satisfaire plus sûrement à la condition d'avoir un terme en x^6 négatif, ainsi que l'équation $F(x)=0$ le réclame. Effectuant le produit, il vient

$$\varphi(x)=f(x)(x^2-cx+d)=x^7-(c+19)x^6+(d+19c-149)x^5-(19d-149c+49)x^4-$$
$$-(149d-49c-580)x^3-(49d+580c-500)x^2+$$
$$+(580d-500c)x+500d=0.$$

Et les conditions auxquelles c et d doivent satisfaire sont les suivantes:

1° $c^2>4d$, puisque les deux racines à introduire doivent être réelles;

2° $19d-149c+49=0$, puisque le terme en x^4 doit disparaître;

3° enfin $d+19c>149$, car cette inégalité entraîne toutes les autres de même espèce. On en conclut

$$d=\frac{149c-49}{19};\ \text{puis}\ c^2>4\times\frac{149c-49}{19};\ \text{d'où}\ c>31,02\ldots..$$

Donc si l'on fait $c=32$, d'où $d=248,37$, il vient pour l'équation demandée

$$\varphi(x)=(x+1)(x+2)(x+5)(x-2)(x-13,24\ldots)(x-18,76\ldots)(x-25)=0,$$

qui, développée, satisfait à la succession requise des signes et dont les

sept racines sont les cinq de l'équation $f(x)$ ci-dessus et ces deux-ci $+13{,}24\ldots.$, $+18{,}76\ldots.$

Si l'on voulait que les coefficients de $\varphi(x)$ fussent tous des nombres entiers, on devrait prendre $c = 47 + 19i$, i étant un entier $\gtreqless 0$.

Comme second exemple, supposons que le terme manquant soit compris entre deux termes de même signe, comme dans l'équation

$$F(x) = x^7 - p_1x^6 + p_2x^5 + p_3x^3 - p_4x^2 + p_5x + p_6 = 0,$$

et que l'équation numérique à former ne doive pas avoir d'autres racines imaginaires que les deux qui lui sont imposées par la condition précitée.

On formera préalablement l'équation auxiliaire en x^5

$$f(x) = x^5 - 54x^4 + 502x^3 - 1248x^2 + x + 1806 = (x+1)(x-2)(x-3)(x-7)(x-43) = 0.$$

On introduira le trinôme $x^2 + cx + d$, où le terme cx est positif par un motif qui sera expliqué dans un moment. Effectuant le produit, on a

$$\varphi(x) = x^7 - (54 - c)\,x^6 + (d - 54c + 502)\,x^5 - (54d - 502c + 1248)\,x^4 +$$

$$+ (502d - 1248c + 1)\,x^3 - (1248d - c - 1806)\,x^2 + (d + 1806c)\,x + 1806d = 0,$$

et les conditions auxquelles on doit satisfaire sont les suivantes :

1.° $c^2 < 4d$, puisque les deux racines à introduire sont imaginaires ;

2.° $54d - 302c + 1248 = 0$, condition qu'il eût été impossible de réaliser, si l'on eût pris le terme cx avec le signe $-$;

3.° enfin les inégalités

$$c < 54\,;\; c < \frac{d + 502}{54}\,;\; c < \frac{502d + 1}{1248}\,;\; c < 1248d - 1806\,;\; d + 1806c > 0.$$

On reconnaît aisément que toutes ces conditions sont satisfaites, si l'on prend (entre autres valeurs moins simples)

$$c = 4,\ \text{d'où, à cause de } 2^\circ,\ d = 14{,}07\ldots..$$

XI. Si, dans l'exemple précédent, on eût attribué le signe + au terme q_1x^4 de l'équation auxiliaire $f(x)$, il est aisé de voir, en s'aidant au besoin de quelques considérations de géométrie, que le mode le plus simple de solution consisterait à attribuer les deux racines imaginaires que $F(x)$ doit posséder, à cette équation $f(x)$, le trinôme multiplicateur devant être ensuite $x^2 - cx + d$, avec la condition $c^2 > 4d$.

On trouve par exemple, sans difficulté,

$$f(x)=(x+1)(x-2)(x-3)(x^2+5x+20)=x^5+x^4+x^3-69x^2+50x+120=0,$$

qui est de l'espèce requise et possède trois racines réelles avec deux imaginaires. Et de là on conclut

$$\varphi(x)=f(x)(x^2-cx+d)=x^7-(c-1)x^6+(d-c+1)x^5+(d-c-69)x^4+(d+69c-50)x^3-$$
$$-(69d+50c-120)x^2+(50d-120c)x+120d=0,$$

dont toutes les conditions seront satisfaites en prenant $c>18,7.....$ Soit $c=20$, d'où $d=c+69=89$, il vient pour l'équation demandée

$$\varphi(x)=x^7-19x^6+70x^5+1519x^3-7021x^2+2050x+10680=0,$$

solution plus simple que celle obtenue précédemment (X) et où les coefficients sont tous entiers. On en pourrait former une infinité d'autres, et notamment une plus simple encore correspondante à $c=19$.

XII. Nous avons jusqu'ici supposé que le terme en x^{m-2} avait le signe + dans $F(x)$, comme le terme x^m lui-même. Il convient d'examiner actuellement le cas où ce terme x^{m-2} est négatif.

Soit, par exemple,

$$F(x)=x^5+p_1x^4-p_2x^3-p_3x+p_4=0,$$

où le terme manquant est compris entre deux termes de même signe.

L'équation auxiliaire serait ici, en y conservant, sauf pour le terme en x^3, les mêmes signes que dans la proposée,

$$f(x)=x^3\pm q_1x^2-q_2x+q_3=0.$$

Mais on peut aussi y inverser tous les signes, ce qui donne

$$f(x)=x^3\pm q_1x^2+q_2x-q_3=0,$$

et même y supposer $q_1=0$. On reconnait facilement aussi que le plus simple est alors d'attribuer à $f(x)$ les deux racines imaginaires que $F(x)$ doit posséder. L'équation

$$f(x)=(x-1)(x^2+x+2)=x^3+x-2$$

satisfait à ces conditions. Il reste, pour obtenir l'équation numérique de-

mandée $\varphi(x)$, à introduire deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative, ce qui se fera à l'aide du trinôme multiplicateur (x^2+cx-d). On obtient, en effectuant le produit,

$$\varphi(x) = x^5 + cx^4 - (d-1)\,x^3 - (d+2c)\,x + 2d = 0$$

avec les conditions $c-2=0$ et $d>1$, d'où $c=2$, et d quelconque >1. Soit $d=2$, on a, pour l'équation demandée, parmi une infinité d'autres:

$$\varphi(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 6x + 4 = (x-0{,}732)\,(x-1)\,(x+2{,}732)\,(x^2+x+2) = 0.$$

XIII. Dans ceux des exemples précédents, où l'équation proposée $F(x)=0$ a un terme manquant entre deux termes de même signe, nous avons supposé que l'équation numérique à former d'après ce type devait avoir toutes ses racines réelles, sauf deux. Mais on peut demander aussi qu'elle ait des racines imaginaires autres que ces deux-là, qui sont nécessaires. Soit, par exemple,

$$F(x) = x^7 + p_1x^6 - p_2x^5 - p_3x^3 - p_4x^2 + p_5x + p_6 = 0,$$

l'équation proposée, avec la condition que l'équation numérique demandée n'ait que trois racines réelles, négatives.

L'équation auxiliaire $f(x)$ du cinquième degré, qu'il faut former d'abord, devra donc posséder:

Soit trois racines réelles; et, dans ce cas, le trinôme multiplicateur final, devant introduire deux nouvelles racines imaginaires, sera nécessairement de la forme $x^2 \pm gx + h$, avec la condition $g^2 < 4h$; soit une seule racine réelle; et, dans ce 2^e cas, le trinôme multiplicateur final, devant introduire deux nouvelles racines réelles et négatives, sera de la forme x^2+gx+h, avec la condition $g^2 > 4h$.

Examinons ces deux cas, successivement.

1er *Cas*. On doit former d'abord

$$f(x) = x^5 + q_1x^4 - q_2x^3 - q_3x^2 + q_4x + q_5 = 0,$$

car on reconnait facilement que le terme en x^4, qui manque dans $F(x)$, doit ici recevoir *de préférence* le signe +.

On formera une première équation auxiliaire en x^4, de la forme

$$\psi(x) = x^4 - r_1x^3 - r_2x^2 + r_3x + r_4,$$

où les termes de mêmes degrés respectifs ont les mêmes signes que ceux

de $f(x)$, en faisant le produit de deux trinômes du 2° degré (x^2+cx+d) et (x^2-ex+f), avec les conditions $c^2>4d$ et $e^2<4f$. D'où

$$\psi(x) = x^4 - (e-c)\,x^3 - (ce-f-d)\,x^2 + (cf-de)\,x + df = 0.$$

ainsi les coefficients r_i ci-dessus ont, respectivement, pour valeurs

$$r_1 = e-c\,;\; r_2 = ce-f-d\,;\; r_3 = cf-de;\; r_4 = df.$$

Par conséquent, on doit avoir, pour que les signes requis soient conservés:

$$e>c;\; ce>f+d;\; cf>de.$$

On satisfait à ces trois inégalités et aux deux précédentes, en prenant, par exemple,

$$c=4;\; d=3.\; e=4,\; f=5, \quad \text{d'où} \quad \psi(x) = x^4 - 8x^2 + 8x + 15,$$

où le terme en x^3 manque, ce qui est ici indifférent. Il faut maintenant introduire une troisième racine négative $-a$, ce qui donne

$$f(x) = \psi(x)\,(x+a) = x^5 + (a-r_1)x^4 - (ar_1+r_2)\,x^3 - (ar_2-r_3)\,x^2 + (ar_3+r_4)\,x + ar_4 = 0,$$

où l'on a, d'après l'équation numérique ci dessus,

$$r_1 = 0\,;\; r_2 = 8\,;\; r_3 = 8\,;\; r_4 = 15.$$

S'il ne s'agissait que de former $f(x)$, il suffirait que a satisfît à la condition $ar_2>r_3$, c'est-à-dire $a>1$. Mais on reconnait promptement que la formation subséquente de $F(x)$, dans les conditions requises, exige qu'on ait $a>3$ <4. Soit donc, par exemple, $a=3{,}2$. Il vient

$$f(x) = x^5 + 3{,}2x^4 - 8x^3 - 17{,}6x^2 + 40{,}6\,x + 48 = 0.$$

ce qui donne pour les valeurs des coefficients q_i ci-dessus:

$$q_1 = 3{,}2;\; q_2 = 8\,;\; q_3 = 17{,}6\,;\; q_4 = 40{,}6\,;\; q_5 = 48.$$

Cela posé, on a, sous la condition $g^2 < 4h$:

$$F(x) = f(x)\,(x^2-gx+h) = x^7 + (q_1-g)\,x^6 - (q_1g+q_2-h)\,x^5 + (q_1h+q_2g-q_3)\,x^4 -$$
$$-(q_2h-q_3g-q_4)\,x^3 - (q_3h+q_4g-q_5)\,x^2 + (q_4h-q_5g)x + q_5h = 0.$$

La condition de faire disparaître le terme en x^4 fournit l'égalité $q_1 h + q_2 g - q_3 = 0$. On a, en outre, les inégalités

$$q_1 > g;\ q_1 g + q_2 > h;\ q_1 h + q_2 g > q_3;\ q_2 h > q_3 g + q_4;\ q_3 h + q_4 g > q_5;\ q_4 h > q_5 g.$$

Remplaçant les q_i par leurs valeurs ci-dessus, on a d'abord $h = \frac{17,6 - 8g}{3,2}$. On voit ensuite que la valeur de g doit être très petite, et qu'en prenant, par exemple, $g = 0,075$, d'où $h = 5,3111...$, toutes les conditions précitées sont satisfaites, ce qui donne pour l'équation cherchée

$$\varphi(x) = (x+1)(x+3)(x+3,2)(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 0,075x + 5,311...) =$$
$$= x^7 + 3,125..x^6 - 2,929..x^5 - 0,57x^3 - 48,52x^2 + 212,03x + 254,93 = 0.$$

2ème *Cas*. On peut attribuer à $\psi(x)$ les quatre racines imaginaires que $F(x)$ doit posséder, en prenant, par exemple,

$$\psi(x) = (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 0,07x + 5,3) = x^4 - 4,07x^3 + 10,58x^2 - 21.54x + 26,5; \text{ puis}$$
$$f(x) = \psi(x)(x+1) = x^5 - 3,07x^4 + 6,51x^3 - 10,97x^2 + 4,95x + 26,5, \text{ et enfin}$$

$\varphi(x) = f(x)(x^2 + gx + h)$, avec la condition $g^2 > 4h$, puisque, d'après l'énoncé, les deux racines à introduire doivent être réelles (et négatives).

On fera, par exemple, $g = 6,2$, d'où, à cause de la condition d'égalité ci-dessus, $h = \frac{q_2 g - q_3}{q_1}$, on aura $h = 9,57$ et, par conséquent, $g^2 > 44$. On trouve enfin

$$\psi(x) = (x+1)(x+2,9)(x+3,3)\psi(x) = x^7 + 3,13x^6 - 2,954x^5 - 0,7x^3 - 47,89x^2 +$$
$$+ 211,67x + 253,605 = 0,$$

qui satisfait à toutes les conditions de la question.

XIV. Jusqu'ici il ne manquait qu'un seul terme dans l'équation dont le type était proposé. Nous allons, dans ce qui suit, supposer qu'il en manque deux.

Équations incomplètes, où il manque deux termes.

Les deux termes absents peuvent être consécutifs, ou non consécutifs. Dans ce dernier cas, ils peuvent être compris l'un et l'autre entre des termes de signes contraires, ou entre des termes de même signe ; ou bien l'un d'eux peut être compris entre deux termes de même signe, et l'autre entre des termes de signes contraires.

Pour abréger, nous supposerons, quel que soit le cas dont il s'agisse, que l'équation démandée doive n'avoir que le plus petit nombre possible de racines imaginaires.

Dans tous le cas, l'obligation de faire disparaître deux termes donnant lieu à deux égalités, sans préjudice des inégalités auxquelles en doit satisfaire, on comprend qu'il ne suffirait plus, comme dans le cas où il ne manque à l'équation qu'un seul terme, de se réserver, à la fin de l'opération, deux indéterminées. Ce n'est donc plus un seul trinôme de la forme $(x^2 \pm cx \pm d)$, mais bien deux trinômes de cette forme qu'on aura à introduire, avec les conditions $c^2 <$ ou $> 4d$, selon les conditions d'imaginarité on de réalité des racines qui resteront à adjoindre. On aura donc à former préalablement une équation numérique auxiliaire, $f(x) = 0$, non plus, comme précédemment, du degré $m - 2$, mais bien du degré $m - 4$, dont les termes faisant suite au terme initial x^{m-4} auront les mêmes signes respectifs que ceux de l'équation proposée $F(x)$.

Quelques exemples suffiront pour faire bien comprendre la suite des opérations et les précautions qu'elles peuvent exiger.

XV. Supposons, en premier lieu, que la proposée soit

$$F(x) = x^7 - p_1 x^6 + p_2 x^5 + p_3 x^2 - p_4 x + p_5 = 0,$$

avec la condition que l'équation numérique $\varphi(x)$, qu'il s'agit de former, n'ait que les deux racines imaginaires qu'elle ne peut point ne pas avoir, et que les cinq autres soient réelles.

On prendra pour équation auxiliaire

$$f(x) = x^5 - r_1 x^4 + r_2 x^3 + r_3 x^2 - r_4 x + r_5 = 0,$$

avec la condition que toutes ses racines soient réelles, mais en ayant soin, conformément à la règle posée ci-dessus, d'en laisser deux indéterminées. En opérant comme il a été dit dans ce qui précède, on reconnaît qu'une solution est fournie par l'équation

$$f(x) = (x - 1)\ (x - 2)\ (x + 4)\ (x^2 - cx + d) = 0,$$

où l'on prendra $c^2 > 4d$, et qui possèdera, comme $F(x)$, quatre racines positives réelles et une négative. Comparant le produit avec l'équation $f(x)$ écrite ci-dessus, on trouve que les coefficients r_i ont les valeurs ci-après, savoir

$$r_1 = c - 1;\ r_2 = d - c - 10;\ r_3 = d + 10c + 8,\ r_4 = 10d + 8c;\ r_5 = 8d.$$

Introduisant enfin le facteur du second degré $(x^2 + ex + f)$, avec la condition $e^2 < 4f$, puisque les deux facteurs linéaires doivent être imaginaires, on trouve, pour le produit de $f(x)$ par ce trinôme :

$$\varphi(x) = x^7 - (r_1 - e)\, x^6 + (f - r_1 e + r_2)\, x^5 + (r_3 f - r_4 e + r_5)\, x^2 - (r_4 f - r_5 e)\, x + r_5 f = 0,$$

avec les conditions d'égalitè

$$r_1 f - r_2 e - r_3 = 0, \quad r_2 f + r_3 e - r_4 = 0,$$

et les conditions d'inégalité

$$e^2 < 4f;\ e < r_1;\ f > r_1 e - r_2;\ f > \frac{r_4 e - r_5}{r_3};\ f > \frac{r_5 e}{r_4}.$$

On reconnait avec un peu d'attention qu'on satisfait à toutes les conditions exigées, en prenant d'abord $c = 19$ et $d = 90$, d'où, en vertu des égalités ci-dessus,

$$e = \frac{1368}{8905} = 0{,}15362\ldots;\quad f = \frac{147116}{8905} = 16{,}5206\ldots$$

toutes les conditions sont satisfaites et l'on trouve pour l'équation demandée (en n'écrivant que les premières décimales des coefficients):

$$\varphi(x) = x^7 - 17{,}85 x^6 + 74{,}8 x^5 + 5020{,}4 x^2 - 17271\ x + 11894 = 0,$$

qui, étant décomposée en ses facteurs. peut s'écrire

$$\varphi(x) = (x - 1)\ (x - 2)\ (x - 9)\ (x - 10)\ (x + 4)\ (x^2 + 0,\ 154..x + 16{,}521) = 0.$$

XVI Soit, comme second exemple, l'équation proposée

$$F(x) = x^7 - p_1 x^6 - p_2 x^4 + p_3 x^2 - p_4 x + p_5 = 0,$$

où il manque deux termes, compris l'un entre deux termes de même signe, l'autre entre deux termes de signes contraires, et sous la condition que l'équation numérique qu'il s'agit de former possède cinq racines réelles, dont quatre positives et une négative.

On formera préalablement, comme dans l'exemple qui précède, l'équation auxiliaire du $5^{ème}$ degré

$$f(x) = (x-1)\ (x-2)\ (x+4)\ (x^2 - cx + d) = 0,$$

avec la condition $c^2 > 4d$; cette équation sera, par conséquent, de l'espèce

$$f(x) = x^5 - r_1 x^4 + r_2 x^3 + r_3 x^2 - r_4 x + r_5 = 0, \quad \text{où l'on a}$$

$$r_1 = c - 1;\ r_2 = (d - c - 10);\ r_3 = (d + 10c + 8);\ r_4 = 10d + 8c;\ r_5 = 8d.$$

Introduisant alors le facteur $x^2 + ex + f$, avec la condition $e^2 < 4f$, il vient

$$\varphi(x) = x^7 - (r_1 - e)\,x^6 - (r_1 f - r_2 e - r_3)\ x^4 + (r_3 f - r_4 e + r_5)\,x^2 - (r_4 f - r_5 e)\,x + r_5 f = 0$$

avec les deux conditions d'égalité, résultant de l'annulation des coefficients de x^5 et x^3,

$$f - r_1 e + r_2 = 0, \quad r_2 f + r_3 e - r_4 = 0,$$

et les conditions d'inégalité

$$r_1 > e;\ r_1 f > r_2 e + r_3;\ r_3 f + r_5 > r_4 e;\ r_4 f > r_5 e.$$

On reconnait aisément que les valeurs $c = 10$, $d = 21$, entre autres, d'où l'on déduit, après les avoir introduites dans celles des r_i,

$$e = 2{,}108\ldots;\ f = 17{,}972\ldots,$$

satisfont à toutes les conditions proposées, et fournissent l'équation cherchée

$$\varphi(x) = x^7 - 6{,}89\ x^6 - 30{,}64 x^4 + 1875{,}07 x^2 - 4857{,}74\ x + 3019{,}8 =$$

$$= (x-1)\ (x-2)\ (x-3)\ (x-7)\ (x+4)\ (x^2 + 2{,}108x + 17{,}972) = 0.$$

etc. etc.

XVII. Ces exemples suffisent pour faire bien comprendre l'esprit de la méthode et la marche des opérations, et nous croyons inutile de les multiplier. Ils montrent aussi ce qu'on aurait à faire s'il manquait plus de deux termes, consécutifs ou non, dans l'équation proposée, mais en même temps ils font ressortir les difficultés, croissantes avec le nombre des termes absents, qu'on aurait à surmonter; car le nombre des quantités indétermi-

nées c, d; e, f; g, h; etc., qu'il faudra laisser figurer dans le produit final de l'équation auxiliaire $f(x)=0$ par les facteurs du second degré à introduire, ira lui-même en croissant, et la difficulté du calcul consistera à trouver les valeurs à leur attribuer, respectivement, de façon à satisfaire, d'une part à la conservation des signes des coefficients restants, d'autre part à l'annulation de ceux qui doivent disparaître, d'autre part enfin aux conditions de réalité ou d'imaginarité que, selon l'énoncé du problème, chacun d'eux doit introduire.

Nous ne croyons donc pas devoir nous y étendre davantage. Nous craignons plutôt le reproche d'avoir insisté trop longuement déja sur un point qui, après tout, est élémentaire dans la théorie des équations numériques.

Notre excuse est que ce point n'a jamais été traité, du moins à notre connaissance; qu'il nous paraît, par un certain côté, répandre un jour nouveau sur la Règle des signes de Descartes; qu'enfin, même dans les limites où nous en avons circonscrit l'étude, la solution des difficultés qui s'y rencontrent, et que nous développons, ne se présentait peut-être pas immédiatement.

Paris, 7 *avril* 1885.

E. De Jonquières.

NB. Questa memoria presentata dall'A. nella Sessione V. viene qui inserita per sollecitarne la pubblicazione.

INTORNO ALLA « BIBLIOTHECA MATHEMATICA » DEL D.r GUSTAVO ENESTRÖM

RAPPORTO

DI B. BONCOMPAGNI

Dal 1882 si pubblica in Stockholm, sotto la direzione del Sig. G. Mittag-Leffler, in fascicoli in 4.°, una raccolta intitolata « ACTA MATHEMATICA », della quale sono stati già pubblicati 4 volumi, cioè 16 fascicoli, ciascuno di tali volumi essendo composto di 4 fascicoli.

Come appendice a questa raccolta il Sig. D.r Gustavo Eneström ha cominciato a pubblicare, dal 1884 in poi, una raccolta bibliografica intitolata: « BIBLIOTHECA MATHEMATICA », della quale sono stati finora pubblicati 4 fascicoli formanti un volume intitolato « BIBLIOTHECA MATHEMATICA || HERAUSGEGEBEN || VON || » REDIGÉE || PAR || GUSTAF ENESTRÖM. || 1884. || STOCKHOLM || F. & G. BEIJER. || 1884. || » CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM. || BERLIN || MAYER & MULLER. || 38/39 FRANZÖSI- » SCHE-STRASSE || PARIS || A. HERMANN. || 8 RUE DE LA SORBONNE.||»; del qual volume ho l'onore di presentare all'Accademia da parte dell'Autore un esemplare.

Ciascuno di questi 4 fascicoli contiene 1.° un catalogo alfabetico di pubblicazioni relative alle scienze matematiche e fisiche, diviso in 3 sezioni, delle quali la prima è intitolata « WERKE, ABHANDLUNGEN UND AUFSÄTZE. — » OUVRAGES, || MÉMOIRES ET NOTES », la seconda « REFERATE UND RECENSIONEN. || » COMPTES RENDUS ET ANALYSES », la terza « BENUTZTE SAMMELSCHRIFTEN. — RE- » CUEILS DÉPOUILLÉS. »; 2.° una nota storico–bibliografica intitolata « VER- » MISCHTE NOTIZEN. — MÉLANGES », e firmata « G. Eneström ». Queste note sono le seguenti:

1.° « Notice sur un mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des » séries, publié à Stockholm en 1718 » (col. 15, lin. 14–35, col. 16, lin. 14–35, N° 1), contenente notizie intorno ad una rarissima edizione d'uno scritto di Cristiano Goldbach, nato in Königsberg nel giorno 18 di marzo 1690 (1), e morto nel giorno $\frac{20}{80}$ di novembre del 1764 (2), intitolata « *Spe-* » *cimen methodi ad summas serierum* », non menzionata dal Poggen-

(1) BIOGRAPHISCH–LITERARISCHES || HANDWÖRTERBUCH || ZUR GESCHICHTE || DER EXACTEN WISSENSCHAFTEN||ecc.||GESAMMELT||VON||J. C. POGGENDORFF||ecc.||ERSTER BAND.||A–L.||LEIPZIG, 1863. || VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH, col. 924, lin. 39—49 — Allgemeine || Deutsche Biographie.|| Neunter Band. || Geringsfald–Gruber. ||ecc. || Leipzig, || Verlag von Duncker & Humblot. || 1879, pag. 336, lin. 17.

(2) BIOGRAPHISCH–LITERARISCHES || HANDWÖRTERBUCH || ecc, || GESAMMELT || VON || J. C. POGGENDORFF || ecc. || ERSTER BAND. || A–L. || ecc., col. 924, lin. 39—50. — Allgemeine || Deutsche Biographie. || Neunter Band. || Geringswald–Gruber, ecc., pag. 330, lin. 18—19.

dorff (1) nell'articolo « Goldbach, Christian » del suo dizionario biografico in lingua tedesca.

2.° « Notice sur une nouvelle édition de Diofantos préparée par M. Paul » Tannery » (col. 47, lin. 15-38, col. 48, lin. 14-27, N° 2), contenente notizie intorno ad una edizione critica che il Sig. Tannery prepara, coll'appoggio del governo francese, degli scritti che si conservano di Diofanto, e che comprenderà il testo greco di questi scritti, accompagnato 1.° da una traduzione latina del testo medesimo, fatta adoperando le notazioni moderne; 2.° da un ampio comento; 3.° dal testo greco, tuttavia inedito, degli scolii attribuiti a Massimo Planude.

3. « Notice sur les versions latines des éléments d'Euclide publiées en Suède» (col. 79, lin. 5-42, col 80, lin. 5-42 N° 3), contenente notizie intorno a due traduzioni latine degli elementi di Euclide, omesse dal Sig. Vachtchenko-Zakhartchenko in un elenco bibliografico da lui pubblicato in Kiel nel 1880. Di queste due traduzioni, l'una dovuta a Martino Erici Gestrin, nato in Gefle nel giorno 16 di febbraio del 1594 (2), e morto in Upsala nel giorno 27 di settembre del 1648 (3), fu data in luce in una edizione intitolata nel suo frontispizio « MARTINI E. GESTRINII ‖ IN ‖ GEOMETRIAM EUCLIDIS ‖ Demonstra- » tionum ‖ LIBRI SEX. In quibus GEOMETRIA planorum traditur, & brevibus » NOTIS perspicuè ‖ explicatur. Impensis & sumptibus AUTHORIS, ‖ UPSA- » LIÆ, Excudebat Æschillus Matthiæ, Academiæ Typog. ‖ ANNO CHRISTI ‖ » cIↄ.Iↄc.xxxVII. » (4); l'altra dovuta a Samuele Klingenstjerna, nato in Tollefors presso Linkjöping nel giorno 18 di agosto 1698 (5), e morto in Stockholm nel giorno 26 di ottobre 1765 (6), è intitolata « EUCLIDIS ‖ ELEMENTORUM ‖ LIBRI » SEX PRIORES ‖ UNA CUM ‖ UNDECIMO ‖ ET ‖ DUODECIMO. ‖ UPSALIÆ, Typis Viduæ » b. HÖJERI », senz'anno, ma stampata circa il 1741 (7).

---

(1) BIOGRAPHISCH-LITERARISCHES ‖ HANDWÖRTERBUCH ‖ ecc. ‖ GESAMMELT ‖ VON ‖ J. C. POGGENDORFF ‖ ecc. ‖ ERSTER BAND. ‖ A.-L. ‖ ecc., col. 924, lin. 39—59, col. 925, lin. 1—3.

(2) BIOGRAPHISCH-LITERARISCHES ‖ HANDWÖRTERBUCH ‖ ecc. ‖ GESAMMELT ‖ VON ‖ J. C. POGGENDORFF ‖ ecc. ‖ ERSTER BAND. ‖ A-L. ‖ ecc., col. 889, lin. 8—10.

(3) BIOGRAPHISCH-LITERARISCHES ‖ HANDWÖRTERBUCH ‖ ecc. ‖ GESAMMELT ‖ VON ‖ J. C. POGGENDORFF ‖ ecc. ‖ ERSTER BAND. ‖ A-L. ‖ ecc., col. 889, lin. 8—11.

(4) BIBLIOTHECA MATHEMATICA, ecc., N° 3, col. 79, lin. 25—31. — In una ristampa di questo frontispizio, citata dal Sig. Eneström (BIBLIOTHECA MATHEMATICA, ecc., col. 79, lin. 37—42, col. 80, lin. 4—8) in vece di « cIↄ Iↄc xxxVII », trovasi (BIBLIOTHECA MATHEMATICA, ecc., col. 80, lin. 5) « cIↄ. Iↄc. xxxxII ».

(5) BIOGRAPHISCH-LITERARISCHES ‖ HANDWÖRTERBUCH ‖ ecc. ‖ GESAMMELT ‖ VON ‖ J. C. POGGENDORFF ‖ ecc. ‖ ERSTER BAND. ‖ A-L. ‖ ecc., col. 1272, lin. 33—45.

(6) Fortsetzung und Ergänzungen ‖ zu ‖ Christian Gottlieb Jöchers ‖ allgemeinem ‖ Gelehrten-Lexiko ‖ worin ‖ die Schriftsteller aller Stände nach ihren vornehmsten Lebensumständen ‖ und Schriften beschrieben werden. ‖ Angefangen von ‖ Johann Christoph Adelung ‖ und vom ‖ Buchstaben K fortgesetzt ‖ von ‖ Heinrich Wilhelm Rotermund, ‖ Pastor an der Domkirche zu Bremen. ‖ Dritter Band. ‖ Delmenhorst. ‖ gedruckt bey Georg Jöntzen. ‖ 1810, col. 504, lin. 25—49. — BIOGRAPHISCH-LITERARISCHES ‖ HANDWÖRTERBUCH ‖ ecc. ‖ GESAMMELT ‖ VON ‖ J. C. ‖ POGGENDORFF ‖ ecc. ‖ ERSTER BAND. ‖ A-C., ecc., col. 1272, lin. 33—46.

(7) BIBLIOTHECA MATHEMATICA, ecc., N° 3, col. 80, lin. 14—32.

4.° « Notice sur les premières tables de logarithmes publiées en Suède » (col. 121, lin. 24–45, col. 122, lin. 24–45, col. 123–124, N° 4), contenente una recensione di una memoria del Sig. Prof. David Bierens de Haan intitolata *Tweede Ontwerp eener naamlijst van logarithmentafels*, pubblicata nel 1875 nel tomo 14 dei Verhandlingen der Akademie van Wetenschappen di Amsterdam, nella quale si dà un elenco delle tavole di logaritmi venute in luce del 1614 al 1874. In questo elenco il Sig. Bierens de Haan menziona 10 tavole di logaritmi stampate in Svezia dal 1763 in poi. (1)

Il Sig. Eneström avverte (2) per altro che le prime tavole di logaritmi stampate in Isvezia furono pubblicate nel 1698 da Pietro Elvius, nato in Dalarne nel giorno 24 di settembre del 1660 (3), e morto in Upsala nel giorno 12 di gennaio del 1718 (4) in una edizione intitolata: « TABULA ‖ Compendiosa » Logarithmorum ‖ SINUUM ‖ Ad quadrantis gradus, eorumq; partes decimas, ‖ » Nec non ‖ NUMERORUM ABSO-‖LUTORUM ab unitate ad 1000, ‖ Edita a P. E. ‖ » Upsaliæ 1698 ».

I 4 fascicoli finora pubblicati della detta « BIBLIOTHECA MATHEMATICA » contengono una indicazione di 918 scritti pubblicati in 12 lingue, cioè 325 in francese, 315 in tedesco, 104 in inglese, 79 in italiano, 36 in lingue scandinave, 27 in russo, 16 in neerlandese, 6 in spagnuolo, 4 in latino ed in greco, 4 in portoghese, 1 in polacco ed 1 in boemo.

Quindi è certo che continuandosi la pubblicazione di questa importante raccolta, essa gioverà molto a far conoscere i lavori che si dànno in luce intorno alle scienze matematiche e fisiche.

B. BONCOMPAGNI.

---

(1) BIBLIOTHECA MATHEMATICA ‖ ecc., N° 4, col. 121, lin. 32—35.

(2) BIBLIOTHECA MATHEMATICA ‖ ecc., N° 4, col. 121, lin. 36—40.

(3) BIOGRAPHISCH-LITERARISCHES ‖ HANDWÖRTERBUCH ‖ ecc. ‖ GESAMMELT ‖ VON J. C. POGGENDORFF ‖ ecc. ‖ ERSTER BAND. ‖ A-L. ‖ ecc., col. 661, lin. 43—46.

(4) BIOGRAPHISCH-LITERARISCHES ‖ HANDWÖRTERBUCH ‖ ecc. ‖ GESAMMELT ‖ VON ‖ J. C. POGGENDORFF ‖ ecc. ‖ ERSTER BAND. ‖ A-L. ‖ ecc., col. 661, lin. 43—47.

BRANO DI LETTERA INDIRIZZATA DAL PROF. GIOVANNI LUVINI

A B. BONCOMPAGNI

in data di « Torino 5 Gennaio 1885. »

« Le ho spedito per la posta due o tre giorni fa le due copie de'miei *Sette Studi* annunziatele nella mia del 29 scorso Xbre. Questi miei studi furono tutti, meno l'ultimo, redatti e pubblicati per la prima volta nel 1884; anzi il secondo ed il sesto non furono mai pubblicati prima d'ora.

» Nel primo, sullo stato sferoidale, io ho dimostrato sperimentalmente prima e razionalmente poi, che la temperatura dei liquidi sferoidali è poco differente da quella della loro ebollizione corrispondente alla pressione attuale. Con questo principio, nuovo nella scienza, riuscii a far gelare l'acqua nell'etere sferoidale in un vaso ardente nel vuoto. Cercai di dilucidare alcuni punti oscuri della storia relativa a questo stato, e feci conoscere il curioso fenomeno delle bolle soffiate sui liquidi sferoidali e sullo stesso etere infiammato.

» Nel secondo, sulle esplosioni delle caldaie, ho citato i principali sperimenti dei fisici intorno all'ebollizione ed al surriscaldamento dell'acqua, e specialmente quelli di Bellani, pubblicati fin dal 1809 nel *Giornale di Fisica* di Pavia ed intieramente dimenticati da tutti i dotti, in causa della poca o nessuna pubblicità che venne data a quel giornale, di cui non ho potuto trovare copia a Torino, ed ho dovuto servirmi dell'analisi che fece del lavoro di Bellani il Belli nel suo *Corso elementare di Fisica sperimentale*. Descrivo i rimedi prima d'ora proposti dai fisici per evitare le esplosioni dovute al surriscaldamento, e ne aggiungo uno mio intieramente nuovo.

» Nel terzo, sulle trombe atmosferiche, riferisco le osservazioni di Spallanzani sulle trombe in genere e sui vortici aerei al di sopra delle nubi temporalesche; faccio conoscere la teoria di Franklin delle trombe, come pure quella dei venti per aspirazione, e la polemica ch'egli ha avuto con Perkins e con Colden, i quali dimostrarono contro Franklin che le trombe non sono ascendenti, come questi voleva, ma discendenti. Riporto le riflessioni fatte intorno a queste mie ricerche storiche dal signor Faye nei *Comptes Rendus* dell'Accad. delle Sc. di Parigi (Seduta del 18 feb. 1884). In esse l'illustre accademico spiega in modo evidente l'inammissibilità dei venti d'aspirazione e la causa che trasse Franklin in errore.

» Nel quarto, sopra un modo di formazione della grandine, faccio dipendere la formazione di questa meteora dallo stato sferoidale delle gocce acquee sospese nell'aria e colpite dal fulmine. Chi ha ben capito la teoria dello stato sferoidale, che io ho dato nel 1° Studio, ammetterà facilmente la ragionevolezza di questo modo di formazione.

» Nel quinto, sull'elettricità dell'aria, ecc., do una teoria intieramente nuova dell'elettrizzazione dell'aria, delle nubi temporalesche e delle ceneri vulcaniche, fondata sull'esperienze di Faraday e sulle osservazioni di queste meteore. Tale elettricità è generata dallo strofinìo dell'aria umida coi ghiacciuoli che sempre si trovano nelle regioni elevate dell'atmosfera, o colle ceneri lanciate dai vulcani. Dimostro che l'aria umida e le nubi non sono conduttori elettrici, che i temporali nascono dalla discesa dei ghiacciuoli freddissimi trascinati dai vortici discendenti nei cumuli di vapori sottostanti. Il fulmine solca in tutti i sensi la nube temporalesca senza uscirne, e non si slancia da una nube su di un'altra o da una nube sulla terra, senza circostanze particolari.

» Nel sesto, sulla rifrazione atmosferica laterale, dopo di aver richiamato alla memoria tre miei lavori precedenti relativi alle osservazioni della rifrazione atmosferica col *dieteroscopio*, strumento che io proposi per questo scopo, riferisco alcune considerazioni fatte da illustri scienziati intorno al mio metodo, e le faccio seguire da alcune mie riflessioni e risposte. Quindi espongo i risultati delle mie osservazioni dieteroscopiche, dalle quali risulta un effetto evidente di rifrazione laterale periodica diurna, e spiego la causa principale delle variazioni della rifrazione atmosferica presso l'orizzonte.

» Il settimo studio, riferibile all'adesione tra solidi e liquidi, è di data anteriore ai precedenti, essendo stato pubblicato la prima volta negli Atti dell'Accad. delle Sc. di Torino del 1870. Esso contiene una proposizione, dimostrata per la prima volta sperimentalmente, relativa alla resistenza che incontrano i solidi nello scorrimento sulla superficie o nell'interno dei liquidi. Plateau, facendo oscillare un ago magnetico, prima colla faccia inferiore in contatto coll'acqua, e poi tutto immerso in questa, fu meravigliato di trovare la durata d'oscillazione più corta nel secondo caso che non nel primo. Egualmente l'ago oscilla più lentamente sulla glicerina e su diversi altri liquidi, che non nel loro interno. Coll'alcool invece, coll'olio d'oliva, ecc., avviene l'opposto. Le mie sperienze hanno fatto vedere che la resistenza in quistione va distinta in due specie: *superficiale* e *lineare*; se il corpo oscillante è tutto nell'interno del liquido, si manifesta la sola resistenza superficiale; se invece si appoggia sulla faccia del liquido, essa è superficiale insieme e lineare, colla quale distinzione si spiegano in modo naturalissimo risultati in apparenza contraddittorii. »

COMUNICAZIONI

Foglini, P. G. – *Presentazione di una sua nota*:

Il P. Giacomo Foglini presentò una sua nota sopra l'applicazione delle coordinate omogenee alla Geometria superiore, in continuazione e complemento di un'altra somigliante nota già pubblicata e ristretta alle sole linee del primo e del secondo ordine. Questa nota trovasi inserita nel Vol. I delle Memorie.

De Rossi, Prof. M. S. – *Sugli odierni terremoti di Spagna*:

Il Prof. M. S. De Rossi fu pregato dai presenti a prender la parola per dare notizie scientifiche sugli odierni disastri sismici, che funestano la Spagna meridionale. Egli, rispondendo al gentile invito, dichiarò esser difficile formolare giudizi precisi ed analizzare i fatti del grandioso fenomeno, perchè mancano tuttora i sufficienti ragguagli scientifici. Il R. Governo Spagnolo ha nominato una Commissione di geologi per lo studio del fenomeno; e questa si è già rivolta al riferente per ciò che riguarda la organizzazione delle osservazioni; crede perciò il riferente che si debba attendere il lavoro della detta Commissione, prima di voler addentrarsi nell'analisi di un fenomeno sismico tanto straordinario. Ciò posto il riferente passò in breve disamina tutto ciò che poteva raccogliersi dalle notizie finora sparse nei giornali e nei cenni doti da qualche scienziato all'Accademia di Parigi. Mostrò sulla carta geologica della Spagna compilata dal De Verneuil e Collomb la zona urtata, additando come ad evidenza il radiante sismico odierno coincida con una grande linea di frattura nella zona coperta dai terreni terziari pliocenici e miocenici. La detta zona non manca di qualche centro vulcanico e di affioramenti di rocce eruttive ed evidentemente si prolunga nelle isole Baleari, come giustamente fu già notato all'Accademia di Parigi, Il riferente aggiunse non essere senza importanza il notare che il prolungamento del radiante sismico suddetto dopo le isole Baleari, passando per lo stretto fra la Sardegna e la Corsica, si dirige sull'Italia centrale fra il Lazio e l'Umbria e gli Abbruzzi e le Marche. Ora è evidente specialmente dagli studì pobblicati dal Galli sulle osservazioni da lui fatti nell'Osservatorio di Velletri e da altri dati, che appunto questa regione dell'Italia ha maggiormente corrisposto per l'agitazione sismica col periodo degli scuotimenti che avvengono nella Spagna. Il terremoto principale della sera del 25 Dicembre fu registrato dagli strumenti, massime di

Velletri e di Roma ed anche di Moncalieri. Aggiunse inoltre esser notevole una simile corrispondenza di periodo sismico fra le medesime regioni del Lazio e della Spagna meridionale essere avvenuta in un modo manifesto in questo medesimo secolo nel 1829, allorchè il vulcano laziale nella regione specialmente di Albano si scosse fortemente e lungamente minacciando qualche disastro, che fortunatamente si limitò a sole lesioni nei fabbricati. Anche ai nostri giorni dopo sorti i nuovi studi sismologici in Italia dal 1873 in poi, si è più volte verificata una simile coincidenza in periodi sismici, quantunque di minima importanza. Chiamò pure l'attenzione degli adunati sulle evidenti relazioni fra i terremoti, che fin dal Novembre agitarono ripetutamente le Alpi Cozie, e questi disastrosi di Spagna. Dal tutto insieme conchiuse che nella odierna recrudescenza generale dei fenomeni sismici vieppiù si conferma ciò che altra volta ha egli dimostrato, esser cioè tutto il bacino del Mediterraneo collegato in un sistema di azioni endogene aventi fra loro mutue influenze, le cui leggi precise non potranno essere scoperte che in progresso di tempo con la moltiplicazione delle osservazioni geodinamiche.

LAIS, P. G. – *Presentazione di opuscoli*:

Il ch. P. Giuseppe Lais presentò da parte del Prof. Domenico Ragona socio corrispondente un opuscolo del medesimo intitolato: « Sulla pioggia in montagna » diè un cenno del contenuto, facendone rilevare la novità e l'importanza delle conclusioni, alle quali l'autore è pervenuto. Presentò inoltre un suo opuscolo col titolo: « La luce crepuscolare dell'anno 1884 ».

BONETTI, Prof. F. – *Presentazione di una sua nota*:

Il ch. Sig. D. Filippo Bonetti presentò una sua Nota a stampa col titolo: « Ricerche sperimentali sulla variazione della densità dell'acqua tra 0° e 10°. ».

D. B. BONCOMPAGNI – *Presentazione di pubblicazioni*:

D. B. Boncompagni presenta, da parte del Sig. Prof. Giovanni Luvini, un esemplare di ciascuna delle pubblicazioni seguenti: SEPT ÉTUDES || SUR || 1° L'état sphéroidal; || 2° Les explosions des machines à vapeur; || 3° Les trombes; || 4° La grêle; || 5° L'électricité atmosphérique; || 6° La réfraction latérale; || 7° L'adhésion entre les liquides et les solides; || en double original, français et italien || Par l'Ingénieur JEAN LUVINI || Professeur de physique à Turin. || TURIN || IMPRIMERIE ROUX ET FAVALE. || 1884. — SETTE STUDI || SOPRA || 1° Lo stato sferoidale; || 2° Le esplosioni delle macchine a vapore; || 3° Le

trombe; || 4° La grandine; || 5° L'elettricità atmosferica; || 6° La rifrazione laterale; || 7° L'adesione tra solidi e liquidi; || in doppio originale italiano e francese || Per l'ingegnere GIOVANNI LUVINI || Professore di Fisica a Torino. || TORINO || TIPOGRAFIA ROUX E FAVALE || 1874.

DI || UN NUOVO STRUMENTO METEOROLOGICO-GEODETICO-ASTRONOMICO || IL DIETEROSCOPIO || DI || GIOVANNI LUVINI || PROFESSORE DI FISICA NELLA R. ACCADEMIA MILITARE || STAMPERIA REALE DI TORINO || DI G. B. PARAVIA E C. || 1874.

DEL || DIETEROSCOPIO || SECONDA COMUNICAZIONE || DI || GIOVANNI LUVINI || PROFESSORE DI FISICA || NELLA R. ACCADEMIA MILITARE || STAMPERIA REALE DI TORINO || DI G. B. PARAVIA E C. 1874.

PRESENTAZIONE || DI UN || MODELLO DI DIETEROSCOPIO || ad uso || DELLE SCUOLE DI FISICA E DI GEODESIA || DESCRIZIONE ED APPLICAZIONE DEL MEDESIMO || TERZA COMUNICAZIONE || DI || GIOVANNI LUVINI || PROFESSORE DI FISICA ALL'ACCADEMIA MILITARE DI TORINO || STAMPERIA REALE DI TORINO || DI G. B. PARAVIA E COMP. 1876.

Presenta anche un esemplare dei fascicoli di Gennaio, Febbraio, Marzo e Aprile del BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE.

De Rossi, Prof. M. S. – *Presentazione di un opuscolo*:

Il Segretario presenta da parte del socio corrispondente Sig. E. De Jonquières una sua nota a stampa intitolata: « *Sur la règle de Newton* (*démontrée par* M. Sylvester) *pour trouver le nombre des racines imaginaires des équations numériques* ».

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

1. Lettera del socio corrispondente Prof. G. Meneghini in ringraziamento degli augurii a lui fatti dal Corpo accademico in occasione del suo cinquantesimo anniversario d'insegnamento.

2. Lettera del Sig. A. d'Abbadie in ringraziamento per la nomina a socio corrispondente.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Ordinari: Conte Ab. Francesco Castracane, Presidente. – P. G. Foglini. – Prof. M. Azzarelli. – P. G. Lais. – P. F. S. Provenzali. – Prof. G. Tuccimei. – D. B. Boncompagni.

Aggiunti: March. L. Fonti. – Prof. D. F. Bonetti.

L'Accademia apertasi legalmente alle ore 2 1/2 p. venne chiusa alle 4 1/2 p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXII, 1884—85. — Serie IV — Rendiconti — Vol. I. — Fasc. 1, 2, 3. — Roma, 1884, in-4.°
2. *Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.* — T. II. — Serie VI. — disp. 10. Venezia, 1883—84, in-8.°
3. BACHMETIEFF (B. E.) — *Meteorologische Beobachtugen, etc.*, Moskau, 1884. In-4.°
4. BOCCALI (G.) — *Doppio cubo ed altre nuove scoperte geometriche in una semplice spirale poligona.* Camerino, 1884. In-8.°
5. BONETTI (F.) — *Ricerche sperimentali sulla variazione di densità dell'acqua tra* 0° *e* 10°. (Estratto dal Vol. VIII, Serie 3ª, Transunti della R. Accad. dei Lincei).
6. *Bullettin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou.* — A. 1883. — n.° 4. — Moscou, 1884. In-8.°
7. *Crónica cientifica.* — A. VII. N. 162. — Barcelona, 1884. In-8.°
8. DE JONQUIÈRES. — *Sur la règle de Newton (démontrée par M. Sylvester), pour trouver le nombre des racines imaginaires des équations numériques (Extrait des* Comptes rendus des séances de l'Académie de sciences, T. XCIX, séances des 14, 21 et 28 juillet 1884). Paris 1884. In-4.°
9. ENESTRÖM (G.) — *Bibliotheca Mathematica.* 1884. Stockholm, 1884, In-4.°
10. *Journal de la société physico-chimique russe.* — T. XVI. — n.° 9. — St. Pétersbourg, 1884, in-8.°
11. *La Civiltà Cattolica.* — A. XXXVI, Serie XII, Vol. IX. — quad. 829, 830. — Firenze, 1885, in-8.°
12. LAIS (P. G.) — *La luce crepuscolare dell'anno* 1884. — Napoli, 1884. In-16.°
13. LUVINI (G.) — *Sette studi, ecc.*, — Torino, 1884. In-8°.
14. —— *Di un nuovo strumento meteorologico-geodetico-astronomico* IL DIETEROSCOPIO. — Torino, 1874. In-8.°
15. —— *Del Dieteroscopio.* — Seconda Comunicazione. — Torino, 1874. In-8.°
16. —— *Presentazione di un modello di Dieteroscopio.* — Terza Comunicazione. — Torino, 1876. In-8.°
17. RAGONA (D.) — *Sulla pioggia in montagna.* — Modena, 1884. In-8° p.°
18. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — *Partie littéraire.* — Décembre 1884.
19. —— *Partie technique.* — Décembre 1884. — Paris, 1884, in-8.°
20. TRAVAGLINI (T.) — *Il sacro volume biblico tradotto e commentato secondo la mente della Chiesa Cattolica.* — Vasto, 1884. In-4.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE IIIa DEL 22 FEBBRAIO 1885

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

ALCUNE RIFLESSIONI SULL'AZIONE LITONTRITICA DELL'ACQUA DI FIUGGI.

NOTA

DEL PROF. AUGUSTO STATUTI

Dopo l'ultima mia memoria sull'acqua Anticolana di Fiuggi (1) l'egregio Cav. D.r G. Morfino che da molti anni disimpegna con generale soddisfazione la condotta Medico-Chirurgica di quel Comune, pubblicava nell'Aprile 1884 pei tipi dello Sgariglia in Foligno una sua erudita ed interessante monografia sopra quell'acqua salutare.

D'appresso questa pubblicazione la Civiltà Cattolica nel suo fascicolo N. 846 del 19 Settembre 1885 sotto la rubrica « Scienze Naturali » dedicava un suo lungo e forbito articolo a quest'acqua, commendandone le sue virtù antilitiache *contro i mali di pietra e di renelle*, e dopo aver esposto alcuni giusti criteri sulla differenza che deve necessariamente intercedere nell'azione in genere delle acque minerali all'interno od all'esterno dell'organismo, citava altresì alcuni esperimenti fatti dal sullod. Prof. sopra la solubilità dei cal-

(1) Di alcune recenti esperienze sull'acqua antilitiaca di Anticoli (Campagna) denominata di Fiuggi. Memoria presentata e letta nella Sessione II del 20 Gennaio 1884 dell'Accademia Pontificia dei nuovi Lincei.

coli di acido urico e di ossalato di calce immersi nella sud. acqua *allo stato naturale*, aggiungendo che *nessun' altra acqua che si conosca possiede egual proprietà* (contro i detti mali) *se non quella tanto rinomata di Vichy e forse cotesta nostra supera di lunga mano la sua emula* ».

Nel Decembre dell'anno decorso la prelodata Civiltà Cattolica nel suo quaderno Num° 852 tornò ad intrattenersi di quest'acqua per informare i suoi lettori, che pur accordando piena fede all'operato del Morfino, essendosi essa (forse taluno dei suoi redattori o collaboratori) provata di ripetere l'esperimento eseguito dal med.° col tenere immerso per la durata di trenta giorni un calcolo di ossalato di calce in un piccolo vaso contenente dell'acqua di Fiuggi, non ne ebbe in sostanza verun risultato, laddove avendo lasciato immerso per altrettanto tempo un simil calcolo di ossalato nell'acqua mefitica di Collalli, lo trovò completamente disciolto.

In presenza di questa comunicazione che a primo aspetto tenderebbe ad infirmare l'importanza di quella virtù dissolvente che è stata ripetutamente osservata nell'acqua di Fiuggi, nell'*interesse unicamente della scienza* mi permetto di far seguito al suindicato articolo con alcune brevi considerazioni.

E pria d'ogni altro devo confessare di non aver saputo veramente comprendere a quale scopo la rispettabile Direzione del succitato periodico abbia inteso rendere di pubblica ragione quel suo esperimento, ritenuto, per quanto almeno può arguirsi dal contesto del suddetto articolo, che essa medesima sia ben altro che sicura dell'esattezza del suo operato, come si rileva dal periodo seguente: «. Non ci fermiamo a discutere su questa esperienza, » nè abbiamo intenzione di ripeterla con tutto l'apparato di misure e di » riscontri NECESSARI a chi vuol sciogliere definitivamente una questione ».

Ma allora a che prò pubblicare il risultato di un esperimento eseguito in condizioni tali che lungi dal contribuire ad un definitivo scioglimento della questione tendono invece ad intralciarla maggiormente? A che prò insinuare oggi in certo qual modo e sia pure indirettamente una tal qual diffidenza sull'operosità dell'acqua di Fiuggi dopo averla nel precedente fascicolo Num.° 846 del Settembre 1885 encomiata e consigliata come un farmaco salutare?

Ma ciò che vi è di più rimarchevole nella succitata comunicazione della *Civiltà Cattolica* si è che mentre essa assicura di aver verificato una notevole diminuzione in un calcolo di ossalato di calce sottoposto all'azione dell'acqua naturale di Collalli, per converso il Prof. Cav. Gioachino Taddei che analizzò ed illustrò scientificamente quest'acqua minerale con una sua

dettagliata memoria pubblicata nel 1864 (1), mentre la proclama efficacissima nelle concrezioni di *acido urico* le niega assolutamente ogni virtù medicamentosa appunto sui calcoli di *ossalato di calce*!

Ecco infatti come si esprime in proposito il menzionato Prof. Taddei.

« Egli è qui d'avvertirsi che se io pronosticava come litontrittica l'acqua » di Collalli, ciò faceva razionalmente in sequela del carbonato di soda che » per l'analisi vi aveva rinvenuto, ed in riflesso dell'azione che esercitano » gli alcali fissi solubili o i loro carbonati sull'acido urico che nell'economia » animale s'ingenera.

» Con che io voglio esprimere non doversi la qualificazione di anticalcolosa, da me data all'acqua in questione, riferire alle concrezioni in ge- » nere delle vie orinarie, ma solo limitare a quelle formate da acido urico » o da urati, le quali sono le più frequenti. Onde è che se l'acqua di che » si tratta riesce proficua nella renella e nei calcoli negli individui che » vanno soggetti alla diatesi urica, *non più razionalmente* sarebbe da ri- » tenersi e preconizzarsi come giovevole, quando le concrezioni anzidette, » prodottesi nella pelvi dei reni, negli ureteri od in vescica fossero costi- » tuite, come talvolta lo sono, da fosfato di calce, *da ossalato calcareo* o » da fosfato doppio d'ossido di ammonio e di magnesia. »

Dopo quest'esplicita dichiarazione del nominato Prof. Taddei i cui studi speciali sopra la detta acqua formano tuttora per dir così il fondamento e la base delle cure che con essa si eseguiscono nelle malattie delle vie orinarie, e dopo il fatto dei medesimi proprietari della ridetta acqua, i quali negli schiarimenti a stampa con cui sogliono accompagnare le loro bottiglie, si limitano a proclamarla d'impareggiabile utilità nelle *renelle e calcoli formati di acido urico*, la benemerita *Civiltà Cattolica* mi accorderà, lo spero, che alla mia volta anch'io mi limiti per lo meno a fare le più ample riserve sull'attendibilità delle sue esperienze, alle quali del resto, come già dissi di sopra, essa medesima non sembra attaccare una seria importanza.

Vero è che il nominato Periodico a porre in certo modo in accordo il risultato negativo del suo esperimento fatto coll'acqua di Fiuggi sopra un calcolo di ossalato di calce con quello positivo ottenuto dal Dott. Morfino sopra una simile materia, (2) nel chiudere il suo articolo del Dicembre 1885

---

(1) Acqua mefitico-alcalina di Collalli illustrata dall'esposizione dell'analisi chimica del Cav. Prof. Gioachino Taddei e dall'indicazione delle sue principali proprietà mediche. Firenze, Tip. Birindelli 1864.

(2) È bene a sapersi che mentre l'acqua di Collalli che allo stato naturale, secondo che ci ha informati la *Civiltà Cattolica*, sarebbe in grado di sciogliere i calcoli di ossalato contro l'au-

N.° 852 ricorse dubitativamente al caso della *diversa efficacia che ha un'acqua minerale attinta di fresco dalla sorgente o trasportata lungi da essa e tenuta in serbo*; ed è appunto questo concetto che io credo qui opportuno di chiarire convenientemente.

Innanzi tutto però devo premettere che io non ho, nè posso avere, motivo alcuno per denigrare le virtù terapeutiche dell'acqua di Collalli che io stesso anzi citai in una mia precedente memoria (1) tra le acque minerali indicate per la cura delle affezioni calcolose; dappoichè secondo che già dissi altra volta in proposito della tanto decantata acqua anticalcolosa di Evian nello Sciablese (2), non fu nè è mio intendimento, (nè tampoco può essere della mia competenza), d'istituire raffronti sulla maggiore efficacia di una o di altra acqua litontritica.

In secondo luogo poi desidero altresì sia ben inteso, che quantunque l'esperimento sulla solubilità dell'ossalato di calce immerso in una *limitata quantità d'acqua naturale di Fiuggi* sia stato eseguito dal Dott. Morfino senza veruna mia cooperazione od ingerenza (3) tuttavia conoscendo la somma perizia e quel che più monta la non comune onestà del sullodato dottore, io credo non possa esservi alcuna ragione speciale per impugnarne i risultati; opinione che d'altronde sembrami in sostanza divisa anche dalla stessa *Civiltà Cattolica*.

Ciò premesso e ritenuto, come è notissimo, che l'acqua alcalina di Fiuggi essendo affatto limpida, senza verun sapore ed odore particolare, si può

---

torità in certo modo del Prof. Taddei, il quale come ho già detto, le ricusa qualsiasi azione sulle malattie dipendenti dai detti calcoli; per converso il Prof. Scalzi ritiene che l'Acqua di Fiuggi possa avere una efficacia medicamentosa *anche sui calcoli ossalici*, i quali appunto a parere della nominata *Civiltà Cattolica*, non sarebbero affatto attaccati dalla ridetta acqua allo stato naturale.

(1) Nuove osservazioni sulle sorgenti dell'acqua antilitiaca di Anticoli (Campagna) denominata di Fiuggi. Roma, 1883.

(2) Memoria citata nella nota Num. 1.

(3) Ho detto che l'esperimento sulla solubilità dei calcoli di ossalato immersi in piccola quantità di acqua fu eseguito esclusivamente dal Morfino, che nè dette ragguaglio nella citata sua opera a pag. 16; ma giova avvertire che il fatto della facoltà dissolvente di cui è dotata questa acqua anche sopra simili concrezioni era stato già in precedenza amplamente constatato all'appoggio di altre formali e rigorose esperienze eseguite peraltro sulle stesse scaturigini. Ma poichè le condizioni di questi esperimenti fatti alle sorgenti, sia per la durata dell'immersione dei solidi, sia per la diversa quantità del liquido usato, evidentemente non furono identiche con quelle dell'esperimento fatto dal Morfino (ripetuto recentemente dalla Civiltà Cattolica) non sarebbe stato del caso d'invocare qui le risultanze dei primi a comprova di quelle dei secondi: lo che peraltro non esclude che indipendentemente anche da questi ultimi esperimenti possa ritenersi ormai come accertato che *l'acqua* di Fiuggi può esercitare allo stato naturale *un' azione fondente anche sugli ossalati*.

facilmente confondere con qualsiasi altra acqua comune potabile purchè di buona qualità, parmi non sarebbe fuor di luogo nel caso il dubitare che la supposta acqua di Fiuggi, di cui si valse la Civiltà Cattolica per porvi in immersione il calcolo di ossalato, invece di essere proveniente da quella sorgente, fosse stata invece un'acqua comune qualsiasi od anche, se così vogliasi, un'acqua di Fiuggi diluita alla *n^esima^* potenza con altra acqua ordinaria!

Non intendo con ciò di spargere il benchè minimo dubbio sulla genuinità dell'acqua di Fiuggi che si trova in commercio nei diversi depositi esistenti in varie città d'Italia, alcuni fra i quali mi consta che se ne provvedono direttamente e come suol dirsi di prima mano, facendola attingere alla stessa sorgente; purnondimeno trattandosi di dover ragionare sopra un esperimento eseguito con una data acqua, sembrami che anzi tutto si possa e si debba esigere una piena sicurezza sulla provenienza della medesima dalla sorgente da cui prende il nome. Ma ammesso pure che l'acqua usata nell'esperimento fatto (forse a Firenze?) dalla Civiltà Cattolica fosse realmente acqua naturale di Fiuggi, ed ammesso altresì che la concrezione di ossalato in essa trattenuta per parecchi giorni, non abbia presentato alcun segno di diminuzione, come per contrario ebbe ad osservarlo il dottor Morfino usando sopra luogo ossia in Anticoli stesso la medesima acqua, egli è evidente che per conciliare questi due fatti solo in apparenza contradittori non potrebbe ricorrersi, per quanto almeno io ne penso, ad altra soluzione plausibile che non fosse quella di accettare, come una realtà positiva, quanto la *Civiltà Cattolica* accennò meramente in via di dubbio e cioè che l'azione spiegata dall'acqua di Fiuggi sulle concrezioni calcolose debba ritenersi tanto più energica, quanto più l'acqua è di fresca provenienza, ossia quanto più di recente è stata attinta dal luogo in cui scaturisce. Ora, in quanto a me, non esito dichiarare che per molte ragioni, sulle quali mi dispenso qui d'intrattenermi, io sono talmente persuaso di questo principio che non dubitai già asseverarlo nei miei precedenti scritti sopra quest'acqua, appoggiandomi a diverse autorità di valentissimi Idrologi ed in ispecie a quella del Prof. Chimenti che più particolarmente si occupò della nostra acqua di Fiuggi (1). A queste devo ora aggiungere quella dello stesso prelodato Dott. Morfino, riferendomi a quanto esso saviamente volle indicato negli articoli 8° e 9° delle sue istruzioni terapeutiche poste in fine del ricordato suo lavoro sul-

(1) Dell'acqua di Anticoli detta di Fiuggi. Osservazioni pratiche del Dott. Francesco Chimenti. Roma 1863.

l'acqua in parola, lavoro che come dissi in altra occasione, formò già il soggetto di parecchie riviste scientifiche, nelle quali fu unanimemente e meritamente commendato.

Sono ben lungi dall'inferire da ciò che l'acqua di Fiuggi esportata che sia, particolarmente poi se imbottigliata e turata a dovere sopra luogo, e bevuta a domicilio non conservi un'efficacia singolare per la cura in ispecie della diatesi urica e sue manifestazioni; dappoichè il fatto del non lieve annuale consumo che se ne fa in varie città d'Italia, in Roma stessa e perfino all'estero è per me una prova sicura che coloro i quali ne usano devono trovarvi per lo meno un sensibile lenimento alle loro sofferenze; peraltro non è egli men vero che ove i suddetti malati potessero e volessero eseguire le loro cure sopra luogo ed a stagione opportuna ben maggiori sarebbero i vantaggi che potrebbero ripromettersi dall'uso di quest'acqua ingerita presso la sorgente medesima.

Del resto sarebbe superfluo qui ripetere quanto più volte ho già avuto occasione di dichiarare, d'accordo in ciò pienamente coll'opinione della ripetuta *Civiltà Cattolica*, con quella del Morfino e dirò pure di tutti gli scienziati e cioè che non si deve congetturare in modo assoluto dall'effetto che quest'acqua produce nel suo stato naturale sopra i materiali in essa immersi per modo di saggio e per esperimento da gabinetto, quello che può produrre nel corpo umano sui calcoli orinari. Non pertanto a miglior intelligenza della questione ed affinchè questa non corra pericolo di spostarsi dal terreno su cui fu originariamente iniziata, stimo prezzo dell'opera innanzi di por termine a questo scritto, (motivato eventualmente dalla precitata pubblicazione della *Civiltà Cattolica*), di soggiungere in proposito poche altre riflessioni.

Non vi è alcuno tra i medici antichi e moderni che abbiano avuto in cognizione l'acqua di Anticoli, il quale, a mio credere, siasi ricusato accordarle un singolare potere curativo in ispecie nelle malattie che riconoscono il principio da una affezione calcolosa delle vie orinarie, ed il fatto dei moltissimi malati che fin da remoto tempo si valsero efficacemente di quell'acqua e che tuttora fiduciosi vi ricorrono per consiglio e suggerimento dei rispettivi curanti, conferma amplamente questo mio apprezzamento. Non tutti i Medici però furono unanimi nel precisare o a meglio dire nell'interpretare il modo con cui queste acque fisiologicamente agiscono nella vita intima del nostro organismo. Tra questi recentemente un eminente nostro

Prof. (1) fu di parere che l'azione antilitiaca di cui è dotata la nostra acqua non potesse già attribuirsi ad alcuna *virtù speciale ed intrinseca* della medesima, ma esclusa l'idea di qualsiasi sostanza mineralizzante e *dissolvente* sostenne invece doversi ritenere che la ridetta acqua agisca *in via meramente risolvente ed espulsiva.*

Benchè profano alla scienza medica, tenuto conto nulladimeno di parecchie osservazioni che in ripetute circostanze io stesso avea avuto occasione di fare sopra gli effetti di quelle acque, tale concetto a me non parve pienamente attendibile.

Si comprende di leggieri che una esatta analisi avrebbe potuto senz'altro sciogliere ogni dubbio in proposito; ma in difetto di questa, pensai che una serie di esperienze condotte colla debita precisione ed accuratezza sopra materiali di diversa natura immersi per più o meno tempo nella precitata acqua allo stato naturale, avrebbero potuto se non altro somministrare un po' di luce in argomento, che è quanto dire avrebbero potuto constatare se queste acque in sostanza erano realmente in grado o no di spiegare, sempre allo stato naturale, qualche virtù chimica o dissolvente sui detti materiali.

Ecco pertanto l'origine degli esperimenti che ebbi l'agio di eseguire sulle sorgenti coll'autorizzazione del Municipio di Anticoli e coll'intelligente cooperazione del Dott. Morfino, di cui resi conto nelle mie precedenti memorie (2) ai quali poi fecero seguito quelli fatti esclusivamente dallo stesso Dott. Morfino, che la *Civiltà Cattolica* riportò nel suo quaderno Num. 846 del 3° Sabbato di Settembre 1885.

Dietro le risultanze favorevoli di questi esperimenti, basandomi sopra alcuni criteri di analogia che diffusamente ebbi luogo altra volta di esporre, per mia parte (e con me anche il Dott. Morfino) ho acquistato una ferma convinzione che l'acqua di Fiuggi a simiglianza di quella di Vichy e di altre località, possiede realmente una virtù intrinseca capace di fondere le concrezioni che si formano nell'apparato delle vie orinarie. Quale sia peraltro questo principio mineralizzatore a cui si deve tale virtù, non potrà essere rivelato all'infuori che da un'esatta analisi chimica: analisi che finalmente ho la soddisfazione di annunciare (dopo averla tante volte suggerita e raccomandata!) essere ormai in corso di esecuzione, sotto l'immediata di-

---

(1) Delle acque di Anticoli e del loro vantaggio contro i calcoli orinari. Memoria del Dott. Francesco Scalzi, Professore di Materia medica di Terapia e d'Igiene nell'Università Romana, Membro del Coll. Medico Chirurgico, Primario degli Ospedali di Roma. Roma 1867.

(2) Memorie citate nelle note 1 e 3.

rezione dell'illustre Prof. Cannizzaro nell'Istituto Chimico dell'Università Romana.

In attesa peraltro della pubblicazione di questa analisi, la quale son sicuro gioverà sempre più a confermare il potere curativo dell'Acqua di Anticoli nelle affezioni calcolose e sue congeneri, per quanto si riferisce alla questione scientifica a cui ho accennato di sopra, non sarà senz'interesse l'apprendere un'altra recente esperienza fatta dal più volte citato Dott. Morfino, dal quale vennemi testè gentilmente comunicata.

Il suddetto Prof. a viemeglio ribadire il principio che l'acqua di Fiuggi, non è già semplicemente, come si era in contrario opinato, un'*acqua potabile tipo, molto prossima all'acqua distillata* a simiglianza della quale *tender deve a caricarsi di materiali estranei e servire in tal modo al discioglimento ed eliminazione dei principî solidi contenuti nelle vie orinarie*, (1) ma che invece deve senza meno possedere una facoltà distinta capace di sciogliere direttamente le concrezioni calcolose; avuti 22 calcoletti di acido urico del peso complessivo di centigrammi 80 emessi tutti da poche ore da un tal G. A, a seguito appunto della cura di quest'acqua per uso interno, ne distribuì la metà del peso di centigrammi 40 di una carafa di vetro contenente 200 grammi di acqua di Fiuggi presa di fresco dalla sorgente, ed il residuo in altra carafa ripiena di egual volume di acqua distillata; quali carafe a vista di parecchi testimoni che presenziarono l'operazione furono quindi chiuse e suggellate ermeticamente. Tutto ciò risulta da un apposito processo verbale, che mi fu reso ostensibile, munito della vidimazione legale dell'autorità competente.

Trascorso appena un mese dall'immersione, previo riscontro dell'integrità dei sigilli, i calcoletti infusi nell'acqua distillata si verificarono appena sbiaditi di colore e quasi insensibilmente diminuiti di volume, mentre il liquido si era mantenuto presso che perfettamente chiaro; laddove per converso quelli immersi nell'acqua di Fiuggi si trovarono per la massima parte completamente disciolti, ad eccezione di tre che quantunque assai diminuiti presentavano ancora un certo spessore (2); il fondo poi di questa seconda carafa si notò coperto da un abbandante sedimento terroso, il quale ancorchè lievemente agitato, comunicava all'acqua un forte intorbidamento di un colore carico opalescente o lattiginoso.

(1) Scalzi memoria citata.

(2) Probabilmente l'acqua era già saturae da ciò il residuo dei tre piccoli calcoletti parzialmente insoluti.

Questa esperienza ebbe luogo nel Giugno 1885 ed io ho avuto l'agio (1) di osservare personalmente le due carafine nel Gennaio p. p. il cui contenuto si trovava tuttora nelle identiche condizioni che ho sopra descritte. Aperta in seguito quella che racchiudeva i calcoli disciolti ne fu decantata interamente l'acqua e sottoposto al microscopio il residuo, si ebbe luogo a rilevare che questo era costituito essenzialmente da granuli di renella non molto corrosi, ma però completamente disgregati fra loro: e poichè come è noto i calcoli sono formati essenzialmente (2) dall'aggregazione dei suddetti granuli cementati insieme a mezzo di un muco (sia esso *litogeno specifico*, sia renale, vescicale o degli ureteri) capace anch'esso di acquistare col tempo una durezza lapidea, sembra che dall'osservazione suddetta resti constatato che l'acqua di Fiuggi possiede realmente un'azione dissolvente sui calcoli, in quanto che ha una virtù specifica d'intenerire e sciogliere completamente il muco che serve di cemento alle particelle solide di cui si compongono i calcoli stessi.

Ora questo modo specifico di agire dell'acqua di Fiuggi è appunto quello che io stesso avea indicato e sostenuto fin da parecchi anni indietro (3) e che molto prima di me, benchè a mia insaputa, avea dato per probabile anche il celebre Dott. Taberlet in proposito di *Evian les Bains* nella sua scientifica illustrazione di quell'acqua minerale (4).

Comunque peraltro ciò avvenga, lo che è a sperarsi potrà esser meglio chiarito, dopo che sarà completata la ridetta analisi che a quanto pare sarà quanto prima resa di pubblica ragione, a me basta di aver riferito il risultato della suindicata esperienza fatta in parità di condizioni coll'acqua distillata e con quella di Fiuggi, per dimostrare anco una volta contro la tesi contraria, che quest'acqua agisce realmente in virtù di una facoltà propria ed intrinseca capace non solo di risolvere ma ben anche di dissolvere le concrezioni calcolose. (5)

---

(1) E con me il professore Francesco Marino Zuco, Assistente nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) G. Primavera — Manuale di Chimica-Clinica — Napoli, 1873.
Enrico Meckel — Mikrogeologie — Berlin, 1856.
Brigelow — Recherches sur le calculs de la vessie — Paris. N° 212. Thése.

(3) Veggasi « L'Acqua di Fiuggi in Anticoli di Campagna ». Studi del Cav. Giovanni Morfino Dottore in Medicina e Chirurgia. Foligno 1884.

(4) Evian ses eaux minérales et leur valeur thérapeutique par le D.r Taberlet ancien deputé. 2.me Edition. Nice 1883.

(5) Questa memoria venne presentata nella sessione III* del 21 Febbraio 1886, Anno XXXIX: ma essendo in ritardo la pubblicazione degli Atti, è stata inserita nel presente fascicolo a fine di sollecitarne la pubblicazione.

CONTRIBUZIONE ALLO STUDIO DELLA GEOLOGIA DELLE MONTAGNE MODENESI E REGGIANE

NOTE

DI D. G. MAZZETTI

Intorno alla relazione del terreno di Costa de' Grassi con le Arenarie di S. Martino e Ranocchio.

Costa de'Grassi è un piccolo villaggio dell'alta montagna reggiana, dipendente dal Comune di Castelnovo nei Monti: è situato a sud-ovest di quest'ultimo luogo, ed a pochi chilometri da esso. A sud tocca il fiume Secchia, e la vasta formazione gessosa di Vologno-Busana; mentre ad Est ha la famosa Pietra di Bismantova, che gli si erge a lato quasi smisurato gigante.

Anche il territorio di Costa de' Grassi, non altrimenti che tutti i territori apenninici, andò certamente soggetto alle più forti convulsioni telluriche; giacchè tutte quelle fra le poche sue roccie, che si trovano ancora in posto, hanno i loro strati non solo fortemente inclinati, ma in alcuni posti portati quasi alla verticale.

Fra le roccie poi, che concorrono a formare il territorio di Costa de'Grassi, le Argille scagliose sono le più abbondanti: le altre consistono invece in gessi, in serpentini, ed in Arenarie più o meno scipiti, di natura piuttosto argillosa o molto micacee, intersmolificate con Marne esse pure argilloso-micacee, o con calcari per lo più a fucoidi. Le argille scagliose occupano quasi da loro sole la maggior parte del paese: i Gessi, ed i serpentini affiorano nel suo lembo meridionale; e le arenarie coi loro calcari e marne, costituiscono poscia quel tratto di suolo, in cui sta il villaggio di Costa, con poche altre località ivi intorno.

Il territorio di Costa de' Grassi, si può quasi considerare come privo di Fossili; stantechè di tutte le roccie che lo formano, non vi sono che le arenarie ed i calcari che ne contengono. Però i calcari in alcuni posti sono gremiti di Fucoidi, ma le arenarie, meno qualche raro Ammonita (1) ed alcuni Inocerami (2) non hanno mai dato altri fossili in nessun luogo del detto territorio.

(1) Fin'ora non è a mia cognizione, che a Costa de'Grassi sia stato rinvenuto altro Ammonita, meno quello descritto dal Mantovani.

(2) Delle impronte di Inocerami a Costa de'Grassi ne sono state raccolte più di una; ed una

Ma quello che intorno alla roccia del territorio di Costa de'Grassi merita veramente di essere rilevato, si è: che coteste roccie ricoprono perfettamente alcuni tratti di terreno che affiora pur'anche a Montese, nelle sue frazioni di S. Martino e Ranocchio. In tutte e tre queste località, non solo vi si riscontrano sempre le stesse Arenarie argilloso-micacee, intercalate a strati di Calcari e Marne dell'istessa natura litologica e contenenti gli stessi fossili; ma tanto nel Rio Fontanelle presso Costa, quanto nella montata della Riola in S. Martino, non che alle Coste di Ranocchio, le roccie or' ora accennate si trovano ancor tutte stratificate in uno e medesimo ordine. (1)

E questa conformità delle roccie di Costa de'Grassi, colle arenarie di S. Martino e Ranocchio, sia poi un fatto che meriti realmente di venir segnalato, è cosa sì chiara e tanto evidente, che non ha certo bisogno di essere provata. Un tal fatto, non solo serve a dimostrare nel modo più spiccio e sicuro, che le dette roccie si sedimentarono tutte nello stesso tempo, in un medesimo mare, e sotto le stesse condizioni battimetrico-naturali, ma in pari tempo, mentre raggruppa insieme lontani paesi, e tende così ad unificare sempre più le sparse membra dei loro terreni geologici, contribuisce pur'anche grandemente al progresso degli studi geologici stessi di quelle località.

Ma se non mancano punto argomenti, per comprovare tanto l'identità di origine, che la parità di tempo di tutte coteste roccie, non è però così allorchè si tratta invece di determinare a che sistema geologico si devono ancora attribuire. È vero che coteste stesse roccie contengono fossili, che sono anche assai caratteristici: se non che questi fossili appartengono poi essi realmente alle roccie, presso le quali si sono raccolti? Volendo stare

di queste fa anche parte della mia collezione, che mi fu regalata dall'esimio mio amico Signor Domenico Tomei di detto paese. Come questa, così anche le altre impronte, e lo stesso Ammonita ov'era indicato, furono trovate dal medesimo Tomei nelle vicinanze del villaggio. Alcune di dette impronte dovrebbero trovarsi anche nel museo paleontologico della R. Università di Modena; giacchè da quanto mi assicurò il prenominato signore, gliele avrebbe mandate egli stesso in quell'anno, in cui fu ivi assistente alla Cattedra di Geologia sotto il Prof. Uzielli.

(1) Veramente la corrispondenza fra queste roccie, non che tra i fossili che contengono, non potrebbe certo essere più completa. Anche nell'alveo del Rio di S. Martino furono già raccolte più impronte d'Inocerami; ed una di queste da me stesso, che fu giudicata dal De-Stefani per un'impronta dell'*Inoceramus Cripsii*: della quale specie ne ha pure tutti i caratteri anche l'altra impronta che posseggo di Costa de'Grassi. È vero che sino al presente nè a S. Martino, nè a Ranocchio si sono ancora trovate traccie sicure di Ammoniti; però il Signor Amilcare Lorenzini, con impronte di Inocerami, raccolse quivi ancora un'altra impronta singolarissima, che con molta probabilità appartiene ad un *Hamites*: per cui neppure nei preaccennati luoghi mancherebber i rappresentanti la famiglia dei detti Cephalopodi.

a tutte le probabilità, parrebbe proprio che non potesse essere altrimenti: ma d'altronde: chi ci sa dire in quanti modi una reliquia organica da un terreno di un'epoca può venire trasportata in quello di un'altra?

Tuttavia un motivo fortissimo, per ritenere che i prodotti fossili spettino realmente alle roccie presso le quali si trovano essi, mi pare sia questo anzi che no: vale a dire, che non solo presso le stesse roccie delle indicate località si trovano le medesime qualità di fossili; ma ben'anche, perchè in nessun altro posto delle indicate località si trova tal fatta di fossili, che attorno alle roccie or'ora accennate. Che identici fenomeni si possano ancor produrre in paesi diversi, e tra loro assai discosti, non è sicuramente impossibile: ma sarebbe però stranissimo, che questi stessi fenomeni si producessero pur'anche con tutte le particolarità, per fino le più minute.

Ammesso dunque come più probabile, che tali fossili sieno propri delle sopra indicate roccie, allora anche il posto che queste dovrebbero occupare nella scala dei terreni geologici, sarebbe nettamente indicato: poichè cotai fossili medesimi, essendo fossili appartenenti al sistema cretaceo, cretacee dovrebbero pur essere ancora le roccie dalle quali derivano.

Se non che: questi fossili sono poi essi assolutamente cretacei? e non potrebbe forse qualche loro specie essersi trafugata anche nell'eocene? Certo è, che non sarebbe questa la prima volta, che certi fossili attribuiti prima ad un sistema, o periodo geologico, si sono poscia in seguito raccolti ancora in altri: perchè dunque non potrebbe ciò essere avvenuto anche per quelli, di cui ora si parla?

Per verità; se si trattasse di fossili poco noti, e raccolti in roccie la cui età fosse ben determinata, si potrebbe giustamente ritenere che il tempo della vera loro apparizione, e la durata della vita loro, per mancanza di sufficienti cognizioni, fosse stata mal definita: e che quindi appartenessero essi a ben tutt'altro gruppo, o sistema di terreni, che non quello a loro stessi assegnato. Ma qui le cose procedono invece in senso inverso: chè i fossili raccolti tanto nelle roccie di Costa de'Grassi, quanto in quelle di S. Martino e Ranocchio, sono già conosciutissimi da tempo: nè sin'ora m'è noto che fossili di tal fatta se ne siano mai trovati, che in roccie cretacee: mentre all'opposto le roccie che li contengono, per l'incertezza appunto della relativa loro posizione stratigrafica, dai geologi locali sono state più volte trasportate, ora da un sistema, ed ora da un periodo all'altro geologico.

In fatti: Doderlein, che studiò con tanta cura queste località, nella sua Carta geologica delle provincie di Modena e Reggio, conguaglia coteste

roccie al macigno giovane, e le colloca nell'Eocene medio. (Note illustrative della Carta geologica del Modenese e del Reggiano; Modena, 1870). Mantovani nella descrizione dell'Ammonita di Costa de' Grassi, e delle roccie relative, accettò più volentieri l'idea dell'eocenità del detto Ammonita, piuttosto che far cretacee le rocce che lo includevano. (Delle Argille scagliose, e di alcuni Ammoniti dell'Appennino dell'Emilia: Atti della Soc. Ital. di Scienze Nat. V. 8; Milano, 1875). Capellini nella sua dotta Memoria intorno al Macigno della Porretta, parlando in genere dei terreni di quella parte di Appennino bolognese, che confina coll'Appennino modenese, e che presso a poco contiene le stesse roccie, asserisce a dirittura: che ciò che si ha quivi di ben accertato in fatto di roccie in posto, non si può riferire a terreno più antico dell'Eocene superiore (1). (Il Macigno della Porretta, e le roccie a Globigerino dell'Appennino bolognese: Mem. estr. dalla Ser. 4. Tom. 2. delle Mem. dell'Accad. delle Scienze dell'Istit. di Bologna, 1881). Manzoni poi trattando della miocenità del Macigno, colloca invece fra i membri cretacei del Flysch appenninico le Arenarie psammitiche, la Pietra forte, i Calcari alberesi, e le Argille scagliose, con Inocerami, Ammoniti, Paleodyction, e l'emertiliti: (Boll. del R. Com. Geologico, 1881; n. 1 e 2): rocce queste, che sono appunto le analoghe alle rocce di Costa de' Grassi, e di S. Martino e Ranocchio or'ora accennate.

Da tutto questo si vede dunque chiaramente, che fra i Geologi che hanno studiato coteste località niuno ha mai dubitato, che gl'Inocerami ed Ammoniti, trovati sopra le roccie prenominate, non fossero cretacei: ma che l'unica discrepanza, che quivi stesso si riscontra fra essi, consiste appunto nella determinazione del posto, che le roccie in discorso dovrebbero realmente occupare nella serie cronologica dei terreni, costituenti l'Appennino emiliano.

Che se poi i medesimi Geologi, anche ad onta della qualità tutta particolare dei fossili, continuarono ancora a lasciare nel Gruppo terziario cotali roccie, non se ne può certo far nessun caso: stante che da un lato non si è mai voluto credere, che nell'Appennino dell'Emilia potessero esistere in posto roccie veramente cretacee; e dall'altro essendosi sempre raccolti cotesti fossili in terreni argillo-scagliosi orribilmente sconvolti, e tenuti ancora per eruttivi, piuttosto che fossili appartenenti alle dette roccie, dai

(1) Aveva appena terminato questo piccolo lavoro, allorchè mi capitò in mano una recentissima Memoria del Prof. Capellini intorno *Al Cretaceo superiore ed il gruppo di Praibona nell'Appennino*, etc. nella quale memoria il chiarissimo Professore ammette ora anch'esso, che in detto Appennino vi hanno sì roccie, il cui *complesso litologico è analogo al vero Flysch eocenico superiore alpino, ma che pei fossili devesi ritenere come rappresentante il cretaceo superiore.*

sopraccitati Geologi si consideravano invece come fossili trasportati in esso da roccie assai più profonde, e di maggiore antichità.

Intorno alla corrispondenza fra le roccie costituenti le due Catene montuose di Montello, Montese, Monteforte; e di Semese, Sassoguidano, Gaiato.

Al nord-est di quella catena di monti, su la quale stanno Montello, Montese e Monteforte, n'esiste un'altra nou meno montuosa, e quasi parallella ad essa, su cui stanno pure Semese, Sassoguidano, e Gaiato.

E bene: le roccie componenti queste due catene di monti corrispondono perfettamente fra loro, tanto sotto l'aspetto litologico, che petrografico: giacchè mentre i loro crinali sono costituiti da Calcari identici, intersecati alle stesse molasse serpentinose, e marne di natura terrosa; da marne più o meno grossolane, tutte della medesima natura mineralogica, e qua e là intersecate da qualche esile strato di Calcare sabbionoso, sono parimenti composte ambe le loro basi.

Ma non è tutto: la medesima corrispondenza, che si riscontra fra le rcccie componenti le due catene montuose or'ora accennate, si trova pur'anche fra i fossili, che esse reciprocamente contengono: poichè nella stessa guisa che le roccie costituenti i loro crinali hanno Echinodermi e spugne della medesima specie, appartenenti al Miocene inferiore; così quelle che ne formano le basi abbondano invece di Gasteropodi e Conchiferi, essi pure tutti della stessa qualità, e spettanti al miocene medio.

Ora: dietro questi fatti, mi sembra che si possa certo inferire, che le roccie superiormente indicate, oltre di appartenere tutte quante allo stesso periodo miocenico, dovettero pur'anche essere una volta tutte quante unite insieme, e fra loro strettamente collegate: unione che venne poscia interrotta da una qualche catastrofe tellurica, che le sollevò, le infranse, e le ridusse allo stato presente.

Ma e cotesta catastrofe in che epoca mai sarà ella avvenuta?

Come abbiamo già anche precedentemente accennato, le roccie che costituiscono le due catene montuose di Montese e Sassoguidano, appartengono sì al medesimo periodo geologico; ma non però tutte allo stesso piano: perchè quelle che formano il loro crinale, per la natura dei fossili che contengono, spettano al miocene inferiore (1), mentre le altre appartengono invece al miocene medio.

(1) Qui però non voglio intralasciare di avvertire, che la maggior parte delle specie di echi-

Or bene gli strati di tutte coteste roccie si succedono ovunque regolarmente l'un l'altro e senza nessuna vera discordanza fra essi; da che anche là, ove sembrerebbe scorgervi qualche disarmonia tra i medesimi, da quanto si vede, questa è sempre più apparente che reale; e dipende piuttosto da forme topografiche dei posti, che non da vera irregolarità di successione.

Pare dunque non potersi dubitare, che la catastrofe che spaccò, e divise d'infra loro coteste due serie di monti, non sia proprio accaduta, se non se in sul finire del sistema miocenico; e forse precisamente, allorchè sorsero i numerosi serpentini di queste località. Certo è, che se una tale catastrofe fosse succeduta prima di questo termine, la relativa posizione stratigrafica delle dette roccie, non sarebbe sicuramente così ordinata, come anche attualmente si trova.

E che poscia l'eruzione dei serpentini di cotesti luoghi, abbia anch'essa contribuito non poco al sollevamento delle roccie in discorso, e a dar loro la forma orografica, che conservano forse anche in oggi, si arguisce anzi tutto da ciò: che molti di questi serpentini, per contenere acclusi non pochi frammenti di Calcare marnoso eocenico, mostrano già chiaramente di essere sortiti dal seno della terra dopo la formazione di una tal roccia; poi si comprova ancora dal fatto: che questi serpentini medesimi si trovano appunto tutti allineati lungo la valle, che s'intromette fra le due serie dei monti predetti.

Ma qui si potrebbe forse muovere la quistione, intorno alla natura eruttiva o meno delle roccie serpentinose. Se non che ad onta di tutto ciò che si è detto anche contro all'idea eruttiva dei serpentini, per me tanto non ho ancora trovato nessun'argomento che m'induca a modificare l'opinione, che su questo particolare ho già altre volte manifestata; cioè che i serpentini, e particolarmente poi quelli di cui ora si parla, sieno in realtà di natura eruttiva: (*Montese, ed i suoi terreni geologici, ecc.* estratto dall'Annuar. della soc. dei Nat. di Modena; An. 15. – Tip. Vincenzi, 1881): e ancorchè non vi fossero altre ragioni per confermarmi in essa, mi basterebbe sempre questa sola; vale a dire l'insieme delle forme, sotto le

---

nodermi, raccolti tanto su la catena montuosa di Montese, che su quella di Sassoguidano, appartiene all'eocene, e sono analoghi a quelli che si trovano nel Vicentino in consimile terreno. Di più, in coteste località manca ancora sin qui qualunque traccia di Clypeastroidi. Si potrebbe dunque ripetere benissimo anche per queste roccie la bella frase or'ora citata del Capellini; vale a dire « che pel complesso loro litologico esse appartengono al miocene inferiore; ma pei fossili dovrebbero invece spettare al terreno eocenico ».

quali si presenta anche solo all'occhio il grosso ammasso serpentinoso di Montespecchio.

Del resto però per far ritenere, che i serpentini almeno di Montese sieno veramente di natura eruttiva, oltre all'argomento che ne porge il serpentino di Montespecchio, vi sono ancora altre ragioni non poche: e tali sono certamente « lo stato quasi completamente bolloso e scoriacieo di alcuni di essi », non che « la metamorfosazione che in molte località hanno subìto le roccie al loro contatto (1): metamorfosazione, che lo stesso Dodorlein avea già constatata anche prima di me; anzi fu forse questa medesima metamorfosazione la causa principale, che indusse il detto Geologo a classificare i serpentini della media montagna modenese e reggiana fra le roccie mioceniche. (2)

Modena, 29 Gennaio 1885.

Ab. Giuseppe Mazzetti.

---

(1) Il Prof. Taramelli nella sua Memoria *Contribuzione alla geologia dell'Appennino di Piacenza*, che gentilmente mi favorì, indica come argomenti contrari all'eruttività dei serpentini la « *mancanza di metamorfosismo* » nelle roccie a contatto coi serpentini stessi, non che l'assoluta « *mancanza di struttura bollosa e scoriacea* » in essi. Mi dispiace grandemente, che il chiarissimo Prof. Taramelli non abbia ancora visitati di persona i serpentini di Montespecchio, e del Faldello: da che sono persuasissimo, che così si sarebbe convinto, che tali mancanze almeno nei serpentini di Montese, non si riscontrano: fatto che io stesso avea di già notato fino dall'anno 1881; nella mia Memoria *Montese, ed i suoi terreni geologici*, etc.

(2) Il Prof. Doderlein, seguendo l'opinione particolarmente del Savi attribuì alla media montagna modenese e reggiana i serpentini di 3ª eruzione, che sono appunto quelli di Verona, Pompeano, di Montespecchio etc.; che perciò fanno parte della regione miocenica di questa parte del basso Appennino dell' Emilia.

LETTERA DEL SOCIO CORRISPONDENTE
P. GIOVANNI EGIDI, S. J.
AL R. P. FERRARI
INTORNO AD UN PROBLEMA DI GNOMONICA

Pregmo e Rev. P. Stanislao,

Trovandomi qui in Segni e volendo accertarmi se il mio e gli altri orologi segnassero giusto e non avendo alla mano che l'orologio solare indipendente dalla meridiana, che Ella presentò alcuni anni fà all'Accademia, mi servii di quello, ma mi venne il dubbio, se con quello solo e senza conoscere che approssimativamente la declinazione del Sole, avrei potuto ottenere un risultato soddisfacente. Quindi mi venne in pensiero di sciogliere il problema seguente:

« Conoscendo la latitudine del luogo, e l'altezza del Sole, trovare l'ora » e la declinazione solare media del giorno, per mezzo di due o più os» servazioni ».

Siano h, h', h'' gli angoli orarii rispondenti alle distanze zenitali z, z', z'' osservate in diverse ore, λ' il complemento della latitudine del luogo, e δ' il complemento della declinazione media del giorno: dovranno verificarsi le equazioni

$$\cos h \ \operatorname{sen}\delta' \ \operatorname{sen}\lambda' = \cos z - \cos\lambda' \cos\delta' \qquad (1)$$

$$\cos h' \ \operatorname{sen}\delta' \ \operatorname{sen}\lambda' = \cos z' - \cos\lambda' \cos\delta' \qquad (2)$$

$$\cos h'' \ \operatorname{sen}\delta' \ \operatorname{sen}\lambda' = \cos z'' - \cos\lambda' \cos\delta' \qquad (3)$$

Benchè ciascuna di queste equazioni abbia due sole incognite cioè angolo orario e complemento della declinazione, tuttavia perchè vi si trovano moltiplicate insieme le funzioni di tali archi, e perchè vi sono il seno e il coseno di δ', e perchè gli angoli orarii in ciascuna sono diversi perciò due sole di esse darebbero una equazione di grado superiore al primo da risolvere in fine, anzi almeno di quarto grado. Da tutte e tre però si può ricavare una risoluzione di primo grado, se coll'orologio si siano no-

tate le differenze di ore $h - h'$, $h' - h''$. Difatti dividendo l'(1) per la (2), e la (2) per la (3) otteniamo

$$\frac{\cos h}{\cos h'} = \frac{\cos z - \cos\lambda' \cos\delta'}{\cos z' - \cos\lambda' \cos\delta'} \qquad (4)$$

$$\frac{\cos h'}{\cos h''} = \frac{\cos z' - \cos\lambda' \cos\delta'}{\cos z'' - \cos\lambda' \cos\delta'} \qquad (5)$$

le quali ci dànno

$$\cos\lambda' \cos\delta' (\cos h' - \cos h) = \cos h' \cos z - \cos h \cos z'$$

$$\cos\lambda' \cos\delta' (\cos h'' - \cos h') = \cos h'' \cos z' - \cos h' \cos z''$$

ossia

$$\cos\lambda' \cos\delta' = \frac{\cos h' \cos z - \cos h \cos z'}{\cos h' - \cos h} \qquad (6)$$

$$\cos\lambda' \cos\delta' = \frac{\cos h'' \cos z' - \cos h' \cos z''}{\cos h'' - \cos h'} \qquad (7)$$

sostituito il valore (6) nel secondo membro della (1) e il valore (7) nel secondo membro della (2) avremo

$$\cos h \,\mathrm{sen}\delta' \,\mathrm{sen}\lambda' = \cos z - \frac{\cos h' \cos z - \cos h \cos z'}{\cos h' - \cos h}$$

$$\cos h' \,\mathrm{sen}\delta' \,\mathrm{sen}\lambda' = \cos z' - \frac{\cos h'' \cos z' - \cos h' \cos z''}{\cos h'' - \cos h'}$$

che ridotte ci somministrano

$$\mathrm{sen}\delta' \,\mathrm{sen}\lambda' = \frac{\cos z' - \cos z}{\cos h' - \cos h} = \frac{\mathrm{sen}\,\frac{z + z'}{2} \;\; \mathrm{sen}\,\frac{z - z'}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{h + h'}{2} \;\; \mathrm{sen}\,\frac{h - h'}{2}} \qquad (8)$$

$$\mathrm{sen}\delta' \,\mathrm{sen}\lambda' = \frac{\cos z'' - \cos z'}{\cos h'' - \cos h'} = \frac{\mathrm{sen}\,\frac{z' + z''}{2} \;\; \mathrm{sen}\,\frac{z' - z''}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{h' + h''}{2} \;\; \mathrm{sen}\,\frac{h' - h''}{2}} \qquad (9)$$

Da queste abbiamo ponendo

$$M = \frac{\operatorname{sen}\frac{z' + z''}{z} \operatorname{sen}\frac{z' - z''}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h' - h''}{2}}$$

$$N = \frac{\operatorname{sen}\frac{z + z'}{2} \operatorname{sen}\frac{z - z'}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h - h'}{2}}$$

$$M \operatorname{sen}\frac{h + h'}{2} = N \operatorname{sen}\frac{h' + h''}{2} \qquad (10)$$

Siano ora α, α', α'' gli angoli orarii osservati nell'orologio rispondenti ciascuno al momento delle rispèttive osservazioni; sia ε l'errore dell'orologio (in arco) e supponiamo nullo o corretto l'andamento dello stesso orologio; avremo

$$h = \alpha + \varepsilon, \quad h' = \alpha' + \varepsilon, \quad h'' = \alpha'' + \varepsilon$$

e quindi

$$\frac{h + h'}{2} = \frac{\alpha + \alpha'}{2} + \varepsilon = \alpha_1 + \varepsilon, \qquad \frac{h' + h''}{2} = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} + \varepsilon = \alpha_2 + \varepsilon$$

con tale sostituzione la (10) dà

$$M (\operatorname{sen}\alpha_1 \cos\varepsilon + \cos\alpha_1 \operatorname{sen}\varepsilon) = N (\operatorname{sen}\alpha_2 \cos\varepsilon + \cos\alpha_2 \operatorname{sen}\varepsilon)$$

Donde si ha finalmente

$$\operatorname{tang}\varepsilon = -\frac{M\operatorname{sen}\alpha_1 - N\operatorname{sen}\alpha_2}{M\cos\alpha_1 - N\cos\alpha_2} \qquad (A)$$

che risolve il problema.

NB. Gli angoli orarii h, h', h'' dovranno prendersi col segno conveniente cioè negativi quelli osservati nelle ore antimeridiane, positivi quelli osservati nelle ore pomeridiane, l'errore ε è sempre dello stesso segno in se stesso, ma riesce di segno contrario rispetto alla distanza del sole dal meridiano nelle ore antimeridiane e pomeridiane.

La formola (A) suppone tre osservazioni e non è affatto comoda a calcolarsi, a me poi riusciva impossibile per non aver portato meco le tavole dei logaritmi. Cercai dunque se il mio orologio solare in carta mi desse

un metodo più facile e spedito, e mi pare di averlo trovato a questo modo.

Fo due osservazioni una nelle ore antimeridiane un'altra nelle pomeridiane: sia δ la declinazione vera del sole, e siano

Osservazioni antimerid.	Osservazioni pomerid.
h_0 l'ora vera	h_0^1 l'ora vera
h_1 l'ora data dall'orologio solare	h_1^1 l'ora data dall'orologio solare
h_2 l'ora segnata dall'oriuolo	h_2^1 l'ora segnata dall'oriuolo.

ε l'errore nell'ora dell'orologio solare, dovuto all'errore di declinazione.
k l'errore dell'oriuolo: supposto nullo o corretto l'andamento.

Se le due osservazioni sono fatte a un dipresso a distanze zenitali uguali del Sole, l'errore ε sarà il medesimo in h_1 e h_1^1, ma sarà di segno contrario nelle due osservazioni. Avremo adunque.

$$h_1 = h_0 + \varepsilon \qquad h_1^1 = h_0^1 - \varepsilon$$

$$h_2 = h_0 + k \qquad h_2^1 = h_0^1 + k$$

donde

$$h_2 - h_1 = k - \varepsilon$$

$$h_2^1 - h_1^1 = k + \varepsilon$$

e conseguentemente

$$k = \frac{(h_2 - h_1) + (h_2^1 - h_1^1)}{2} \qquad \text{(B)}$$

$$\varepsilon = \frac{(h_2^1 - h_1^1) - (h_2 - h_1)}{2} \qquad \text{(C)}$$

Ciò vuol dire che l'errore dell'oriuolo è la media degli errori trovati colle due osservazioni: quanto alla declinazione δ si può trovare direttamente sullo stesso orologio solare: poichè conosciuto k è conosciuto h_0 e h_0^1, e quindi ε, si vede sull'orologio in quale parallelo doveva trovarsi il sole per dare colle distanze zenitali osservate h_0 ovvero h_0^1.

Ecco l'applicazione di questo metodo fatta il 20 novembre pross. pass., ed Ella potrà verificare sopra un annuario astronomico se abbia trovata così con sufficiente approssimazione la declinazione del sole per quel giorno.

20 Novembre 1884

Latitudine del luogo $41^0\ 40'$

Declinazione approssim. presunta $-21^0\ 15'$

$z_1 = 87^0\ 10'$, $h_2 = 7^h\ 23^m$ ant.; $z_2 = 81^0\ 45'$, $h_2^1 = 3^h\ 47^m$

$h_1 = 7\ \ 30$ $\qquad$ $h_1^1 = 3\ \ 48$

$(h_2 - h_1) \quad = -7^m$ $\qquad$ $(h_2^1 - h_1^1) = -1^m$

$(h_2^1 - h_1^1) \quad = -1$

$-8 : 2$

$k = -4$

correz. temp. med. $= -14$

diff. $+10^m$ l'orologio avanza sul tempo medio

$$\left.\begin{array}{l} h_0 = 7^h\ 27^m \\ h_0^1 = 3\ \ 51 \end{array}\right\} \varepsilon = +3^m$$

$\delta = -20^0$ declinazione corretta

Questa che le ho esposto è una nuova applicazione, se non m'inganno assai utile in pratica, dell'orologio solare indipendente dalla meridiana, che Ella m'indusse a publicare, e perciò gliela ho mandata perchè credo che le darà piacere anche questo piccolo frutto della mia invenzione. Non le dico di presentare questa noticina all'Accademia, seppure a Lei non paresse cosa ben fatta, perchè mi pare che non meriti: ma in ciò mi rimetto al suo giudizio. Gradisca, ecc.

Segni, 1° Decembre 1884.

P. G. Egidi, S. J.

SUL MODO PIU' UTILE DI CONVERTIRE IN FORZA LOCOMOTRICE L'ENERGIA DI FORZE IDRAULICHE.

NOTA

DELL' ING. CAV. FILIPPO GUIDI

Al perfezionamento ammirabile degli apparecchi meccanici pel convertimento delle varie forze fisiche e per la loro trasmissione, associato alla teoria la più rigorosa io credo che sia debitrice l'era presente pei tanti ritrovati veramente utili e soddisfacenti: ed a questo perfezionamento ed a tali studi noi specialmente in Italia oltremodo ricchi di forze idrauliche dobbiamo tener rivolta la nostra attenzione per cavarne profitto il meglio che si possa.

Intendo parlare specialmente dei grandi vantaggi che ora si possono avere mercè i nuovi modi di trasmissione della energia meccanica sia direttamente sia per mezzo della energia elettrica, e più particolarmente di tale energia usufruita per la locomozione.

È difatti grande il vantaggio risultante dal ravvicinamento delle varie industrie che ci forniscono i mezzi per sopperire alle necessità ed alle comodità della vita, come del pari è di somma utilità lo stabilire nei centri popolosi, le diverse officine col trasporto della energia meccanica prodotta da una caduta d'acqua, energia che giaceva inutile in balzi e dirupi inaccessibili; ma la possibilità di animare, direi quasi gratuitamente la locomozione nelle vie ferrate che piani piano diverranno il mezzo ordinario di comunicazione fra grandi e piccole città, è di tale interesse che deve formare lo scopo precipuo dei nostri studi, specialmente per supplire al difetto che abbiamo in Italia dei carboni fossili.

I mezzi sperimentati sino ad ora per trarre profitto delle forze idrauliche nella locomozione sono – le trasmissioni funicolari – le trasmissioni elettriche – le locomotive ad aria compressa.

Le trasmissioni funicolari possono essere, non dirò utili, ma possibili per distanze non superiori a sei o sette chilometri, ma sempre è necessario servirsene per velocità mitissime: furono impiegate le funicolari con vantaggio per trasporto di minerali o materiali da costruzione, ed in qualche caso speciale anche per passeggeri, nei piani fortemente inclinati.

Le trasmissioni elettriche dettero sufficienti risultati sotto l'aspetto della

velocità ma il limite a cui si giunse finora o per la potenza dell'apparecchio rimurchiatore e per la distanza del tratto percorso è ristretto in cinque chilometri appena in piccole ferrovie da considerarsi come tramvie e nulla più. Si studia da molti indefessamente per vincere le difficoltà prattiche della trasmissione elettrica e si ritiene generalmente che si possa giungere mercé i recenti perfezionamenti ad esercitare tratti di vera ferrovia lunghi anche quindici chilometri.

Le locomotive ad aria compressa sono certamente più atte al trasporto dei passeggeri poichè per esse non è punto limitata la velocità e si può ritenere utile questo sistema di locomozione anche per tratti lunghi dai quindici ai diciotto chilometri. Stupendi sono i congegni coi quali si giunse ad attenuare di molto i suoi difetti: intendo parlare dei belli perfezionamenti apportati agli organi della distribuzione a mezzo de' quali passa l'aria dalle pressioni enormi del serbatojo ambulante a quel giusto grado di tensione, vantaggioso tanto per la pressione finale sui pistoni, quanto per lo scappamento con perdita limitata di elatere. Sono pure ingegnosissimi i varii mezzi trovati per combattere il grave inconveniente dell' agghiacciamento nei cilindri del vapor d'acqua sempre commisto all' aria compressa. Pur tuttavia con tanti miglioramenti non si è mai giunti ad ottenere che la locomotiva ad aria compressa valga a surrogarne una a vapore quale occorrerebbe almeno per l'esercizio di una ferrovia secondaria , della lunghezza di venticinque chilometri.

Eccomi dunque ad esporre il mezzo col quale sembrami potersi raggiungere lo scopo di cui parlo. Una forza idraulica, anche imponente, convertita in energia elettrica può senza dubbio esser trasmessa non di dirò a 50 a 60 chilometri per non ricorrere a troppo forti capitali necessari pei conduttori elettrici ma con sufficiente economia a 25 chilometri almeno. Si potranno adunque con tale bel raggio di distanza da questa forza idraulica stabilire tanti apparati elettrolitici dai quali ottengansi tanti bei volumi d'idrogeno e di ossigeno. Quest'ultimo sarà pur impiegato vantaggiosamente sia come comburente, sia come agente chimico in varie industrie, sia finalmente per uso dell'arte salutare; ma vediamo (ciò che più monta) l'impiego dell' idrogene. Sia dunque l'idrogene elettrolitrico compresso a 15 atmosfere nel serbatojo di una locomotiva in luogo dell'aria, e dico soltanto 15 atmosfere per non ricorrere a pressioni ben più elevate che sono pur adottate per le macchine ad aria compressa: si modifichi l'apparecchio motore perchè agisca nè più nè meno che come una delle macchine a gas divenute ormai comunissime; ebbene avremo,

senza esagerare di molto le dimensioni del serbatojo di siffatta locomotiva, 360 metri cubi di gaz idrogene disponibili, che secondo l'esperienze fatte coi motori Otto e Langen produrranno la forza di 100 cavalli effettivi in azione costante per la durata di due ore e mezza: il che significa che avremo una locomotiva atta a rimurchiare un treno del peso complessivo di 100 tonnellate all'incirca con la velocità di 36 chilometri l'ora per un viaggio di andata e per quello di ritorno in un tronco di ferrovia lungo 45 chilometri, senza tener conto della forza viva che si potrà utilizzare dall'elatere dell'idrogene compresso.

Siamo dunque a risultati che non hanno neppur confronto con quelli ottenuti sino ad ora o che si possa sperare che si ottengano dai tre sistemi di locomozione che sopra ho descritti.

Con una forza idraulica di 850 cavalli effettivi all'incirca si potrà ottenere l'azione della locomotiva or ora determinata per tre viaggi di andata e ritorno nelle 24 ore. Nelle macchine a gas fu già sperimentato l'idrogene puro o quasi puro in luogo del gas d'illuminazione ordinariamente adoperato: fu mestieri modificare soltanto gli organi della distribuzione; ma insomma niuna difficoltà s'incontrerebbe nell'uso dell'idrogene elettrolitico. Motori a gas della forza anche maggiore di 100 cavalli furono già costruiti ed adoperati con vantaggio; sarà necessaria soltanto una speciale disposizione degli organi motori per ottenere facilmente il movimento iniziale del treno.

Una difficoltà si presenta solo nella perfetta tenuta del serbatoio e specialmente di quelli ambulanti perchè dovran tenere un gas tanto sottile qual'è l'idrogene compresso a parecchie atmosfere; ma si conosce già che un velo sottilissimo di cautchouk tiene abbastanza bene l'idrogene, or dunque sarà cosa non difficile il costruire tali serbatoi con tutte le cautele immaginabili per la buona tenuta, e spalmarli poi nell'interno con vernice di cautchouk, in guisa da tappezzarne le pareti con uno strato di spessezza doppia e tripla di quella dei comunissimi globi che si veggono enfiati a gaz idrogene, spessezza che giunge appena ad un decimo di millimetro.

L'applicazione prattica di quanto io propongo avrà certamente le sue difficoltà, ma il non vederne a priori se non di natura ordinaria dovrebbe animare alla pruova.

COMUNICAZIONI

Statuti Prof. A. – *Presentazione di due memorie del Socio D. G. Mazzetti* :

Il Sig. Ing. A. Statuti presentò all'Accademia da parte del socio corrispondente D. G. Mazzetti di Modena sotto il titolo di « Contribuzione » allo studio della geologia delle montagne Modenesi e Reggiane » due memorie manoscritte, l'una « *Intorno alla relazione del terreno di Costa » dei grassi colle arenarie di S. Martino e Ranocchio* », l' altra « *In-» torno alla corrispondenza fra le roccie costituenti le due catene montuose di Montello, Montese , Monteforte , e di Semese , Sassoguidano e » Gaiato* ». Ambedue le memorie sono inserite nel presente fascicolo. Presentò inoltre da parte del medesimo D. G. Mazzetti i seguenti lavori scientifici già pubblicati. 1. Riflessioni intorno agli oggetti preistorici, alla trasformazione delle specie e all'origine ed antichità dell'uomo. 2. Due parole per dimostrare come in oggi si scriva la storia dai moderni scienziati. 3. Intorno alla roccia di un grosso Ammonita, che ha tutto l'aspetto di una roccia nummolitica. 4. Siamo ancora Cristiani? Domanda di David F. Strauss brevemente discussa. 5. La molassa marnosa delle montagne modenesi e reggiane e lo Schlier delle colline del Bolognese. 6. Echinodermi fossili di Montese. 7. Echinodermi nuovi della molassa miocenica di Montese nella provincia di Modena (Manzoni e Mazzetti) . 8. Le spugne fossili di Montese (Mazzetti e Manzoni). 9. Montese, i suoi terreni geologici, le sue acque minerali ed i suoi prodotti.

Castracane Ab. F. – *Presentazione di un opuscolo del prof. S. Rossi*:
Il Presidente presentò da parte del sig. prof. Stefano Rossi un suo lavoro sopra « Le piante acotiledoni vascolari e le graminacee Ossolane » dedicato alla memoria del compianto nostro socio P. Gagliardi. A questo suo bel lavoro l'Autore fa precedere un breve cenno biografico del Gagliardi, nel quale si vede quanto quel nostro socio ebbe a cuore la coltura delle scienze naturali e come fu tenuto in grandissima stima non solo in Italia, ma anche all' estero.

De Rossi Prof. M. S. – *Presentazione di note*:

Il Segretario presentò da parte del socio corrispondente prof. P. M. Garibaldi due note a stampa intitolate l'una « *Stato Meteorologico e ma-» gnetico di Genova per l'anno* 1888 », l' altra « *Sulla relazione fra le » macchie solari ed il magnetismo terrestre.* »

COMITATO SEGRETO

L'Accademia adunatasi in Comitato segreto procedette alla votazione delle proposte di due soci corrispondenti sig. Prof. L. Cerebotani e Prof. G. Luvini. Fatta la votazione, ambedue rimasero eletti.

Si venne quindi alla rinnovazione di cariche accademiche scadute di tempo e cioè del Presidente, due membri del Comitato e Commissione di Censura. A presidente venne per acclamazione confermato il Sig. Conte Ab. Francesco Castracane degli Antelminelli, a membri del Comitato Accademico vennero riconfermati i ch. P. G. S. Ferrari e prof. M. Azzarelli. La Commissione di censura rimase confermata per intiero.

Furono approvate le proposte di cambio dei nostri Atti colle pubblicazioni dell'*American Journal of mathematics* di Baltimora e del *Journal de sciencias mathematicas e astronomicas* di Coimbra.

Venne proposta ed approvata una aggiunta al regolamento accademico relativo al caso, nel quale un socio di qualsivoglia classe dell'Accademia venga elevato alla sacra Porpora. Fu stabilito che in tale caso il nuovo Porporato debba passare nella classe dei soci onorari. In seguito a ciò l'Emo Card. Ludovico Haynald Arcivescovo di Kalocsa, socio corrispondente, passa di fatto alla classe predetta dei soci onorari.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI: Conte Ab. Francesco Castracane, Presidente. – Ing. F. Guidi. - Ing. A. Statuti. – Cav. P. Sabatucci. – Cav. G. Olivieri. – Prof. V. De Rossi Re. – Prof. F. Ladelci. – P. G. Foglini. – Comm. C. Descemet – Prof. G. Tuccimei. – Prof. M. Azzarelli. – P. F. S. Provenzali. P. G. S. Ferrari. – P. G. Lais. – Prof. M. S. de Rossi, Segretario.

AGGIUNTI: March. L. Fonti.

La seduta apertasi legalmente alle ore 3 $^1/_2$ pom. fu chiusa alle 5 pom.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Annales de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro.* — T. II.me Observations et Mémoires, 1882. Rio de Janeiro MDCCCLXXXIII. In-4.°
2. *Archives du Musée Teyler.* — Série II, Vol. II. — Première Partie. — Haarlem, 1884. In-8.°
3. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXX, 1882—83, — Serie III. — Memorie. Vol. XI, XIV, XV, XVI, XVII. Roma, 1883, 1884. In-4.° Serie IV, Rendiconti, Vol. I. — Fasc. 4°, 5.° — Roma, 1885. In-4.°

4. BACHMETIEFF (B. E.) — *Meteorologische Beobachtungen, etc.*, Moskau, 1883. In-4.°
5. *Boletin de la Academia nacional de ciencias en Córdoba.* — T. VI. — Entr. 4ª T. VII, Entrega 1ª, 2ª. Buenos Aires, 1884. In 8.°
6. *Bollettino decadico dell' Osservatorio centrale in Moncalieri.* A. XIII, n.° 4, 6. Torino, 1884. In 4.°
7. *Bullettino della R. Accademia medica di Roma.* — A. X. — n. 8. — Roma, 1884. In 8.°
8. *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de S.t-Pétersbourg.* T. XXIX, n.° 2. Avril 1884. In-4.°
9. *Bullettin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou.* — A. 1883. — n.° 3, 4. — Moscou, 1884. In 8.°
10. *Crónica cientifica.* — A. VIII. N. 170, 171, 172. — Barcelona, 1885. In-8.°
11. GARIBALDI (P. M.) — *Stato meteorico e magnetico di Genova per l'anno* 1883. — Genova, s. a. In 4.°
12. —— *Sulla relazione fra le macchie solari e il magnetismo terrestre.* Roma, 1885. In-4.°
13. *Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Jah.* 37. Wiesbaden, 1884. In-8.°
14. *Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales* 1882, 1883. Vol. XVI, XVII. Sydney, 1883, 1884. In-8.°
15. *La Civiltà Cattolica.* — A. XXXVI, Serie XII, Vol. IX. — quad. 831, 832. — Firenze, 1885. In-8.°
16. MANZONI (A.) e MAZZETTI (G.) — *Echinodermi nuovi della molassa miocenica di Montese,* 1878. In 8.°
17. MAZZETTI e MANZONI. — *Le Spugne fossili di Montese.* Pisa 1879. In-8.°
18. MAZZETTI (G.) — *Siamo ancora Cristiani? Domanda di D. F. Strauss brevemente discussa.* Modena, 1876. In-8.°
19. —— *La molassa marnosa delle montagne modenesi e reggiane e lo schlier delle colline del Bolognese.* Modena, 1879. In-8.°
20. —— *Echinodermi fossili di Montese.* Modena, 1881. In-8.°
21. —— *Montese, i suoi terreni geologici, le sue acque minerali ed i suoi prodotti.* Modena 1881. In-8.°
22. —— *Intorno alla roccia di un grosso Ammonita, che ha tutto l'aspetto di una roccia nummulitica.* Modena, 1878. In-8.°
23. —— *Riflessioni intorno agli oggetti preistorici, alla trasformazione delle specie, e all'origine ed antichità dell'uomo.* Modena 1873. In-8.°
24. —— *Due parole per dimostrare come in oggi si scriva la storia da' moderni scienziati.* 1878. In 8.°
25. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — *Partie littéraire.* — Deuxième série, T. XXI. Première livraison. — Janvier. Paris, 1885. In-8.°
26. *R. Comitato Geologico d'Italia,* 1884. — Bollettino n. 11 e 12. Roma, 1884. In-8.°
27. *Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche.* — A. XXIII, fasc. 10, 11 e 12. Napoli 1884. In 4.°
28. ROSSI (S.) — *Le piante acotiledoni e le graminacee Ossolane.* Domodossola, 1884. In-8.°
29. SELWYN (A.) e DAWSON (G. M.) — *Descriptive Sketch of the physical Geography and Geology of the Dominion of Canada.* Montreal, 1884. In-8.°
30. TOLMIE (W.) e DAWSON (G. M.) — *Comparative vocabularies of the Indian tribes of British Columbia.* Moutreal, 1884. In-8.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE IVª DEL 15 MARZO 1885

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE
DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

ANALISI MICROSCOPICA DI UN CALCARE
DEL TERRITORIO DI SPOLETO

Nel ragionare della pratica utilità dello studio delle Diatomee, e delle diverse possibili applicazioni di quello ai molteplici rami della Biologia e Storia Naturale, più volte io ho avuto occasione di ricordare in particolar modo quanto valido aiuto da quello studio potrebbe trarre il Geologo a conoscere la storia di quelle formazioni ove le Diatomee vennero riconosciute. Fu pertanto ottimo consiglio quello dell'illustre Ehrenberg, quando intitolò la sua grande opera su le diatomee fossili Microgeologia, quantunque mi avrebbe sembrato meglio adatto il nome di Micropaleontografia, se pure non sonasse male la soverchia lunghezza di questo. Ed in fatti a rigore considerando la cosa non mi sembra appropriato l'aggettivo μικρος proposto al nome *geologia* perchè, quantunque si argomenti da minimi organismi, il giudizio viene formulato su la storia di uno strato di un banco di un giacimento di notevolissima estensione; invece il termine di micropaleontologia conviene a quello studio che versa attorno minutissimi organismi, i quali poterono conservarsi o lasciar loro impronte dalle più remote epoche geologiche, e stanno ad attestare al Geologo le condizioni con le

quali ebbe luogo quella formazione. Se pertanto fosse bene impresso nella mente dei Geologi Italiani l'importanza somma, che ha per la conoscenza della storia della formazione della nostra bella penisola il tenere conto dei minimi organismi, dall'enorme agglomeramento dei quali vengono spesso costituiti gli strati, il Microscopio dovrebbe sempre aver luogo fra la supellettile del Geologo. Quantunque non si possa pretendere che il Geologo sia al caso di potere determinare ogni Diatomea o Radiolaria o Policistina, ciò che assorbirebbe troppo tempo, è però indispensabile a mio modo di vedere che senza potere esattamente determinare il genere e la specie di ciascuno di quei minimi organismi, sia però in grado di costatarne la presenza, ricorrendo quindi al Micrografo specialista perchè convenientemente li determini. Il Geologo potrà essere ben persuaso che ove Esso potè appena constatare qualche traccia di corpicciuoli organizzati quegli che ne fece speciale soggetto di studio per l'abitudine e la lunga esperienza acquistata in tali ricerche, potrà con relativa facilità, isolarne un grande numero, così che ne rimarrà maravigliato per la copia, avendone prima intraveduto appena qualche traccia.

Fra i Geologi Italiani, che meglio si mostrarono persuasi della importanza che offrono le Diatomee ad indagare la storia della nostra Penisola nelle epoche già remote merita precipua lode il Professore Dante Pantanelli, il quale riconosciuta la presenza di microrganismi nei terreni che andava studiando, più volte mi ha gentilmente favorito campioni di roccia e materiali da Esso raccolti. Intendo pertanto attestare all'illustre Geologo la mia più viva riconoscenza per la gentilezza usatami con communicarmi quei materiali, avendo con ciò contribuito ad allargare le mie cognizioni su le Diatomee e più specialmente su i depositi Italiani. A Lui si deve l'avere indicato l'esistenza di un deposito di Diatomee e di Radiolarie nell'Appennino settentrionale e precisamente in quel di Modena presso Monte Gibbio e Baiso, e nel territorio Reggiano nella vicinanza della località detta i Quattro Castelli, già signoria della famosa Contessa Matilde e quindi della nobilissima famiglia dei Canossa. Fra i campioni diversi di quei depositi potei constatare l'esistenza di alcuni tipi, che sin ora non solamente non furono noverati fra le forme Italiche, ma talune non vennero pure ricordate nella flora Europea, e a convincere della verità di questo sarà sufficiente argomento il ricordare l'avere io riconosciuto in una preparazione del deposito di Monte Gibbio una nuova specie di Rutilaria, genere il più raro

sin ora fra quanti si conoscono, del quale un esemplare costituisce uno dei più rari gioielli che può vantare una collezione.

Devo pure alla gentilezza del Dott. Pantanelli l'avere acquistato la cognizione di un nuovo deposito di acqua dolce esistente nel territorio di Spoleto nell'Umbria. Esso mi inviava un campione di marna, che mi diceva appartenere al pliocene inferiore, la quale marna era sovraincombente a un banco di lignite dello spessore di ben dieciotto metri, il quale viene ora scavato per utilizzare quel combustibile a pro' di diverse industrie. Alla domanda del cortesissimo Donatore volentieri assunsi l'impegno di determinare i generi e le specie di Diatomee ivi contenute, accingendomi subito all'impresa. Alla prima occhiata che sul il campo del microscopio gettai all'insieme del materiale subito mi apparvero numerose Epithemie e Cyclotelle, ma tutte rimanevano perdute fra abbondantissimo detrito roccioso e non poco materiale amorfo. Alloia procedetti a tentare di liberare le Diatomee della maggiore quantità di quelle sostanze ingombranti trattando il materiale con acido solforico alquanto diluito, con il quale lo feci bollire in un provino, e atteso che ogui sostanza carboniosa venisse ossidata (ciò che veniva indicato dall'annerire del liquido), con l'aggiunta di piccolissimi cristallini di clorato potassico su l'acido bollente si avevano delle decrepitazioni, e in pari tempo dileguavasi interamente il colore nero nel provino, avendo luogo in quello la più completa disossidazione. A questo punto gettato il liquido acido e il materiale contenuto nell'acqua, procedevo a numerosissime accurate decantazioni ad eliminarne l'acido ed i sali solubili e quindi con ripetute lavande in acqua distillata purissima e con successive graduali levigazioni pervenni a fare belle preparazioni di Diatomee quasi perfettamente libere dalla associazione di sostanze estranee.

Ottenuto per tal modo di avere buone preparazioni di quel deposito, senza grave difficoltà procedetti a determinarne i tipi generici e specifici che vi si contengono. Come già dissi le forme più frequenti ad incontrare in quel deposito sono le Epithemie e le Cyclotelle. Le prime attraggono lo sguardo per la grandezza dei loro frustoli, e alla prima occhiata si riconosce esistere fra un tipo e l'altro notevoli differenze, che li dimostrano appartenenti a specie distinte. Ma la bellezza e il grande numero delle Cyclotelle richiamò principalmente la mia attenzione. Queste mi si presentavano sotto l'aspetto di elegantissimi dischi di diverse grandezze; ciascuno mostravasi contornato da larga fascia radialmente striata, larga circa un terzo del raggio. Una tal fascia circoscrive l'area centrale, che vedesi or-

nata da una stella di belle perle disposte quasi regolarmente a raggi con alcuni puntini qua e là disseminati. Un tale tipo specifico di Cyclotella ho posto a confronto con le diverse figure e relative descrizioni che abbiamo riguardanti un tale genere. La larga fascia radialmente striata con stria più forte ricorrente a regolari intervalli la ravvicina alla *Cy. comta*. E. Kz. ma ne differisce completamente nella striazione o granulazione dell'area media. Ed in fatti nella *Cy. comta*, il centro è finamente striato, a strie stipate più o meno radianti: invece nel tipo da noi preso in esame, l'area è elegantemente decorata da perle o grossi e rari granuli in file radianti, in distribuzione meno regolare, notandovisi contemporaneamente interpolati senza alcun ordine alcuni piccolissimi granuli puntiformi. Conosco ancora la *Cy. operculata*, Kz. *var. radiosa*, Grunow, la quale ha l'area centrale striata, ma in questa non si riscontra il carattere dei grossi e rari granuli, nè l'interpolazione irregolare di granuli piccolissimi puntiformi. Se avrei esitato nel riconoscere nella Diatomea Umbra una nuova forma specifica, incontrandone soltanto alcun raro esemplare, però non mi può rimanere alcun dubbio od esitazione nel caso nostro, avendone avanti gli occhi infinito numero di esemplari dotati tutti di identici caratteri. Dovendo pertanto alla gentilezza del Pantanelli la cognizione di questo nuovo elegantissimo tipo nella relativa ristrettezza della flora diatomacea di acqua dolce tanto più accessibile alle nostre ricerche e conseguentemente tanto più cognita della flora marina, tale nuova forma specifica sarà ricordata con il nome di *Cy. Pantanelliana* Cstr. ed eccone la definizione.

Cy, *Pantanelliana*. Cstr. nova species. « *E maximis: a latere rectangula, a fronte plana, tertia radii parte circum radiata ; area centrali rariusculis margaritis subregulariter radiata, nonnullis punctulis interpolatis.* »

Le forme diverse di Diatomee sin ora da me determinate nel materiale Spoletino sono le seguenti:

Epithemia Hyndmannii. W. Sm.
» *Zebra*, Kz.
» *ocellata*, Kz.
» *proboscidea*, Kr.
Cocconeis Placentula. E.
Cyclotella Pantanelliana. Cstr. n. sp.
Cymbella cuspidata. Kz.
» *obtusiuscula*, Kz.
» *gastroides*, Kz.

» (*Cocconema*) *Cistula*, E.
Pinnularia acuta, W. Sm.
» *radiosa*, W. Sm.
Navicula ovalis. W. Sm.
Fragilaria (*Odontidium*) *Harrisonii*, W. Sm.
Gomphonema Vibrio. E.
» ? *curvatum*. Kz.

Con questo breve elenco di Diatomee non intendo per alcun modo indicare che quelle siano le sole forme racchiuse in quel deposito, non essendomi in verun modo proposto il redigere un lavoro monografico, mentre invece volli soltanto dare un saggio dei tipi ivi inclusi, ricordando in partieolar modo i tipi che sono dominanti in quel materiale, e che gli imprimono una speciale fisonomia. Tali sono sopra tutte le diatomee le numerosissime Cyclotelle, e le forme diverse di Epithemia. Però oltre quelle merita speciale menzione la *Fragilaria* (*Odontidium*) *Harrisonii*. W. Sm. e per l'eleganza dei suoi frustuli cruciformi, e per la rarità di tale tipo. Questo da principio venne dall'illustre W. Smith (*Synopsis of the Britisch Diatomaceę*, II, pag, 18) con qualche riserva denominato *Odontidium*? *Harrisonii*, notando però che i caratteri forse potevano farlo riguardare come appartenente al genere *Staurosira*. E. In seguito il D.r Rabenhorst avendo riunito il succitato genere alla *Fragilaria* ritenne il tipo Smithiano riguardandolo come *Fragilaria Harrisonii*, quantunque la disposizione a file a zig zag avrebbe meglio dovuto ascrìverlo alle Tabellarie (Rabenhorst=*Flora algarum Europearum*, vol. I. pag. 18.) Questa Diatomea e forse la nuova specie di *Cyclotella*, per la di cui presenza il deposito, che ho preso ad esame, dovrà essere ricordato fra i più interessanti depositi di acqua dolce. Nè potrebbe aver luogo alcun dubbio nel riguardare quel deposito prettamente di acqua dolce, non essedovi tipo alcuno, il quale non venga di leggieri riconosciuto come proprio della flora terrestre, come apparirà a chiunque sia appena famigliarizzato con la conoscenza di tali organismi. Ma, quando lo studio di questi minimi organismi verrà seguito con serietà di propositi, possiamo essere certi, che dall'esame delle forme diatomacee, che si riconosceranno far parte di alcun deposito si potranno dedurre più particolarizzate notizie su le circostanze, che esercitarono la loro influenza su quella formazione. Trovo registrato nelle mie memorie l'avere per più anni raccolto abondantemente l'*Achnantes ventricosa*. E. da una piccola sorgente in quel di Gubbio mentre in altre sorgive site nel medesimo terreno e a pochi metri di distanza mai potei fra

le altre Diatomee incontrare un solo esemplare di quella rara specie. Chi potrà pertanto persuadersi che non vi sia a tale anomalia una ragione sufficiente, sia della diversità dello strato, dal quale fluiscono quelle acque, sia da diversa costituzione chimica del terreno? L' illustre micrografo Alfonso de Brebisson mi diceva di avere osservato che il *Gomphonema geminatum*, Ag. suole incontrarsi inquelle località ove abonda il principio calcare. Ne mancherebbero altri esempi a dimostrare come circostanze locali di costituzione di terreno, condizioni di temperatura, relativa altezza sul livello del mare e conseguente differenza di pressione barometrica siano meglio favorevoli alla vegetazione di una che di altra specie, cosichè dalla qualità delle Diatomee facenti parte di uno strato geologico si possa arguire le circostanze speciali, nelle quali tal formazione ebbe luogo. Intento a ricercare utili applicazioni dello studio al quale mi dedicai, volli vedere se dall'analisi microscopica istituita nel materiale Spoletino potessi divinare le circostcnze sull' influenza delle quali ebbe lnogo quel deposito; ponendo a confronto le mie deduzioni con le osservazioni stratigrafiche e peleontologiche che l'esimio Professore Pantanelli su la faccia del luogo aveva dovuto fare con più sicuro giudizio.

Indirizzatomi pertanto all' illustre Geologo per dargli conto delle forme diverse da me determinate in quel deposito, ed in pari tempo sottoponendogli le mie deduzioni perchè le cimentasse con i criteri geognostici da Esso raccolti, ecco quanto in proposito mi scrivea in data del 12 Marzo.
« Ella si è apposto bene ritenendo che le Diatomee Spoletine provennero
» da un ampio lago; infatti appartengono alla vasta deposizione lacustre
» della valle del Maroggia, che poi si continuava con quella di Foligno e
» probabilmente con quella dell'alto Tevere: ivi lo spessore dei depositi
» lacustri ascende a qualche centinajo di metri e i pochi molluschi ivi rac-
» colti confermano quello che Lei ha detto per le Diatomee. Il calcare o
» marna calcarea a Diatomee è sovrapposta a un banco di lignite di 15
» metri di spessore. Non doveva poi essere come Ella dice molto elevato
» sul livello del mare pliocenico 1° perchè la sua grande estensione male
» si accorda con la orografia pliocenica, che non comportava in quel pe-
» riodo vaste estensioni di terre emerse. 2° perchè il pliocene marino nella
» valle del Tevere (S. Gemini, etc.) è ad una altezza superiore a questi de-
» positi. »

Non occorre certamente che io mi trattenga guari a dire qual piacere io provassi nel leggere quelle parole. L'assicurazione che il giudizio da me

formulato dalla ispezione e determinazione dei microorganismi esistenti in quel materiale fosse consentaneo al vero, la quale assicurazione autorevolissima veniva appoggiata ad argomenti del maggior peso dedotti dallo studio accurato della località per parte dell'illustre Geologo e Paleontologo nel dovere dar conto dello scheletro di due Mastodonti e di un Tapiro rinvenuti fra quelle ligniti, mi convinceva essermi io bene apposto nel giudicare della importanza che può avere lo studio delle Diatomee per il progresso della Geologia. Un tale esempio di perfetta consonanza fra le osservazioni del Micrografo e le indicazioni stratigrafiche e paleontologiche, se non mi inganno, varrà a persuadere il Geologo della opportunità di rintracciare nel campo delle sue ricerche e peregrinazioni la presenza di minimi organismi, invocando alla circostanza l'aiuto dello specialista a meglio determinarli. Così pure il Micrografo dall'esempio addotto potrà essere eccitato a imprimere al proprio studio una direzione tale, che possa servire al progresso di altri rami di Scienza, se non anche a pratiche applicazioni a benefizio del civile consorzio.

È proprio delle verità tutte che più o meno dapresso l'una dall'altra dipendano come che sono emanazioni del sommo Vero. Così qualunque ramo di Storia naturale, che si prenda a coltivare, quando lo studio ne venga fatto con serietà di propositi, non tarderanno guari a far conoscere i legami che stringono l'uno all'altro cosichè siasi da attendere utili applicazioni da qualunque specialità, cui ci dedicammo. Queste applicazioni scaturiscono spontanee a misura che veniamo meglio ad approfondire lo studio intrapreso, ricercandone le attinenze. Però l'ordine logico evidentemente richiede che la cognizione di una cosa preceda la sua utilizzazione, e non viceversa. Ma le Diatomee, le quali ci sono note soltanto da pochi lustri, cioè dal momento che specialmente per l'opera del Modenese Professore Gio. Batt.ª Amici si potè ottenere ottimi microscopi acromatici, quelle fra le tante maraviglie del microcosmo ci vennero rivelate dal prezioso istrumento, ma non furono studiate se non che da pochi, e lo studio che se ne fece per lo più non venne diretto se non che alla determinazione e descrizione dei diversi tipi. Non è pertanto da maravigliare se tutt'ora la Diatomologia venga riguardata quale studio di puro lusso. Che però tale non sia questo studio ritengo che fra li altri argomenti che potrebbero opportunamente addursi l'esempio citato valga a dimostrarlo in ordine alla Geologia. Possa una tale verità imprimersi nella mente di quanti con lodevolissimo impegno si dedicarono alla coltura di una Scienza, la quale ad onta che sia la piu giovane fra tutte ora grandeggia fra le Scienze sorelle.

F. Castracane.

ILLUSTRAZIONE DI DUE MONUMENTI EGIZIANI

MEMORIA

DEL PROF. FRANCESCO LADELCI

Signori Accademici

Nei diversi lavori che nelle accademiche sedute degli anni scorsi ho avuto l'onore di presentare mi si è data occasione di far rilevare l'attività grandissima vitale di cui sono dotati tutti gli esseri organici, non esclusi anche quelli di più semplice struttura e di piccolissima mole, come sono le piante crittogame, fra le quali sono più considerevoli i microfiti, e nel regno animale i microzoidi.

Per quanto mirabile però ci si mostri questa vitale attività nella materia organizzata, non minore sorpresa ci arreca l'azione di cui è dotata la materia stessa inorganica; sia nei grandi corpi celesti, per il loro moto violentissimo di rotazione, od anche di traslazione; sia nelle singole loro molecule componenti per la forza di coesione, e di chimica affinità che esse posseggono. E si osserva ancora che la detta forza od attività della materia inorganica tanto più in essa si manifesta, quanto più è suddivisa; così che diviene massima allorchè è ridotta allo stato che i fisici han chiamato imponderabile, nel quale vengono specialmente compresi la luce, il calore, l'elettrico, il magnetico; relativamente ai quali, ed alla loro azione o cosmica, od universale, io rammentava ancora come i moderni fisici avessero riconosciuto conveniente quanto pensato già avevano gli antichi; di ammettere cioè l'esistenza di un solo ente attivo che, a seconda de'suoi stati e moti vibratori, ci si presenti sotto le varie apparenze, e ci offra i variatissimi fenomeni o luminosi, o calorifici, o magnetici, od elettrici, o chimici, o di attrazione..... ed infine anche i così detti vitali negli organici. Questo ente è stato da essi fisici distinto con il nome di etere universale.

Di fatti, per ciò che riguarda gli esseri organici, tutti i più accreditati fisiologi han riconosciuta la necessità di ammettere in essi, oltre la materia visibile, anche un'altra invisibile, sottilissima, eterea, senza la quale non si potrebbero spiegare molti fenomeni e fisiologici e patologici che in essi si eseguiscono. Ed è così che Ippocrate espresse l'etere vitale con il nome di spirito = Caeterum caro augescens a spiritu articulatur. = Il Blumembak lo comprese nella frase di *nisus formativus*; e l'Helmonth lo denominò *archeo*, che pur significa forza, potenza; ed il Baglieri riconobbe non potersi rinvenire nelle sezioni anatomiche = Humana vita (egli dice) nutritur et

coalescit quadam aura, quae anatomico cultro haud quaquam subjicitur. = Parimenti molti altri autori variamente denominarono questo ente vitale con gli appellativi di spirito vitale, fluido nerveo, elettricità animale, fluido magnetico animale, come può vedersi nelle opere dell'Harveo, del Bartolino, dello Spigelio, del Wiussen, del Villis, del Borelli, del Boerhave, dell'Haller, del Galvani, del G. P. Frank, e dei più recenti ancora, fra i quali il chiarissimo Bufalini nella sua opera = Patologia analitica = si esprime così = Pare realmente che, o calorico, o luce, od elettrico; o che che sia altro sottilissimo imponderabile principio, entri di continuo nella nostra macchina, o vi si produca; e che, rapidamente scorrendo ne'minutissimi suoi canali, ne governi in modo assai poderoso le azioni vitali. =

Considerando quindi la struttura dei vegetabili, e degli animali, io argomentava, che il detto etere vitale, svolto in ogni organica molecula, per il contatto di sostanze di natura diversa, e per le continue composizioni e decomposizioni chimiche, ed in fine per l'attrito prodotto specialmente dalla rapidissima circolazione dei fluidi venisse raccolto, e trasportato nell'intero organismo per mezzo dei filamenti vascolari nei primi, e per i filamenti e cordoni nervosi nei secondi. In questi poi, è dimostrato con prove di fatto che dal comune sensorio l'etere stesso vitale, per mezzo dei nervi per ciò stesso distinti con il nome di abduttori, nuovamente è trasmesso in tutti gli organi, in tutti gli organici tessuti, dal che sempre nuova vigoria vitale essi acquistano, non solo per l'esercizio delle funzioni semplicemente organiche, che sono indipendenti dalla nostra volontà; ma ancora per quelle organico-animali; subordinate cioè all'impero dell'anima; e così da questa reciproca azione, e da questo perenne circolo proviene quel = consensus unus, consentientia omnia = e l'altra massima fisiologica = in humano corpore omnia simul principium et omnia finis = che stabilì l'antico padre della medicina Ippocrate di Coo.

Ciò che ora più m'interessa di rammentare si è che il detto etere vitale negli animali, non solo sostiene le vitali funzioni, ed è trasmesso nelle varie parti del corpo; ma può essere trasmesso ancora da uno ad altro individuo, e ciò rendesi forse necessario segnatamente nelle funzioni reciproche, come sono quelle che riguardano la riproduzione della specie.

È questo appunto il fatto di somma importanza fisiologica, che io mi propongo confermare con la interpretazione di due monumenti archeologici provenienti dall'antico Egitto, che io sottopongo all'ammirazione de'miei Colleghi Accademici; essendo che in essi, per quanto a me sembra, vengono contenute ed espresse le cognizioni tutte fisiologiche che oggi si hanno in-

torno la generazione; non esclusa la detta trasmissione dell'etere vitale dall'uno all'altro sesso nell'atto del concepimento di un nuovo essere organico.

Prima di descrivere questi due monumenti è necessario che io rammenti che l'Egitto fu sempre considerato dagli antichi come la scuola la più rinomata in materia di politica e di sapienza; e come la origine della maggior parte delle arti, e delle scienze. = Le sue più nobili fatiche, dice il Rollin, e la sua più bell'arte consistevano nell'istruire gli uomini. La stessa Grecia di ciò consapevole inviava i suoi più eruditi uomini, come Omero, Pittagora, Platone, Ippocrate, Licurgo, Solone e molti altri nell'Egitto a fine di perfezionarsi, e di apprendere in ogni genere di letteratura e di scienza le cognizioni le più rare. Iddio stesso nelle sacre pagine rese glorioso attestato a Mosè lodandolo per essere stato istruito in tutte le scienze degli Egizi. = Sin qui il prelodato istorico. Per altro questa scienza non era gittata in piazza, come si fa a nostri giorni per deturparla e riempirla di errori; ma era gelosamente custodita dai sacerdoti, i quali, solo per mezzo di un linguaggio loro proprio, e di gerogrifici, al pubblico inintelligibili, la comunicavano solo a coloro che allo studio delle scienze si dedicavano. = La figura di Herpocrate, od Oro, dice lo stesso Rollin (qualunque sia la interpretazione data dai più recenti mitologi a questa divinità) che nei santuari egiziani, col dito disteso sulla bocca vedevasi, pareva avvertisse rinchiudersi in essa misteri, la di cui cognizione non era a tutti permessa. =. Adunque i gerogrifici, de'quali erano ornati i sontuosi obelischi, le colonne, i fregi delle cornici, le basi delle statue; e segnatamente i monumenti posti nell'interno dei tempi, e delle abitazioni sacerdotali, non erano solo storiche descrizioni, o rappresentanze mitologiche; ma erano destinate eziandio a racchiudere le cognizioni scientifiche le più recondite.

Ciò posto, vengo alla interpretazione, che a me sembra la più naturale dei detti due monumenti, desunto il primo da uno dei brani delle tavole marmoree, con figure colorate in rosso e nero, i cui *facsimile*, in tre distinti grandi fogli, furono inviati dalla Spagna anche in Roma nel 1854. Le dette tavole marmoree furono in quell'epoca rinvenute presso Tarragona, nell'eseguirsi dei profondi scavi, ed ora sono conservate in Madrid nell'Accademia dell'Istoria. (V, Tav. 1.ª)

Lo stile, i costumi, i caratteri come sono quesri rappresentati li han fatti riconoscere da tutti gli archeologi provenienti dalla Fenicia. È ben noto quanta intima relazione passasse fra Tiro specialmente e Cartagine, e quali rapporti commerciali, e poi di dominio vi fossero fra l'Egitto e la Spagna, il cui passaggio, dall'una all'altra regione e bene espresso in uno dei detti frammenti.

Quello da me interpretato, e che ritengo rappresentare i fenomeni della generazione, è esposto così, quale si vede nella copia qui annessa.

Il centro di questa tavola ci offre due figure umane, un uomo cioè ed una donna poste di prospetto l'una dell'altra. Dietro l'uomo v'è un palmizio da dattoli (Phoenix dactilifera L.) ma senza frutto, ciò che indica in esso il sesso maschile, essendo questa pianta *dioica*. Dietro questo palmizio vedesi un serpente alato, eretto, e con le corna, forse invece delle orecchie di cui è dotata una specie di vipere egiziane. Così fu descritto da Ovidio il serpente sacrato a Marte, ed ucciso da Cadmo

» ubi conditus antro
Martius anguis erat, cristis praesignis et auro ».

che l'Anguillara tradusse con elegantissimo verso

« Di creste d'oro orribilmente adorno ».

Intanto questo carattere lo indica dello stesso sesso maschile, come l'uomo ed il detto palmizio. Dall'altra parte, dietro la figura della donna, vedesi una palma coi frutti; vale a dire di sesso femineo, ed a tergo di questa una serpe anche eretta, che è senza corna, ed ha le mammelle protuberanti; così che in essa ben si distingue il sesso femineo. Un ala superstite nel frammento, e posta più in alto, sembra indicare che anche gli uccelli erano compresi in questa tavola dimostrativa. — Superiormente poi vedesi il sole raggiante, con alcune stelle, ed i segni dello zodiaco, de' quali però resta solo il pesce. Tra l'uomo e la donna in basso vi è rappresentata una fiamma. Dall'ipogastrio dell'uomo parte una linea ricurva che, toccato il ventre della donna, si ripiega sopra se stessa formando una larga spira, nel centro della quale vedesi un volto umano, risultato della fecondazione. E che qui si tratti di questa vitale funzione è ben confermato dal fluire del latte dalle mammelle della donna, espresso con varie linee punteggiate, che a guisa di pioggia, dai capezzoli scendono in basso. Quello poi che è più singolare in questo frammento si è il vedere che negli interstizi della detta spira sono figurati tanti piccoli animali di varie forme e grandezze, diretti tutti verso il centro della spira stessa, ma in posizioni diverse, a seconda delle loro forme e dei vari movimenti che essi possono eseguire, come veggonsi i microzoidi infusori che hanno moti vivissimi; per lo che, ammesso che qui realmente si tratti dei fenomeni della generazione, su di che nessun dubbio hanno espresso gli archeologi tutti cui io ho manifestata questa mia interpretazione, io debbo ravvisare nei detti animalculi i zoospermi che ci presenta l'umor seminale virile.

Inoltre, ed è ciò che fa più a proposito della mia tesi, veggonsi nella stessa tavola tanti piccoli volatili che dalla bocca dell'uomo vanno a quella della donna, e ciò per esprimere che nell'atto della fecondazione, anche un *quid* di volatile, che noi diciamo etereo, si comunica dall'uno all'altro sesso. Ed invero se questo fluido vitale è essenziale, e da esso solo dipendono le vitali funzioni individuali, è ben ragionevole il riconoscere che di questo stesso fattore debba esservi comunicazione nelle vitali funzioni reciproche; ove cioè rendesi necessaria la concorrenza dei due sessi.

La presenza del serpente e della palma indicherebbe che quanto avviene nell'uomo accade ancora in tutto il regno animale ed in quello vegetale; preso per tipo del primo il serpente, del secondo la palma; e tutto ciò sotto la influenza, e con il necessario concorso dell'etere fisico espresso con la presenza delle stelle, della luce solare, e della fiamma, che abbiamo veduta interposta fra le dette figure; essendo che l'assenza di questo agente cosmico, ed universale porterebbe la cessazione del moto, e quindi della vita non solo degli organici; ma ancora di quella di tutto il creato.

Relativamente ai detti zoospermi io non pretendo sostenere che gli antichi Egizi possedessero il microscopio col perfezionamento cui oggi si è portato, ma dico solo che, se essi sorpresero tutte le altre nazioni con le gigantesche architetture costruite dai successivi Faraoni nei ricchissimi tempi, e nelle necropoli di Said, di Tebe, di Menfi, di Abiad, di Eliopoli....; e se essi ebbero perfetta cognizione dell'astronomia, come vedevasi chiaramente nel sontuosissimo monumento sepolcrale eretto alla memoria di Osimondio, che secondo il detto Rollin appartenne alla prima epoca storica dell'antico Egitto, e dice che questo sepolcro era recinto da un cerchio d'oro che avea un cubito di larghezza, e 365 cubiti di circonferenza; sopra ciascuno de'quali era segnato il levare ed il tramontare del sole, della luna, e delle costellazioni in ciascun giorno dell'anno: perchè sin d'allora gli Egizi lo dividevano in 12 mesi, ciascheduno di 30 giorni, e dopo il dodicesimo mese ad ogni anno aggiungevano cinque giorni e sei ore. E così ancora, se gli Egizi raggiunsero la perfezione nell'agricoltura, e nella idraulica, ed in tutte le arti meccaniche ed industriali, come può vedersi nelle raccolte di oggetti, e di manifatture che si conservano nei pubblici musei egiziani; si può dubitare che essi usufruissero di questi per il progresso ed il perfezionamento anche scientifico? E quando io osservo che fra i detti oggetti trovansi utensili di vetro che presentano forme concave e convesse; come globi per collane, e bottiglie globulari per contenere i liquidi, io

non debbo escludere affatto l'idea che potessero essi servirsi di questo mezzo e di questa sostanza per ottenere un'ingrandimento dei piccoli oggetti.

Ma posta da parte tale questione, se nel *facsimile* sono tutte le parti di questa tavola fedelmente riprodotte; può darsi ai detti animalculi altra interpretazione che quella dei zoospermi? Io la credo la più confacente, e la più naturale al soggetto ove essi sono posti.

Il fatto però che più interessa la mia tesi, come già dissi di sopra, è la presenza dei piccoli volatili, che dalla bocca dell'uomo passano a quella della donna, per significare che nell'atto della fecondazione anche un *quid* di volatile, etereo, invisibile si comunica dall'uno all'altro sesso.

Ora questo stesso fenomeno, a me sembra essere stato espresso ancora nell'altro monumento che è riportato nella Illustrazione istorica monumentale del basso ed alto Egitto dal P. Domenico Valerani. (V. Tav. 2.ª)

Questo è rappresentato in una scultura in rilievo posto in una volta di una sala annessa al maggior tempio di Tentira; borgo dell'alto Egitto nella Tebaide, ove conservasi intatto il tempio d'Iside. = La bellezza indicibile del lavoro (dice il Valerani) tanto architettonico quanto ornamentale, induce a credere che fosse eretto sotto il regno del primo dei Tolomei. Esso tempio quadrilungo è tutto di pietra bianca. Grosse colonne, ricche cornici, gerografici a profusione, ampio vestibulo, sale molteplici, bassirilievi storici, processioni sacre, riti misteriosi, il tutto ben rappresentato fanno di questo tempio il più importante edifizio superstite dell'antico Egitto.

Or bene anche in questo bassorilievo a me pare che venga rappresentato il fenomeno fisiologico della trasmissione dell'etere o fluido vitale dall'uno all'altro sesso nell'atto della fecondazione.

Le due figure ivi scolpite sono poste in una posizione veramente bizzarra; sebbene con la massima decenza per l'atto che rappresentano. L'uomo giace supino sul suolo con un braccio disteso verso i piedi, e l'altro nella direzione opposta. È poi ripiegato sopra se stesso alla metà del corpo, in modo che i piedi superano la testa. Dai suoi lombi, e da tutta la superficie della parte superiore della figura partono tante linee raggianti che raggiungono la superficie anteriore del corpo della donna, la quale è posta in forma di arco, ben distante dall'uomo, essendo la figura di lei grande al doppio di quello. Nel ventre della donna veggonsi degli ovuli co'relativi geni, ed uno nel centro fecondato, i cui geni genuflessi pare che preghino per il felice sviluppo del feto.

Anche qui l'attitudine delle figure, le dette linee raggianti, l'ovulo fecondato nel ventre della donna fanno chiaramente conoscere trattarsi dei

fenomeni della generazione, e ciò viene pienamente confermato da quanto può leggersi ancora nei caratteri posti negli spazi fra le dette linee, de'quali caratteri così ne parla l'egregio professore Orazio Marucchi il quale, dietro mia richiesta, ha gentilmente annuito per la interpretazione di questi gerogrifici. = I caratteri, egli mi dice in una sua lettera, forse malamente copiati, e con moltissime lagune, sono poco intelligibili, e solo vi si conosce con sicurezza, ripetuta più volte, la parola *Keper* che significa generare, creare, produrre..... = Quindi nessun dubio può restare intorno al significato del soggetto che espongo.

Soggiunge poi lo stesso archeologo nella detta lettera: = La rappresentanza figurata si può spiegare benissimo col confronto di altre già note. Noi sappiamo che nei tempi ove era adorata una triade divina si rappresentava talvolta la dea che avea partorito la terza persona di quella triade, e spesso questo giovane dio simboleggiava il re, assimilato, come è noto, alla divinità..... Il nostro basso rilievo a me pare rappresentare Iside che ha partorito Horm, ed è quindi identificato con Hathor, la dimora di Horm, ed esprime il concetto cosmico dell'ambiente celeste entro cui il sole agisce. Nel ventre della dea si vede l'uovo contenente il fèto, ed anche alcuni geni adoranti, e questo gruppo è ripetuto in altre parti del monumento. Mi pare dunque che questa scena si possa spiegare con il noto simbolismo dell'arte egizia. =

Io ammiro la dotta interpretazione del sullodato archeologo; ma astrazione fatta dalle favole mitologiche, conoscendo che i sacerdoti egizi erano versatissimi nelle scienze anche mediche, e che esprimevano la loro dottrina per mezzo di figure e di gerogrifici; e seguendo i lumi che ci somministra la fisiologia, trovo conveniente e naturale dare al detto rilievo una interpretazione che all' apparenza mitologica unisca la importanza scientifica. Io non posso così facilmente persuadermi che i dotti della Grecia, e segnatamente i medici, intraprendessero il disastroso viaggio dell'Egitto a solo fine di conoscere la favolosa mitologia egiziana, od i riti sacri di quella nazione spesso anche ridicoli, ma le addotte ragioni piuttosto mi persuadono cha i sacerdoti realmente possedessero recondite cognizioni scientifiche, e che, a solo fine di conoscere queste i dotti greci colà si trasferissero.

Sia pure che la figura dell'uomo rappresenti il sole, e non vi pare o Signori di vedere nei raggi che emanano dal suo corpo, e che si dirigono a quello della donna gestante la influenza necessaria dell'etere calorifico e luminoso per la vitale funzione che ivi si compie? Siccome però questo etere deve necessariamente venire modificato segnatamente ne'suoi movimenti,

negli esseri organici, a seconda della natura di questi e delle funzioni vitali che in essi si producono, come già sostenni nella tesi sulla vita delle piante; così, emanando in questo monumento non dal disco solare, come lo abbiamo veduto espresso nella prima tavola; ma dal corpo di una figura umana, dovrà dirsi etere vitale o *zoodinamico*, come nella detta tesi lo denominai, per distinguerlo dall'etere che vivifica le piante che dissi *fito-dinamico*, e da quello che dà moto e vita al regno inorganico che espressi col nome di etere *fisico-dinamico*.

Così ancora sia pure che nella figura della donna venga rappresentata Iside, come giustamente riconosce lo stesso archeologo, essendo a questa dea l'annesso tempio dedicato; o sia che possa anche ravvisarsi in essa la dea Nouth, simbolo della terra, come lo interpreta il nostro socio accademico il commendator Descemet, resta sempre fermo che essa, nell'atto in cui è posta, viene influenzata dall'azione virile; e che l'ovulo fecondato che presenta nel seno fa conoscere che qui si tratta piuttosto del concepimento, di quello che di un parto compiuto. Viene dunque confermato anche in questo rilievo che al compimento della vitale funzione per la perpetuazione degli individui, e quindi delle specie, è necessaria la trasmissione dell'etere vitale fra i due generanti; lo che noi abbiamo veduto espresso ancora nella tavola tarragonese con la presenza dei piccoli volatili che dalla bocca dell'uomo passano a quella della donna. In questa poi abbiamo anche osservato che tutto il complesso delle figure chiaramente esprime lo stesso concetto della fecondazione nei due regni organici, il vegetale cioè e l'animale. Alla quale dottrina se si unisce anche quella della scoperta dei zoospermi, e della necessaria influenza dell'etere fisico, espresso con la presenza dei corpi celesti, e della fiamma, affinchè si possano effettuare le vitali organiche funzioni, dovrà convenirsi che gli antichi Egizi realmente possedessero, almeno in questa importantissima parte fisiologica, le cognizioni tutte che intorno ad essa oggi si hanno, e che forse da taluni credonsi nuove; ond'è che anche qui, come in altre parti si verifica il detto di Orazio = Multa renascentur quae jam cecidere = Che se dagli archeologi e dagli altri scienziati vengano queste interpretazioni approvate, tanto più interessante riuscirà la ricerca degli oggetti e dei monumenti egiziani, in quanto che noi potremo in essi rinvenire non solo ciò che riguarda i costumi, la storia, ed i riti degli Egizi; ma ancora le loro cognizioni e le scoperte scientifiche, che elevarono a tanta fama questa ora sventurata nazione, abbrutita dall'islamismo, e resa preda del primo occupante.

COMUNICAZIONI

Provenzali P. F. S. – *Presentazione di un opuscolo di Monsignore Grassi Landi*:

Il P. Francesco Saverio Provenzali nell'annunziare un nuovo opuscolo (1) di Monsignor Bartolomeo Grassi Landi sulla musica considerata sotto il rapporto scientifico, fece notare che fino dal 1881 avea egli informata l'Accademia come il Grassi, colla scoperta della legge dei *raddoppi* sì interi che frazionari delle vibrazioni che generano i suoni piacevoli, avea posto il fondamento alla teoria degli accordi e della naturale successione dei suoni armonici.

Venendo quindi a dar conto del nuovo opuscolo il disserente mostrò che l'autore, coll'altra sua recente scoperta, ha sperimentato che i passaggi alle diverse specie di tonalità si fanno per mezzo di tre specie di ritmi, che risultano dai raddoppi di quarti e di terzi negli accordi maggiori e di sesti nei minori, è pervenuto a completare la teoria fisica dell'armonia e del contrapunto, come pure a fissare quale debba essere il diapason o corista da scegliersi come norma per l'accordatura perfetta delle voci e degli strumenti. Conchiuse coll'augurare all'autore che dopo avere trovata la causa fisica della piacevolezza dei suoni armonici, che è l'anello di congiunzione fra la teorica della musica e la pratica, possa presto coglierne il frutto, applicando i nuovi principii teoretici alla pratica per vantaggio degli studiosi e perfezionamento dell'acustica.

Galli Prof. D. I. – *Presentazione di una sua memoria.*

Il Prof. D. Ignazio Galli, riferì intorno ai numerosi fenomeni sismici da lui raccolti nell'osservatorio fisico-meteorologico di Velletri durante il periodo sismico della Spagna meridionale. Egli, oltre a molti altri strumenti di vari sistemi, si serve del *Sismodinamografo*, il quale registra continuamente e separatamente i moti ondulatorii e sussultorii di qualunque intensità con traccie proporzionali al valore dinamico e all'ora precisa in cui avvengono; e per le scosse non molto deboli, fornisce indicazioni degli altri elementi, cioè direzione esatta, rombo di provenienza ecc., e in certi casi straordinari anche la forza dell'urto in unità dinamiche. La più importante proprietà dell'istrumento sta in ciò, che appena segnata la traccia di una scossa torna quasi istantaneamente in quiete, cosicchè è sempre pronto a

(1) Questo opuscolo è stato impresso nella tipografia Vaticana, nuovo argomento che il S. P. Leone XIII non lascia passare occasione alcuna per promuovere i buoni studi specialmente nel clero.

registrare distintamente tutti i fenomeni che avvengono anche a breve distanza di tempo, come sarebbero gli urti ch'egli chiama microsismici, dei quali si hanno da due a cinque centinaia all'ora.

Ora nel periodo dei grandi terremoti spagnuoli il sismodinamografo ha mostrato un'abbondanza straordinaria di piccole scosse, con tale variazione di frequenza e con tali aggruppamenti, da rendere evidente la loro connessione coi fenomeni disastrosi della penisola iberica, come apparisce da un quadro statistico che il Galli presenta. Dallo stesso quadro risulta che i massimi di frequenza sono in relazione colla distanza e colla declinazione della luna, come lo stesso prof. Galli aveva trovato in altri periodi sismici. Questi ed altri risultati verranno esposti e discussi nella memoria che egli sta preparando per le pubblicazioni accademiche. Terminò accennando i molti esperimenti da lui fatti per assicurarsi che gli strumenti sismici dell'osservatorio veliterno sono collocati in eccellenti condizioni di solidità e che non risentono l'effetto di cause estranee accidentali. (1)

Il medesimo prof. Galli, oltre al suddetto quadro statistico, presentò anche il disegno del sismodinamografo; ed invitò i presenti a richiedergli schiarimenti ed aprir la discussione, ove credessero opportuno, sopra le cose da lui accennate.

Il Prof. de Rossi allora ricordò d'aver mostrato la sua stima e le sue speranze intorno al Sismodinamografo fin dal 1881 nel Congresso meteorologico di Napoli, allorchè il Galli per la prima volta ragionò degli esperimenti che egli avea in corso su quell'istrumento. Aggiunse poi che l'odierna luttuosa circostanza dei terremoti di Spagna ha servito a dare una prova sperimentale sull'attendibilità dei dati forniti da quell'apparecchio indipendentemente dall'analizzarne le condizioni statiche di collocamento. Basta vedere all'ingrosso come l'attività spiegata dall'istrumento dopo parecchi anni da che funziona, sia avvenuto in un tempo non solo così caratteristico per i terremoti di Spagna, ma eziandio mentre è evidente per altri dati, che il suolo d'Italia ha risentito l'eco delle commozioni telluriche iberiche. Lo strumento del Galli avendo fornito segni di agitazione in Velletri assai maggiore e continua che in qualunque altro luogo, mostra che seppure la regione in cui esso si trova fosse stata più delle altre d'Italia commossa, sarebbe stato sempre pregio del sismodinamografo l'averne tanto dettagliatamente rivelate le fasi. Aggiunse poi che senza aspettare le prove teoriche sperimentali

---

(1) La memoria estesa viene inserita nel I° volume delle memorie dell'Accademia.

che darà il Galli delle funzioni del suo sismodinamografo, basta osservare come l'odierna serie delle indicazioni di quell'istrumento, oltre al coincidere coi suddetti terremoti di Spagna, coincide pure con spessi piccoli terremoti avvertiti in Velletri stessa e taluno nei vicini Monti Lepini. Simile agitazione straordinaria il de Rossi riferì essersi verificata nei vicini osservatorii laziali di Roma e di Rocca di Papa, fra i quali i secondi sono collocati in profondità sotterranee, esenti senza dubbio da qualsiasi supponibile disturbo accidentale sia fisico, sia meccanico. E finalmeute lo stesso graduale passare dal minimo al massimo e viceversa la serie delle indicazioni del sismodinamografo disse mostrare essere esse l'effetto d'una causa diversa dalle azioni locali, che non potrebbero mostrare nè tali differenze tra giorno e giorno, nè tali regolarità di andamento.

Lanzi D.r M. – *Presentazione di un suo opuscolo.*

Il Dott. Matteo Lanzi presentò all'accademia un suo opuscolo, il quale contiene un elenco dei funghi nascenti nel territorio della flora romana. Ammontano a circa quattrocento specie, sebbene egli ritenga che debbano essere in numero molto maggiore. Ricordando i precedenti lavori di altri micetologi, che descrissero i funghi romani, disse di avere compreso in tale elenco soltanto quelli da lui veduti. Oltre al nome dei generi e delle specie, classificati secondo il sistema esposto dal Prof. Winter nella seconda edizione della flora Crittogamica del Rabenhorst ch'è tutt'ora in corso di pubblicazione; vi si legge il tempo e il luogo in cui furono raccolti ed il nome volgare di quelli che lo hanno.

De Rossi M. S. – *Presentazione di un opuscolo del socio prof. Ragona.*

Il segretario presentò da parte dell'autore Prof. D. Ragona, socio corrispondente, un opuscolo intitolato: *Sul clima di Assab.*

COMITATO SEGRETO

Venne presentata la domanda di cambio tra i nostri Atti, e la Rivista del Comitato di Artiglieria e Genio, che venne accordata.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Ordinari: Conte Ab. F. Castracane, *Presidente*. – Prof. F. Ladelci – P. G. Foglini – P. F. S. Provenzali – P. G. Lais – P. G. S. Ferrari – Prof. V. De Rossi Re – Prof. M. Azzarelli – Prof. G. Tuccimei – Dott. M. Lanzi – Cav. G. Olivieri – Prof. M. S. de Rossi, *Segretario*.
Corrispondenti: Prof. D. I. Galli – Prof. A. De Andreis.
Aggiunti: Marchese L. Fonti.

La seduta apertasi legalmente alle ore 4 p. venne chiusa alle ore 6 p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXII, 1884—85. Serie IV, Rendiconti. Vol. I. Fasc. 6, 7. Roma, 1885.
2. *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere, ed Arti.* — T. III, Serie VI, disp. 1, 2. Venezia, 1884—85. In 8.°
3. *Bulletin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou.* A. 1884, n.° 1. Moscou, 1884. In-8.°
4. *Bullettino della Reale Accademia Medica di Roma.* — A. X, n.° 9. Roma, 1884. In 8.°
5. *Crónica cientifica.* — A. VIII, n. 173. Barcelona, 1885. In 8.°
6. *Journal de la société physico-chimique russe.* — T. XVII, n.° 1. S.t Pétersbourg 1885. In 8.°
7. *La Civiltà Cattolica.* — A. XXXVI, serie XII, Vol. IX, quad. 833. Fireuze 1885. In 8.°
8. LANZI (M.) — *Fungi in ditione florae romanae enumerati.* — Roma, 1884. In 4.°
9. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle. Partie littéraire.* — Deuxième série. T. XXI, deuxième livraison. Fevrier. Paris, 1885. In-8.°
10. —— *Partie technique.* — Deuxième série, T. XI, 1re et 2e livraisons. Janvier et Février. Paris 1885. In-8.°
11. RAGONA (D.) — *Sul clima di Assab.* — Modena, 1885. In-8.° piccolo.
12. *Rivista di Artiglieria e Genio.* — A. 1885, Gennaio. Roma, 1885. In-8.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE V^{a} DEL 19 APRILE 1885

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

VARIAZIONE ORARIA DELLE NUBI
NOTA

DEL P. GIUSEPPE LAIS

Non avvi in Roma chi abbia sottoposto a ricerche statistiche quanto di capriccioso offre l' umidità atmosferica nella conformazione delle nubi, sia nella forma di cumuli, cirri e strati, sia in quella di transizione cirro-strati, cirro-cumuli, strato-cumuli. E poichè in tutto ciò che la natura presenta di capriccioso e variabile vi ha sempre in fondo qualche cosa di immutabile e di definito; così anche nell' indole di quegli intorbidamenti atmosferici che fanno prendere al vapor d'acqua aspetti abbastanza caratteristici, sia nelle ore della comparsa, sia in quelle di maggior frequenza, è da credersi che vi presieda un elemento di regolarità.

Per non entrare in una selva di complicazioni, mettiamo da parte le forme di transizione, e riduciamo a tre i tipi principali delle nubi, *cumuli*, *cirri*, *strati*, richiamandone le definizioni.

Cirri. – Per cirri s'intendono quei filamenti delicati e semitrasparenti che somigliano a barbe di piuma o alla trama di un velo. Piccoli aghi di ghiaccio più volte accertati in ascensioni areostatiche formano in seno a queste nubi straordinarie refrazioni, dette aloni e pareli.

Cumuli sono quelle nubi che offrono la somiglianza con un getto di vapore lanciato da una locomotiva in aria allo stato di calma. Queste sono formate di vapori in candidi ammassi e prendono il nome di nembi, se fosche, o risolventisi in pioggia.

Strati sono quelle piccole nubi allungate che si veggono di fianco in prossimità dell'orizzonte. Spesse volte presentano l'aspetto di cirrostrati o cirrocumuli, quando le masse sono attenuate all'estremità o tondeggianti a modo di piccoli fiocchi. Gli strati appartengono alle basse regioni dell'atmosfera chiamate da Howard nebbie del terreno.

Ciò premesso ecco il lavoro statistico che ho voluto condurre a termine; classificare queste nubi per stagioni e per ore.

Trattandosi di un fenomeno un poco complesso, ho procurato semplificarlo, ed in tutti quei casi in cui il cielo è completamente offuscato e coperto, o non lascia decidere quelle specie di nubi è la proponderante per la sovrapposizione di varie stratificazioni, ho escluso dalla mia rassegna quelle osservazioni, limitandomi soltanto alla sola presenza dei vari tipi.

Il vapor d'acqua in seno dell'atmosfera o è importato da burrasche e venti periodici, o è nascente nel luogo stesso della sua produzione; quindi o variabile, o insensibilmente costante. Si concepisce facilmente, che se buon numero di osservazioni per ciascun tipo di nube venga distribuito per ragione di stagioni e di ore, quanto vi ha di variabile si dispone più o meno uniformemente in tutta l'estensione dell'anno e scomparisce, e quanto vi ha di sistematico si accumula visibilmente intorno a nuclei o centri primari o secondari di ore e di stagioni.

Questo è stato il piano eseguito nello spoglio di un decennio di osservazioni, pubblicate nei Bullettini del Collegio Romano dall'anno 1863–1873, che sommano a 5800 e si rappresentarono graficamente nella tavola annessa alla presente nota.

Quelle oservazioni sono il risultato dell'ispezione del cielo in quattro diverse ore del giorno, le 7 del mattino, le 12, le 3, le 9 pom. Le cifre ottenute e segnate nella tavola non danno nulla di assoluto, ma esprimono di relativo per ciascuna forma di nubi la frequenza calcolata in millesime parti sopra tutte le osservazioni dell'anno per le nubi del medesimo tipo.

Cumuli

Questa forma di nubi predomina nel cielo in ragione del calore dell'atmosfera e presenta in tutte le stagioni una fase generale di aumento

nel giorno e decremento nella notte. Nelle tre stagioni, primavera, estate ed autunno ha luogo un massimo al mezzodì assai elevato, che raddoppia il valore delle 7 antim., e si mantiene di poco superiore al valore assunto alle 3 pom. A questo fa eccezione la stagione invernale, in cui il massimo è in ritardo e cade sulle ore 3. Per tutte le stagioni indistintamenie, sia alle 7 del mattino, sia alle 9 della sera, i cumuli presentano quasi uguale frequenza con un minimo relativo alle 9 della sera, perchè quest'ora di osservazione dista maggiormente, che non quella delle 7 del mattino, dalla comparsa del sole sull'orizzonte.

Cirri

Questo tipo di nubi presenta anche esso il carattere generale di aumento nelle calde ore del giorno dal mezzodì alle 3 pom. e di diminuzione nelle ore estreme di osservazione prossime alla notte.

Il massimo però a differenza dei cumuli non è segnato al mezzodì ma giunge 3 ore più tardi e segna forse l'arrivo dei cumuli nelle più alte regioni dell'atmosfera. I valori delle ore estreme sono poco lontane fra loro; il che mostra, che i cirri formatisi una volta nelle alte regioni dell'aria sono un elemento più permanente e che meno di ogni altro risente l'influenza della notte e dell' irraggiamento notturno.

Strati

Queste nubi si comportano diversamente da quello dei cumuli e cirri, in modo da avere i massimi e i minimi di frequenza invertiti. Equiparandole per così dire alla nebbia, si trova una chiave per ispiegare la maggiore loro frequenza al mattino e alla sera, in cui all'infuori della stagione estiva superano il valore del mezzógiorno e delle 3 pom., e scorgesi il raddoppio nelle ore estreme del giorno dell' altezza raggiunta al mezzodì.

Un lavoro più esteso e più profondo non immuterà sostanzialmente queste conclusioni finali.

RECETTORE IDRAULICO ANIMATO DALL'ARIA COMPRESSA

NOTA

DELL'ING. CAV. FILIPPO GUIDI

Il concetto di trasmettere a distanza l'energia meccanica per mezzo dell'aria compressa fece impressione di vera meraviglia nelle menti dei meccanici teorici e pratici per molte e molte ragioni di comodità di semplicità e di sicurezza.

Senza parlare dello stupendo vantaggio di utilizzare a distanza della energia prodotta da un balzo di acqua confinata naturalmente fra gole inaccessibili, ma pur considerando la facilità di trasmettere la forza di una macchina a vapore, in ogni direzione, con piccoli tubi, retti o tortuosi in mille guise, senza rumore alcuno lungo il loro tragitto, senza bisogno di solidi appoggi se non quanto occorreva per sostenerli, e per nulla proporzionali alla energia che trasmettevano; e finalmente l'innocuo passaggio di un mezzo trasmettitore di forza a traverso di ambienti che potevano contenere oggetti delicatissimi, o materie combustibili, mentre questa forza veniva generata da vive combustioni nei focolari delle macchine a vapore: tutti questi vantaggi ben a ragione fecero apprezzare ed abbracciare con entusiasmo il sistema di trasmissione di energia meccanica con l'aria compressa.

Ma quando si cercò di utilizzare di tal mezzo per animare meccanismi recettori di forte potere, s'incontrarono varie difficoltà più o meno gravi, simili se si vuole a quelle che si ebbero a vincere nei meccanismi animati dal vapor d'acqua a forte elatere, specialmente per gli organi distributori: ma grave oltremodo fu la difficoltà nascente dalla formazione dei cristalli di ghiaccio nei quali si convertiva il vapor d'acqua che seco trasportava l'aria compressa, pel repentino abbassamento di temperatura, entro i cilindri del meccanismo motore: tanto che si dovette ricorrere a sistemi complicati e dispendiosi di riscaldamento, ovvero a rinunciare all'utile della espansione entro i cilindri con perdita gravissima nel rendimento di forza trasmessa.

Per ovviare adunque a tutti gli esposti inconvenienti io propongo un mezzo mercè il quale può divenire la strasmissione con aria compressa talmente semplice che non siavi neppur bisogno di un operajo meccanico alla dirèzione del meccanismo recettore, e tal mezzo consiste nell'adoperare l'acqua come intermediario per trasmettere l'energia dello elatere dell'aria

sopra un recettore idraulico qual sarebbe una turbina, una macchina a colonna d'acqua, insomma un recettore idraulico qualunque, che lavori ad urto pressione o reazione.

Sieno difatti A ed A' due recipienti uguali sottoposti alle stesse condizioni e dotati dei stessi meccanismi che ora schematicamente passo a descrivere.

Il recipiente A è ripieno d'acqua che gli fu data dal serbatojo S a mezzo del tubo T, al termine del quale è una valvola V. L'aria compressa condotta dal tubo *tt* agisce sopra l'acqua contenuta nel recipiente A, e quindi quest'acqua trovando aperta la valvola *v* e chiusa la *v'* esce con violenza e reagisce sul recettore idraulico sottoposto R producendo una forza viva quale sarebbe prodotta dalla stessa acqua se nei modi comuni pei recettori idraulici provvenisse da una altezza pari a quella di una colonna equivalente alla pressione di tante atmosfere a quante effettivamente giunge compressa l'aria entro il recipiente A.

Vuotandosi il recipiente A il galleggiante G scende sino al fondo e per mezzo di uno dei congegni conosciutissimi (di cui faccio il disegno in figura schematica e tralascio la descrizione per tema di tediare senza utile veruno) s'intercetta l'entrata all'aria compressa e se ne apre invece l'uscita ai tubi *t't'* di guisa che (nel modo che dirò in seguito) il recipiente A trovandosi alla pressione ordinaria della atmosfera lascia aprirsi la valvola V e quindi si riempie lo stesso recipiente di acqua che nuovamente vi fluisce pel tubo T del serbatoio S. Nel frattempo che il recipiente A si riempie d'acqua come ho detto e che per conseguenza resta inoperoso per l'azione sopra il recettore idraulico, agisce invece il secondo recipiente A' nell' identico modo come agì il primo, chiusa naturalmente la valvola *v* ed aperta la *v'* e così alternativamente agiscono i due recipienti AA' mantenendo costante il deflusso dell' acqua che agisce sul recettore idraulico R.

Resta a vedere ciò che di sopra accennava e cioè come regolarmente accada l'uscita dell'aria compressa dai recipienti dopo compita l'azione sull'acqua, e dippiù come sia utilizzato ancora l'elatere dell' aria stessa. Ho detto che il galleggiante G chiude l'entrata ed apre l'uscita all'aria compressa. Or bene per mezzo dei tubi *t' t'* l'aria ch'esce alla pressione di n atmosfere va a mantenere piena ad $\frac{n}{2}$ atmosfere il recipiente B: ed appena nei recipienti AA' sia scemata la pressione sino ad $\frac{n}{2}$ atmosfere. si

aprono le valvole v'' v'' e l'aria s'equilibra con l'atmosfera per far succedere il riempimento d'acqua come dissi. Finalmente l'aria compressa ad $\frac{n}{2}$ atmosfere nel recipiente B serve a mezzo di un'apparato simile A''' A$^{\text{iv}}$ alla coppia di recipienti A'A'' ma più semplice a sollevare l'acqua, che uscì dal recettore idraulico, dal serbatojo S' al serbatoio S in modo che l'acqua torni sempre a servire come intermediario fra l'aria compressa ed il motore idraulico senza che si consumi se non per quella minima parte che fugge per evaporazione.

Da quanto ho esposto mi sembra evidente la semplicita dell'apparecchio che propongo, e l'avere eliminate completamente le difficoltà che arrecano tanta noja e tanto dispendio nelle comuni macchine ad aria compressa,

Credo utile far avvertire come sia ben facile variare la disposizione del galleggiante G e dei membri di collegamento con le valvole t' t' d'immissione e di uscita dell'aria compressa, in guisa che la prima chiudasi innanzi della seconda di quel tanto tempo quanto si vuole per ottenerne quindi la minore o maggiore espansione dell'aria compressa entro i recidienti A A'. L'aria trasmessa a mò d'esempio alla pressione di dieci atmosfere può subire l'espansione anche sino a due poichè la metà di tale pressione è ancora sovrabbondante per l'innalzamento continuo dell' acqua dal serbatoio S'' al serbatoio S.

I cristalli di ghiaccio che si formeranno entro i recipienti AA' saranuo immediatamente disciolti dalla massa d'acqua che continuamente rinnovasi. Sarà necessario un ben adequato volante come lo è indispensabile nelle macchine a vapore che lavorano a forti espansioni, e senza dubbio il recettore idraulico più adatto in questi casi non è che la macchina a colonna d'acqua poichè il variare periodico della velocità dell'acqua rispetto alla velocità relativa delle palette di una turbina ne scemerebbe di molto il rendimento; questo genere di recettori sarà utilissimo nel caso in cui per abbondanza di potere nella forza idraulica da cui viene compressa l'aria, non interessi utilizzarne l'espansione.

Concludo che col mezzo da me proposto, i vantaggi della trasmissione di forza ad aria compressa non saranno più dimidiati nei recettori di tale trasmissione; ma al contrario si avrà

1.° Rendimento uguale a quello delle migliori macchine conosciute ad aria compressa senza le tante complicazioni degli organi di distribuzione e dei mezzi di riscaldamento, ad eccezione soltanto di quella frazione di elatere che occorre per dare all' acqua il turno fra i serbatoi inferiore o superiore: sebbene sia d'avvertire che questa frazione di residuo elatere non forma contro pressione come accade nei cilindri delle macchine in uso: pratticamente poi si troverà grande vantaggio nella impossibilità delle fughe, anche a fortissima pressione, mentre nei pistoni se ne hanno tanto facilmente.

2.° Economia grandissima nella costruzione, nella manutenzione e nella direzione dell'apparecchio.

ÉTUDE SUR QUELQUES FORMULES D'ANALYSE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES

PAR LE P. TH.LE PEPIN, S. J.

1. Liouville a donné dans la deuxième série de son Journal une suite de formules générales d'où l'on peut déduire un grand nombre de résultats importants pour la théorie des nombres. On peut trouver l'origine de ces formules dans la démonstration que Dirichlet a donnée du théorème de Jacobi, relatif à la décomposition du quadruple d'un nombre impair en une somme de quatre carrés impairs. Dirichlet lui-même annonce à la fin de sa démonstration qu'il a été conduit par sa méthode à des formules plus générales. Cette indication était plus que suffisante pour inspirer à Liouville le désir de découvrir lui-même ces formules ou d'autres semblables.

On peut même rapporter à Euler le premier germe de ces formules. Dans ses « *Considérations sur le théorème de Fermat relatif aux nom-* » *bres polygonaux* (Opuscula analytica, t. 2) » Euler indique l'usage que l'on pourrait faire de la série

$$P = 1 + x + x^4 + x^9 + \dots = \sum_0^\infty x^{n^2}$$

pour démontrer que tout nombre entier est la somme de quatre carrés. Il s'agit, dit-il, de démontrer que dans le développement de la quatrième puissance de cette série, savoir

$$P^4 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_m x^m + \dots,$$

aucun coefficient ne se réduit à zéro. Jacobi a obtenu mieux que cela au moyen de la série

$$\theta_1(q) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2},$$

où l'on donne à n toutes les valeurs entières, de $-\infty$ à $+\infty$; il a trouvé que le coefficient de q^m, dans le développement de la quatrième puissance de cette série, est égal à huit fois la somme des diviseurs de m, si m est impair, et à vingt-quatre fois la somme des diviseurs impairs de m, si m est pair. Or le coefficient de q^m dans ce développement est égal au nombre des solutions de l'équation

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + u^2$$

en nombres entiers, positifs, négatifs ou nuls, deux solutions étant considérées comme distinctes, lorsqu'elles diffèrent entre elles, soit par les valeurs des carrés, soit par leur ordre, soit par les signes des racines. Le résultat obtenu par Jacobi peut donc s'énoncer de la manière suivante :

I. *Le nombre des représentations d'un nombre impair* m *par la somme de quatre carrés à racines positives, négatives ou nulles, est égal à huit fois la somme des diviseurs de* m.

II. *Le nombres des représentations d'un nombre pair* m *par la somme de quatre carrés à racines positives, négatives ou nulles, est égal à vingt-quatre fois la somme des diviseurs impairs de* m.

2. Jacobi n'a obtenu ces théorèmes que par la théorie des fonctions elliptiques. Mais il a démontré dans le Journal de Crelle (t. 12, p. 167), par des considérations arithmétiques, un théorème analogue, relatif à la décomposition du quadruple d'un nombre impair m en une somme de quatre carrés impairs. C'est à cette démonstration, simplifiée par Dirichlet, qu'il faut faire remonter l'origine des formules générales de Liouville, que nous devons étudier dans le présent Mémoire.

Nous commencerons par exposer la démonstration de Dirichlet, en apportant quelques modifications nécessaires pour faire bien saisir de quelle manière elle conduit aux formules plus générales que nous obtiendrons ensuite. Puis, afin de montrer l'utilité de ces formules, nous en ferons quelques applications relatives à diverses formes quadratiques quaternaires.

CH. I. *Décomposition du quadruple d'un nombre impair en une somme de quatre carrés impairs.*

3. Soit m un nombre impair dont le quadruple $4m$ est décomposé de toutes les manières possibles en une somme de quatre carrés impairs. La somme des deux premiers carrés est le double d'un nombre impair, ainsi que la somme des deux derniers. Nous pouvons grouper ensemble toutes les solutions dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est égale au double d'un même nombre impair m'; dans toutes ces décompositions la somme des deux derniers carrés est égale au double d'un même nombre impair m'', déterminé par la formule $2m'' = 4m - 2m'$. Toutes ces décompositions correspondent ainsi à une même solution de l'équation

$$2m = m' + m'' \tag{1}$$

en nombres impairs et positifs m', m''.

Inversement, lorsqu'on partage le nombre $2m$ en deux nombres impairs m', m'', que l'on décompose de toutes les manières possibles en deux carrés impairs chacun des deux nombres $2m'$, $2m''$ et que l'on combine chaque décomposition de $2m'$ avec chacune des décompositions de $2m''$, on obtient toutes les décompositions de $4m$ en quatre carrés impairs qui correspondent à une même solution de l'équation (1). En faisant la même chose pour toutes les solutions de l'équation (1) en nombres impairs et positifs m', m'', on obtient évidemment toutes les décompositions de $4m$ en quatre carrés impairs.

4. Proposons-nous de trouver le nombre de ces décompositions. Pour cela nous chercherons d'abord une expression analytique du nombre de celles qui correspondent à une même solution m', m'' de l'équation (1). Ce nombre est égal au produit du nombre des décompositions de $2m'$ en deux carrés, multiplié par le nombre des décompositions semblables de $2m''$. Or, si nous décomposons de toutes les manières possibles m', m'' en deux facteurs, en posant

$$(2) \qquad m' = a\alpha, \quad m'' = b\beta,$$

les nombres des décompositions de $2m'$ et de $2m''$ en deux carrés sont exprimés respectivement par les deux formules

$$\rho\,(m') = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}}, \quad \rho\,(m'') = \sum (-1)^{\frac{b-1}{2}}$$

dans lesquelles les éléments des sommes désignées par $\sum$ correspondent à tous les diviseurs de m', désignés indéfiniment par a, et à tous les diviseurs de m'', désignés par b. En effet Jacobi a trouvé par la considération des séries elliptiques que le nombre des décompositions du double d'un nombre impair m' en une somme de deux carrés est égal à l'excès du nombre des diviseurs de m' compris dans la forme $4l+1$ sur le nombre de ceux qui sont de la forme $4l+3$. Or cet excès est exprimé par la formule

$$\rho\,(m') = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}},$$

dans laquelle la somme s'étend à tous les diviseurs de m' désignés indéfiniment par a. Du reste, on établit directement par la théorie des formes quadratiques que le nombre des décompositions du double d'un nombre impair en la somme de deux carrés est exprimé par la dernière formule.

En multipliant l'un par l'autre les deux nombres $\rho(m')$, $\rho(m'')$ on obtient le nombre des décompositions de $4m$ en quatre carrés impairs, dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est égale à un même nombre $2m'$. Par conséquent le nombre des décompositions de $4m$ en quatre carrés impairs qui correspondent à une même solution de l'équation (1) est exprimé par le produit

$$\rho(m')\,\rho(m'') = \sum(-1)^{\frac{a-1}{2}} \sum(-1)^{\frac{b-1}{2}} = \sum\sum(-1)^{\frac{a-b}{2}}.$$

On obtient donc le nombre de toutes les décompositions de $4m$ en quatre carrés impairs, en faisant la somme de tous les produits semblables, relativement aux diverses solutions de l'équation (1) en nombres impairs et positifs m', m''. Si l'on désigne ce nombre par N, on a

$$N = \sum\rho(m')\,\rho(m'') = \sum\left(\sum\sum(-1)^{\frac{a-b}{2}}\right).$$

Dans cette formule, les deux sommations indiquées entre parenthèse correspondent aux diverses solutions des deux équations $m' = a\alpha$, $m'' = b\beta$. Le premier signe sommatoire se rapporte aux diverses partitions de $2m$ en deux nombres impairs et positifs m', m''; il indique que l'on doit faire successivement, pour chacune de ces partitions, les deux sommations indiquées entre parenthèse, puis ajouter les résultats ainsi obtenus. On peut aussi remplacer les trois signes sommatoires par un seul se rapportant aux solutions de l'équation

$$(3) \qquad 2m = a\alpha + b\beta$$

en nombres impairs et positifs a, b, α, β. Le nombre cherché N est alors exprimé par la formule

$$(4) \qquad N = \sum(-1)^{\frac{a-b}{2}}.$$

5. Comme la somme qui forme le second membre de la formule (4) renferme un grand nombre de termes égaux et de signes contraires, elle peut être simplifiée par la suppression des termes qui se détruisent ainsi deux à deux. Evaluons d'abord les termes qui correspondent à l'hypothèse $a = b$. Tous ces termes étant égaux à 1, leur somme est égale à leur nombre qui est celui des solutions de l'équation

$$(3') \qquad 2m = a(\alpha + \beta)$$

en nombres impairs et positifs, a, α, β.

Il est évident que le nombre a doit diviser m. Soit donc $m = d\delta$ et $a = d$. L'équation précédente devient

$$2\delta = \alpha + \beta.$$

On peut donner à α les δ valeurs impaires $1, 3, 5, \ldots 2\delta - 1$, et pour chacune de ces valeurs le nombre β est déterminé par la formule $\beta = 2\delta - \alpha$. Le nombre des solutions de l'équation (3'), qui correspondent à un même diviseur δ de m est égal à ce diviseur; le nombre de toutes les solutions est égal à la somme des diviseurs de m. D'après Liouville nous désignons cette somme par $\zeta_1(m)$. Ce nombre $\zeta_1(m)$ exprime aussi la somme des termes du second membre de l'équation (4) qui correspondent à l'hypothèse $a = b$. On a donc

$$(5) \qquad N = \zeta_1(m) + \sum\nolimits_1 (-1)^{\frac{a-b}{2}},$$

en désignant par $\sum_1$ une somme restreinte, dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation (3) dans lesquelles les deux nombres a et b sont inégaux.

Or cette dernière somme est le double de celle qui correspond aux solutions dans lesquelles on a $a > b$. En effet, groupons ensemble les deux termes qui correspondent à deux solutions a, b, α, β et a', b', α', β' liées entre elles par les formules

$$(A) \qquad a' = b, \; b' = a, \; \alpha' = \beta, \; \beta' = \alpha.$$

Ces deux termes sont

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}} \text{ et } (-1)^{\frac{a'-b'}{2}} = (-1)^{\frac{b-a}{2}}.$$

Comme ces deux termes sont égaux, nous pouvons remplacer leur somme par le double de celui qui vérifie la condition $a - b > 0$, ce qui a lieu nécessairement pour l'un d'eux, puisque $a' - b' = -(a-b)$. D'ailleurs il est évident que toutes les solutions de l'équation (3) peuvent être groupées deux à deux au moyen des formules (A), tant que les deux nombres a et b sont inégaux. L'équation (5) peut donc être remplacée par la suivante

$$(6) \qquad N = \zeta_1(m) + 2\sum\nolimits' (-1)^{\frac{a-b}{2}},$$

dans laquelle on désigne par $\sum'$ une somme dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation (3) qui vérifient la condition $a > b$.

6. Or les termes de cette somme peuvent être groupés deux à deux de telle manière que la somme des deux termes de chaque groupe soit nulle. En effet, l'équation (3) peut s'écrire

$$(7) \qquad 2m = (a - b)\,\alpha + (\alpha + \beta)\,b,$$

et sous cette forme, on voit que l'un des deux nombres $\frac{a-b}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$ est pair et l'autre impair. Si donc la solution a, b, α, β est associée à une autre solution a', b', α', β' au moyen des relations

$$(\mathrm{B}) \qquad a' - b' = \alpha + \beta, \quad \alpha' + \beta' = a - b,$$

les deux termes de notre somme $\sum'$ qui correspondent à ces deux solutions, sont égaux et de signes contraires, de sorte que leur somme s'évanouit. D'ailleurs si l'on fait la substitution (B) dans la formule

$$2m = a'\alpha' + b'\beta' = (\alpha' + \beta')\,b' + (a' - b')\,\alpha',$$

on trouve

$$2m = (a - b)\,b' + (\alpha + \beta)\,\alpha',$$

et en comparant cette formule avec l'équation (7), on voit qu'elle est vérifiée lorsqu'on prend

$$b' = \alpha + \theta\,(\alpha + \beta), \quad \alpha' = b - \theta\,(a - b).$$

La combinaison de ces dernières formules avec les relations (B) donne

$$\mathrm{I.} \quad \left|\begin{array}{ll} \alpha' = b - \theta\,(a - b), & \beta' = (\theta + 1)\,(a - b) - b \\ a' = \alpha + (\theta + 1)\,(\alpha + \beta), & b' = \alpha + \theta\,(\alpha + \beta). \end{array}\right.$$

Quelle que soit la valeur entière de θ, ces formules donnent pour a', b', α', β' des valeurs impaires qui vérifient l'équation $a'\alpha' + b'\beta' = a\alpha + b\beta$; mais pour que les valeurs de α' et de β' soient positives, il est nécessaire que le nombre θ vérifie les deux inégalités

$$(8) \qquad \theta < \frac{b}{a - b} < \theta + 1.$$

Cette condition détermine complètement le nombre θ. Car le nombre $(a - b)$ étant pair, tandis que b est impair, le quotient $b : (a - b)$ ne peut pas se réduire à un nombre entier et la partie entière de ce quotient est la seule

valeur de θ qui vérifie les inégalités (8). Ainsi à toute solution de l'équation (3) dans laquelle a est $> b$, les formules I font correspondre une solution unique a', b', α', β' de la même équation, vérifiant la condition $a'-b'>0$. De plus, lorsqu'on prend successivement toutes les solutions de l'équation (3) qui vérifient la condition $a-b>0$, les formules I donnent pour a', b', α', β' des solutions toutes différentes; car si l'on résout les formules I par rapport aux nombres a, b, α, β, on trouve :

$$\text{II.} \quad \left| \begin{array}{ll} a = \alpha' + (\theta+1)(\alpha'+\beta'), & b = \alpha' + \theta(\alpha'+\beta') \\ \alpha = b' - \theta(a'-b'), & \beta' = (\theta+1)(a'-b') - b'. \end{array} \right.$$

Dans ces formules, la valeur de θ est complètement déterminée par la double inégalité $\alpha>0$, $\beta>0$, d'où l'on déduit

$$\theta < \frac{b'}{a'-b'} < \theta + 1.$$

Par conséquent une seule solution a, b, α, β peut correspondre dans les formules I à une solution déterminée a', b', α', β'. Il résulte de là que toutes les solutions de l'équation (3) dans lesquelles la différence $a-b$ est positive, sont groupées deux à deux par les formules I, de telle manière que la même solution ne peut pas figurer dans deux groupes différents. Or les deux termes de $\sum'$ qui correspondent aux deux solutions de chacun de ces groupes sont égaux et de signes contraires ; car les deux nombres $\frac{a-b}{2}$ et $\frac{a'-b'}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$ étant, l'un pair et l'autre impair, la somme

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}} + (-1)^{\frac{a'-b'}{2}}$$

se réduit à zéro. La somme $\sum'(-1)^{\frac{a-b}{2}}$ qui figure dans l'équation (6) est donc composée de termes qui se détruisent deux à deux ; elle s'évanouit et l'on a simplement

$$(9) \qquad N = \xi_1(m):$$

Le nombre des décompositions du quadruple d'un nombre impair m *en quatre carrés impairs, est égal à la somme des diviseurs de* m.

Soit par exemple $m=3$. Dans toute décomposition du nombre 12 en une somme de quatre carrés impairs, l'un des carrés est 9 et les trois autres sont égaux à 1 ; mais le carré 9 peut occuper quatre positions, de sorte

que le nombre des décompositions de 12 en quatre carrés impairs est égal à 4, comme on le déduit du théorème énoncé.

CH. II. *Formules générales qui se déduisent de l'analyse précédente.*

7. Nous venons de démontrer que la somme

$$\sum (-1)^{\frac{a-b}{2}}$$

relative à toutes les solutions de l'équation

$$(3) \qquad 2m = a\alpha + b\beta$$

en nombres impairs et positifs a, b, α, β, se réduit à la somme des termes qui correspondent à l'hypothèse $a = b$. Or cette démonstration repose uniquement sur cette propriété de la fonction $(-1)^{\frac{a-b}{2}}$ de ne pas changer de valeur quand $(a - b)$ change de signe, et de changer de signe sans changer de valeur numérique lorsqu'on remplace $a - b$ par $\alpha + \beta$. Si donc on substitue à cette fonction toute autre fonction de $a - b$ et de $\alpha + \beta$ jouissant de la même propriété, on démontrera de la même manière que la somme des valeurs de cette fonction relatives aux diverses solutions de l'équation (3) se réduit à la somme de celles qui correspondent aux solutions dans lesquelles les deux nombres a et b sont égaux.

Soit donc $\varphi\,(x, y)$ une fonction quelconque de x et de y, qui, pour toutes les valeurs entières de x et de y employées dans nos formules, vérifie les conditions

$$(\text{K}) \qquad \varphi(x, y) = \varphi(-x, y) = \varphi(x, -y),\ \varphi(x, y) = -\varphi(y, x).$$

au moyen de cette fonction nous formons la somme

$$\sum \varphi\,(a - b,\ \alpha + \beta),$$

dont les éléments correspondent un à un aux diverses solutions de l'équation (3) en nombres impairs et positifs. Nous pouvons partager cette somme en deux parties, dont l'une correspond aux solutions dans lesquelles a est égal à b, et l'autre, aux autres solutions.

Soit d'abord $a = b$. La valeur commune des deux nombres a et b étant

un diviseur de b, nous posons $a = b = d$ et $m = d\delta$, de sorte que l'équation (3) divisée par d donne

$$(4) \qquad 2\delta = \alpha + \beta.$$

Les valeurs correspondantes de $\varphi(a - b, \alpha + \beta)$ sont toutes égales à $\varphi(0, 2\delta)$ et leur nombre est égal à celui des solutions de l'équation (4), c'est-à-dire à δ, puisque l'on peut donner à α les δ valeurs impaires, inférieures à 2δ. La somme des termes qui correspondent à un même diviseur δ de m est donc $\delta\varphi(0, 2\delta)$. Si l'on égale successivement δ à tous les diviseurs de m et qu'on, ajoute ensemble les valeurs correspondantes du produit $\delta\varphi(0, 2\delta)$, on obtient la première partie de la somme considérée, savoir celle qui correspond à l'hypothèse $a = b$. On a de cette manière

$$\sum \varphi(a - b, \alpha + \beta) = \sum \delta\varphi(0, 2\delta) + \sum\nolimits_1 \varphi(a - b, \alpha + \beta).$$

La première somme du second membre correspond à tous les diviseurs de m, désignés indéfiniment par δ. La deuxième somme, $\sum_1$, se rapporte aux solutions de l'équation (3) dans lesquelles a et b sont deux nombres inégaux. Nous allons démontrer qu'en vertu des conditions (k) cette dernière somme est nulle.

8. Réunissons d'abord les deux termes qui correspondent aux deux solutions (a, b, α, β), $(a', b', \alpha', \beta')$ liées entre elles par les formules

$$(A) \qquad a' = b.\ b' = a,\ \alpha' = \beta,\ \beta' = \alpha.$$

Comme l'on a $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta$ et $a' - b' = -(a - b)$ les deux termes

$$\varphi(a - b, \alpha + \beta) \text{ et } \varphi(a' - b', \alpha' + \beta')$$

sont égaux et leur somme peut être représentée par le double de celui qui correspond à une valeur positive de $(a - b)$, condition qui est nécessairement vérifiée pour l'un d'eux, puisque les deux différences $a - b$, $a' - b'$ sont égales et de signes contraires. On a donc

$$\sum\nolimits_1 \varphi(a - b, \alpha + \beta) = 2\sum\nolimits_2 \varphi(a - b, \alpha + \beta)$$

en désignant par $\sum_2$ une somme dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation (3) qui vérifient la condition $a > b$.

Or, nous avons demontré (n.° 6) que toutes ces solutions sont groupées deux à deux, au moyen des formules I et II, de telle sorte que la même

solution ne figure pas dans deux groupes différents, et que le deux solutions du même groupe vérifient les relations

$$\text{(B)} \qquad a' - b' = \alpha + \beta, \quad \alpha' + \beta' = a - b.$$

Les termes de $\sum_2$ qui correspondent aux deux solutions d'un même groupe ont donc pour somme

$$\varphi(a'-b', \alpha' + \beta') + \varphi(a-b, \alpha+\beta) = \varphi(\alpha+\beta, a-b) + \varphi(a-b, \alpha+\beta),$$

et cette somme se réduit à zéro, puisque la fonction φ vérifie la condition $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$. Ainsi la somme désignée par $\sum_2$ peut se partager en sommes partielles, formées chacune de deux termes égaux et de signes contraires. Par conséquent elle se réduit à zéro. On a donc simplement

$$(\Omega) \qquad \sum \varphi(a-b, \alpha+\beta) = \sum \delta\varphi(0, 2\delta) = \sum d\varphi(0, 2d).$$

Dans le premier membre de cette formule, le signe $\sum$ indique une somme dont les termes $\varphi(a-b, \alpha+\beta)$ correspondent aux diverses solutions de l'équation

$$(3) \qquad 2m = a\alpha + b\beta$$

en nombres impairs et positifs. Notre formule exprime que cette somme est égale à la somme des valeurs que prend le produit $\delta\varphi(0, 2\delta)$ lorsqu'on prend successivement comme valeurs de δ tous les diviseurs du nombre impair m.

9. On peut démontrer de la même manière une formule plus générale se rapportant à l'équation

$$(5) \qquad 2^{\lambda+1} m = a\alpha + b\beta,$$

dans laquelle λ désigne un exposant entier, positif ou nul, m, un nombre impair donné, a, b, α, β, des nombres impairs et positifs, propres à vérifier l'équation. Dans la somme $\sum \varphi(a-b, \alpha+\beta)$, dont les termes correspondent aux diverses solutions de l'équation (5), la partie qui correspond aux solutions dans lesquelles les deux nombres a et b sont inégaux s'évanouit. D'abord cette partie est égalle à deux fois celle qui correspond aux solutions dans lesquelles a est $> b$. Or les termes de cette dernière somme sont groupés deux à deux au moyen des formules I et II, de telle sorte que le même terme ne figure pas dans deux groupes différents. Comme en vertu de la condition

$$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$$

la somme de deux termes de chaque groupe

$$\varphi(a' - b', \alpha' + \beta') + \varphi(a - b, \alpha + \beta)$$

se réduit à zéro, puisque l'on a

$$\varphi(a' - b', \alpha' + \beta') = \varphi(a + \beta, a - b) = -\varphi(a - b, \alpha + \beta),$$

la partie considérée de la somme totale s'évanouit et il ne reste plus que la partie qui correspond à l'hypothèse $a = b$.

La valeur commune des deux nombres a et b étant un diviseur de m, nous poserons $m = d\delta$ et $a = b = d$. L'équation (5) devient alors

$$(5') \qquad 2^{\lambda+1}\delta = \alpha + \beta.$$

Tous les termes $\varphi(a - b, \alpha + \beta)$ qui correspondent à cette hypothèse sont égaux à $\varphi(0, 2^{\lambda+1}\delta)$ et leur nombre est égal à celui des solutions de l'équation (5′) en nombres impairs α, β. Ce nombre est égal à $2^{\lambda}\delta$, puisque l'on peut égaler α successivement à tous les nombres impairs

$$1, 3, 5, \ldots 2^{\lambda+1}\delta - 1$$

inférieurs à $2^{\lambda+1}\delta$. La somme des termes qui correspondent à une même décomposition $m = d\delta$ du nombre m en deux facteurs est donc égale au produit

$$2^{\lambda}\delta \times \varphi(0, 2^{\lambda+1}\delta).$$

La somme de tous les produits semblables que l'on obtient en égalant successivement δ à tous les diviseurs de m exprime donc la somme des valeurs de $\varphi(a - b, \alpha + \beta)$ qui correspondent aux solutions de l'équation (5) dans lesquelles les deux nombres a et b sont égaux. On a donc

$$(\Omega'). \qquad \sum \varphi(a - b, \alpha + \beta) = 2^{\lambda} \sum d\,\varphi(0, 2^{\lambda+1} d).$$

10. L'équation (5) peut être remplacée par trois autres équations

$$(1). \qquad 2^{\lambda+1} m = m' + m''$$

$$(2). \qquad m' = a\alpha, \quad m'' = b\beta.$$

Cela revient à grouper ensemble toutes les solutions de l'équation (5) dans lesquelles le produit $a\alpha$ présente une même valeur m'. Par conséquent le premier membre de la formule (Ω') peut être remplacé par une somme triple, dont l'une se rapporte aux diverses solutions de l'équation (1) en

nombres impairs et positifs m', m'', et les deux autres, à toutes les décompositions des deux nombres m', m'' en deux facteurs.

Notre formule peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$(Z)\qquad \sum\left(\sum\sum \varphi\,(a-b,\ \alpha+\beta)\right) = 2^{\lambda}\sum d\ \varphi\,(0,\ 2^{\lambda+1}d).$$

Le premier signe d'intégration, $\sum$ se rapporte aux diverses solutions de l'équation (1), c'est-à-dire aux diverses partitions du nombre $2^{\lambda+1}m$ en deux parties impaires et positives m', m''. Pour chacune de ces solutions, les deux signes $\sum\sum$ renfermés entre parenthèse indiquent une intégration relative à tous les systèmes de valeurs des nombres a, b, α, β propres à vérifier les équations (2). La somme de tous les résultats semblables, relatifs aux valeurs $1, 3, 5, \ldots\ 2^{\lambda+1}m-1$ de m', forme le premier membre de notre formule. Nous verrons dans les applications combien est utile la substitution de la somme triple à la somme simple, lorsque la fonction $\varphi\,(x, y)$ est choisie de manière à rendre indépendantes l'une de l'autre les deux intégrations relatives aux deux équations $m' = a\alpha$, $m'' = b\beta$.

La somme indiquée dans le second membre se rapporte à l'équation $m = d\delta$. Pour chaque diviseur de m on forme le produit $d\varphi\,(0,\ 2^{\lambda+1}d)$ et l'on réunit en une seule somme tous les produits semblables, qui correspondent à tous les diviseurs de m indéfiniment désignés par d.

11. On satisfait aux conditions (K) en prenant

$$\varphi\,(x, y) = f\,(x, y) - f\,(y, x),$$

pourvu que la fonction $f\,(x, y)$ soit une fonction paire de x et de y, pour toutes les valeurs de ces variables employées dans nos formules. En faisant cette substitution dans l'équation (Z) on trouve

$$(b).\quad \sum\left[\sum\sum(f\,(a-b,\ \alpha+\beta) - f\,(\alpha+\beta, a-b))\right] = 2^{\lambda}\sum d\ (f\,(0,\ 2^{\lambda+1}d) - f\,(2^{\lambda+1}d, 0)).$$

Comme les équations (2) ne changent pas lorsqu'on échange entre elles les lettres latines et les lettres grecques correspondantes, on a

$$\sum\sum\sum f\,(\alpha+\beta,\ a-b) = \sum\sum\sum f\,(a+b,\ \alpha-\beta).$$

En faisant cette substitution dans l'équation (b), on trouve

$$(c)\quad \sum\left[\sum\sum\,(f\,(a-b,\ \alpha+\beta) - f\,(a+b,\ \alpha-\beta))\right] = 2^{\lambda}\sum d\ (f\,(0,\ 2^{\lambda+1}d) - f\,(2^{\lambda+1}d,\ 0)).$$

On vérifie encore les deux conditions

$$\text{(K)} \qquad \varphi(x, y) = -\varphi(y, x), \; \varphi(-x, y) = \varphi(x, -y) = \varphi(x, y),$$

lorsqu'on prend

$$\varphi(x, y) = f(x) - f(y),$$

pourvu que la fonction $f(x)$ vérifie, pour toutes les valeurs de x employées dans nos formules, la condition

$$f(-x) = f(x).$$

La formule (Z) devient alors :

$$(a) \qquad \sum \left[\sum\sum (f(a-b) - f(a+b)\right] = 2^{\lambda} \sum d \left[f(0) - f(2^{\lambda+1} d)\right].$$

L'hypothèse $\lambda = 0$ réduit les formules (a), (b), (c) aux trois suivantes :

$$\text{(A)} \quad \sum \left[\sum\sum (f(a-b) - f(a+b))\right] = \sum d\,(f(0) - f(2d)),$$

$$\text{(B)} \quad \sum \left[\sum\sum (f(a-b, \alpha+\beta) - f(\alpha+\beta, a-b))\right] = \sum d\,(f(0, 2d) - f(2d, 0)),$$

$$\text{(C)} \quad \sum \left[\sum\sum (f(a-b, \alpha+\beta) - f(a+b, \alpha-\beta)\right] = \sum d\,(f(0, 2d) - f(2d, 0)).$$

La triple somme qui forme le premier membre de ces formules se rapporte aux diverses solutions des trois équations

$$2m = m' + m'', \; m' = a\alpha, \; m'' = b\beta,$$

auxquelles se réduisent les équations (1) et (2) lorsqu'on y fait $\lambda = 0$.

Les six formules énoncées dans ce n° coïncident, aux notations près, avec les formules générales désignées par les mêmes lettres dans les deux premiers articles de Liouville (*Journal de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. III, p. 143 et 193).

Ch. III. *Formules relatives à l'équation*

$$2^{\lambda}.m = 2^{\mu} a\alpha + 2^{\nu} b\beta.$$

12. Nous désignons par m un nombre impair et positif et par λ un exposant entier, positif ou nul. Nous décomposons le nombre $2^{\lambda} m$ de toutes les manières possibles en deux parties entières et positives, paires ou impaires, p, q, puis nous cherchons toutes les solutions possibles des trois équations

$$2^{\lambda}.m = p + q, \; p = \mathrm{A}a, \; q = \mathrm{B}b$$

en nombres entiers et positifs p, q, A, B, a, b dont les deux derniers a et b sont impairs. Au moyen de ces solutions et d'une fonction $f(x, y)$ qui, pour toutes les valeurs de x et de y employées dans nos formules, vérifie les conditions

$$f(x, y) = f(-x, y) = f(x, -y),$$

nous formons la somme triple

$$\sum (\sum\sum [f(\mathrm{A} - \mathrm{B},\ a + b) - f(\mathrm{A} + \mathrm{B},\ a - b)])$$

où les deux premières sommations indiquées entre parenthèse se rapportent, pour une même solution de l'équation

$$2^{\lambda}.m = p + q,$$

à toutes les décompositions possibles de chacun des deux nombres p, q en deux facteurs, l'un impair et l'autre, pair ou impair. Quant à la troisième intégration, elle se rapporte aux différents systèmes de valeurs positives des deux nombres p et q propres à vérifier l'équation $2^{\lambda}m = p + q$.

Pour démontrer la formule que nous voulons établir, il est préférable de remplacer les trois signes sommatoires par un seul, se rapportant aux diverses solutions de l'équation

$$(1) \qquad 2^{\lambda}.m = \mathrm{A}a + \mathrm{B}b$$

en nombres entiers et positifs A, B, a, b dont les deux derniers sont impairs. Nous pouvons aussi séparer les deux parties de la somme et écrire

$$(2) \qquad \sum (f(\mathrm{A} - \mathrm{B},\ a + b) - f(\mathrm{A} + \mathrm{B},\ a - b)) = \mathrm{S}' - \mathrm{S}$$

$$\mathrm{S}' = \sum f(\mathrm{A}' - \mathrm{B}',\ a' + b'), \quad \mathrm{S} = \sum f(\mathrm{A} + \mathrm{B},\ a - b).$$

De plus nous distinguons les éléments de la somme S' en les faisant correspondre aux diverses solutions de l'équation

$$(1') \qquad 2^{\lambda}m = \mathrm{A}'a' + \mathrm{B}'b',$$

comme ceux de la somme S correspondent aux solutions de l'équation équivalente (1).

13. Nous transformerons d'abord la somme S en distinguant les termes qui correspondent aux solutions dans lesquelles a et b sont égaux. Comme la valeur commune de ces deux nombres est un diviseur de m, nous la désignerons par δ et nous poserons $m = d\delta$. Les termes correspondants de

la somme S sont tous égaux à $f(2^\lambda d, 0)$ et leur nombre est égal à celui des solutions de l'équation

$$(3). \qquad 2^\lambda d = A + B,$$

c'est-à-dire à $2^\lambda d - 1$, puisque le nombre A peut recevoir toutes les valeurs entières et positives, inférieures à $2^\lambda d$. La somme de tous les termes de S qui correspondent à l'hypothèse $a = b = \delta$ est donc égale au produit

$$(2^\lambda d - 1)\, f(2^\lambda d, 0),$$

et la somme de tous les produits semblables qu'on obtient en égalant d successivement à tous les diviseurs de m, exprime la somme des termes de S qui correspondent aux solutions de l'équation (1) dans lesquelles la différence $(a - b)$ s'évanouit.

Quant aux autres termes de S, nous les grouperons deux à deux au moyen des formules

$$A_1 = B,\ B_1 = A,\ a_1 = b,\ b_1 = a.$$

Les deux termes de chaque groupe sont égaux, puisque l'on a

$$A_1 + B_1 = A + B \ \text{ et } \ a_1 - b_1 = -(a - b).$$

Nous remplacerons leur somme par le double de celui des deux termes qui correspond à l'hypothèse $a - b > 0$, ce qui a nécessairement lieu pour l'un d'eux, puisque les deux différences $a_1 - b_1$, $a - b$ sont de signes contraires. On a donc

$$(4) \qquad S = \sum (2^\lambda d - 1) f(2^\lambda d, 0) + 2\sum\nolimits_1 f(A + B,\ a - b),$$

en représentant par $\sum_1$ une somme restreinte dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation (1) qui vérifient la condition $a > b$.

14. Nous ferons subir une transformation semblable à la somme S'. Nous grouperons deux à deux les termes dans lesquels A', B' sont inégaux, au moyen des formules

$$A_1 = B',\ B_1 = A',\ a_1 = b',\ b_1 = a'.$$

Les deux termes de chaque groupe sont égaux, puisque l'on a

$$A_1 - B_1 = -(A' - B'), \quad a_1 + b_1 = a' + b'.$$

De plus dans l'un des deux termes la différence $A' - B'$ est positive,

puisque les deux différences $A_1 - B_1$, $A' - B'$ sont de signes contraires. Nous remplacerons la somme des deux termes de chaque groupe par le double de celui qui vérifie la condition $A' > B'$.

Les autres termes de S' correspondent à l'hypothèse $A' = B'$. L'équation ($1'$) devient alors

$$(5) \qquad 2^\lambda d\delta = A'.(a' + b').$$

Comme la somme $a' + b'$ est un nombre pair, nous poserons

$$a' + b' = 2^{i+1}d, \text{ et } A' = 2^{\lambda-i-1}\delta,$$

en désignant par i un nombre entier, nul ou positif, inférieur à λ. Tous les termes de S' qui correspondent à un même système de valeurs des nombres d, δ et i sont égaux à $f(0, 2^{i+1}d)$ et leur nombre est égal à celui des solutions de l'équation $a' + b' = 2^{i+1}d$, c'est-à-dire à $2^i d$. La somme des termes de S' qui correspondent aux mêmes valeurs des nombres d et i est donc $2^i d f(0, 2^{i+1}d)$, et celle des termes qui correspondent à la même valeur de d se déduit de cette expression en donnant à i les valeurs $0, 1, 2, \ldots \lambda - 1$ et en faisant la somme des résultats. On trouve ainsi

$$d\,[f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + 4f(0, 8d) + \ldots + 2^{\lambda-1} f(0, 2^\lambda d)].$$

Enfin la somme de toutes les expressions semblables, relatives à tous les diviseurs de m, désignés par d, exprime la somme de tous ceux des termes de S' qui correspondent à l'hypothèse $A' = B'$. On a donc

$$S' = \sum d\,[f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + \ldots + 2^{\lambda-1}f(0, 2^\lambda d)] + 2\sum\nolimits_2 f(A' - B', a' + b'),$$

en désignant par $\sum_2$ une somme restreinte dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation

$$2^\lambda m = A'a' + B'b'$$

qui vérifient la condition $A' > B'$.

15. Par la substitution des expressions précédentes de S' et de S, l'équation (2) devient

$$(6) \quad \sum [f(A-B, a+b) - f(A+B, a-b)] = \sum d\,[f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + \ldots + 2^{\lambda-1}f(0, 2^\lambda d)]$$
$$- \sum (2^\lambda d - 1) f(2^\lambda d, 0) + 2\sum\nolimits_2 f(A' - B', a' + b') - 2\sum\nolimits_1 f(A + B, a - b).$$

Les sommes $\sum_1$, $\sum_2$ correspondant respectivement aux équations (1) et ($1'$)

avec les restrictions $a-b>0$, $A'-B'>0$. Or, tous les termes de la somme $\sum_1$ sont égaux à des termes différents de la somme $\sum_2$.

En effet, toutes les solutions de l'équation (1) qui vérifient la condition $a-b>0$ correspondent à des solutions de l'équation (1') qui satisfont aux relations

$$\text{(B)} \qquad A'-B'=A+B, \quad a'+b'=a-b,$$

$$f(A', -B', a'+b') = f(A+B, a-b).$$

Pour le démontrer nous écrirons les formules (1) et (1') de la manière suivante :

$$\text{(7)} \qquad 2^{\lambda}m = (a-b)\,A + (A+B)\,b$$

$$\text{(7')} \qquad 2^{\lambda}m = (a'+b')\,B' + (A'-B')\,a'.$$

En vertu de la substitution (B), la dernière formule devient

$$\text{(8)} \qquad 2^{\lambda}m = (a-b)\,B' + (A+B)\,a'.$$

La comparaison des deux formules (7) et (8) montre que l'on vérifie l'équation (7') par des nombres A', B', a', b' qui satisfont aux relations (B) jointes aux suivantes :

$$\text{(C)} \qquad B' = A + \theta\,(A+B), \quad a' = b - \theta\,(a-b),$$

où θ désigne un nombre entier quelconque. Lorsque $(a-b)$ et $(A+B)$ ont un diviseur commun, l'équation (7') admet d'autres solutions qui satisfont aux relations (B) sans vérifier les dernières formules; mais nous nous contentons de les mentionner, parce qu'elles sont inutiles pour notre but. La combinaison des formules (B) et (C) donne le système suivant:

$$\text{I.} \quad \left| \begin{array}{l} a' = b - \theta\,(a-b), \quad b' = (\theta+1)\,(a-b) - b, \\ A' = A + (\theta+1)\,(A+B), \quad B' = A + \theta\,(A+B). \end{array} \right.$$

Le nombre θ se trouve complètement déterminé par la condition de donner une valeur positive aux deux nombres a', b', ce qui exige que θ vérifie la double inégalité

$$\theta < \frac{b}{a-b} < \theta + 1.$$

Comme la fraction $b:(a-b)$ ne peut pas se réduire à un nombre entier, puisque b est impair, tandis que $(a-b)$ est pair, on satisfait aux deux inégalités en prenant pour valeur de θ la partie entière de cette fraction. Le nombre θ étant positif, les quatre nombres A', B', a', b' sont positifs; de plus les deux nombres a', b' sont impairs et l'on a $A' > B'$. Par conséquent les formules I font correspondre à la solution (A, B, a, b) de l'équation (1) une solution de l'équation (1') qui satisfait à toutes les conditions supposées dans les éléments de la somme $\sum_2$.

16. Ainsi à toute solution de l'équation (1), vérifiant la condition $a>b$, les équations I font correspondre une solution de l'équation (1'), et une seule, dans laquelle on a $A'>B'$. Il nous reste à démontrer que la même solution (A', B', a', b') ne correspond pas dans les formules I, à deux solutions de l'équation (1). Pour cela nous résolvons ces formules par rapport à la solution (A, B, a, b), ce qui donne le système suivant:

$$\text{II.}\quad \left|\begin{array}{l} A = B' - \theta\,(A' - B'),\ \ B = (\theta + 1)\ (A' - B') - B', \\ a = a' + (\theta + 1)\ (a' + b'),\ \ b = a' + \theta\ (a' + b'). \end{array}\right.$$

Pour que ces formules fussent vérifiées par deux systèmes différents de valeurs des nombres A, B, a, b, il faudrait que l'on pût donner à θ deux valeurs différentes, mais cela est impossible, car les deux nombres A, B étant positifs, le nombre θ doit vérifier les deux inégalités

$$(9)\qquad \theta < \frac{B'}{A' - B'} < \theta + 1,$$

qui le déterminent complètement. Ces inégalités peuvent être impossibles lorsqu'on prend au hazard une solution (A', B', a', b') de l'équation (1'); mais cela n'arrive pas lorsque cette solution a été déterminée par les formules I, parce que la valeur de θ qui figure dans ces formules, correspond nécessairement à des valeurs positives des nombres A et B.

17. Ainsi les formules I font correspondre un terme de la somme $\sum_2$, et un seul, à chaque terme de la somme $\sum_1$, et le même terme de $\sum_2$ ne peut pas correspondre à deux termes différents de $\sum_1$. Comme les termes correspondants sont égaux, on peut poser:

$$\sum\nolimits_2 f(A' - B',\ a' + b') = \sum\nolimits_1 f(A + B,\ a - b) + \sum\nolimits_3 f(A' - B',\ a' + b'),$$

en désignant par $\sum_3$ une somme dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation (1') qui, tout en satisfaisant à la condition $A' > B'$, ne correspondent dans les formules I et II à aucune solution de l'équation (1). Ces solutions sont faciles à déterminer ; ce sont celles pour lesquelles il est impossible de satisfaire aux inégalités (9) sans que l'une d'elles se change en égalité, ce qui réduit à zero la valeur correspondante de l'un des nombres A ou B. Or cette impossibilité ne se présente que dans le cas où le quotient $B' : (A' - B')$ est entier. Ainsi les solutions de l'équation (1') auxquelles correspondent les termes de la somme $\sum_3$ sont celles qui vérifient les deux conditions

$$A' > B', \quad B' = k\,(A' - B'), \text{ ou } kA' = (k + 1)\,B',$$

dans lesquelles k est un nombre entier et positif.

Comme les deux nombres k, $k + 1$ sont premiers entre eux, le nombre k doit diviser B'. Désignant donc par μ un nombre entier et positif, on a

$$B' = k\mu, \quad A' = (1 + k)\mu. \quad A' - B' = \mu,$$

$$2^\lambda m = \mu\left[k\,(a' + b') + a'\right]. \tag{10}$$

Le facteur $k\,(a' + b') + a'$, étant impair, doit être un diviseur de m. En le désignant par δ et en posant $m = d\delta$, on a

$$\mu = A' - B' = 2^\lambda d, \quad \delta = k\,(a' + b') + a'.$$

On peut prendre successivement comme valeurs de δ tous les diviseurs de m supérieurs à 1. A chaque valeur de δ correspondent autant de termes de $\sum_3$ qu'il y a de nombres pairs, compris entre 0 et δ ; car le nombre $a' + b'$ doit être égalé successivement à chacun des nombres 2, 4, 6,... $\delta - 1$; on divise δ par chacune de ces valeurs de $a' + b'$ et l'on prend comme valeur de a' le reste de cette division ; on a ensuite $b' = (a' + b') - a'$, $B' = k.2^\lambda d$, $A' = (k + 1)2^\lambda d$. Le terme correspondant de $\sum_2$ est $f(2^\lambda d,\ a' + b')$ et la somme des termes de $\sum_3$ qoi correspondent à une même valeur de δ est

$$f(2^\lambda d, 2) + f(2^\lambda d, 4) + f(2^\lambda d,\ 6) + .. + f(2^\lambda d,\ \delta - 1).$$

On obtient la somme $\sum_3$ en faisant la somme de toutes les expressions semblables, relatives à tous les diviseurs δ de m, autres que 1. On a donc

$$2\sum_2 - 2\sum_1 = 2\sum_3 = \sum\left[2f(2^\lambda d,\ 2) + 2f(2^\lambda d,\ 4) + ,.. + 2f(2^\lambda d,\ \delta - 1)\right].$$

On peut étendre le signe sommatoire à tous les diviseurs de m, même au diviseur $\delta = 1$, en écrivant

$$2\sum_2 f(\mathrm{A}' - \mathrm{A}', a' + b') = \sum \left[f(2^\lambda d, 0) + 2f(2^\lambda d, 2) + 2f(2^\lambda d, 4) + \ldots + 2f(2^\lambda d, \delta - 1)\right]$$
$$- \sum f(2^\lambda d, 0),$$

pourvu que la somme entre parenthèse soit réduite à son premier terme, quand $\delta = 1$.

12. En substituant dans l'équation (6) l'expression précédente de la différence

$$2\sum_2 f(\mathrm{A}' - \mathrm{B}', a' + b') - 2\sum_1 f(\mathrm{A} + \mathrm{B}, a - b),$$

on trouve

$$\sum\left[(f(\mathrm{A} - \mathrm{B}, a + b) - f(\mathrm{A} + \mathrm{B}, a - b)\right] = \sum d\left[f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + \ldots + 2^{\lambda-1} f(0, 2^\lambda d)\right]$$
$$+ \sum\left[f(2^\alpha d, 0) + 2f(2^\alpha d, 2) + \ldots + 2f(2^\alpha d, \delta - 1)\right] - 2^\lambda \sum d f(2^\lambda \delta, 0).$$

Pour les applications de l'équation obtenue, il est avantageux de mettre en évidence le facteur 2 dans les deux nombres A et B, et de remplacer la somme simple par une somme triple, comme nous l'avons dit au commencement de ce chapitre. Nous poserons $\mathrm{A} = 2^\mu \alpha$, $\mathrm{B} = 2^\nu \beta$, en désignant par α, β deux nombres impairs et positifs, par μ et ν deux exposants entiers, positifs ou nuls. L'équation (1) sera remplacée par la suivante

$$(11) \qquad 2^\lambda m = 2^\mu a\alpha + 2^\nu b\beta.$$

Nous groupons ensemble toutes les solutions de cette équation dans lesquelles $2^\mu a\alpha$ présente une valeur déterminée $2^\mu m'$, et relativement à ce groupe nous faisons deux sommes, l'une relative à toutes les décompositions de m' en deux facteurs et l'autre à toutes les décompositions semblables de la différence $2^\lambda m - 2^\mu m' = 2^\nu m''$ divisée par 2^ν. Nous obtenons ensuite la somme complète en réunissant tous les résultats semblables relatifs à toutes les valeurs

$$1, 2, 3, \ldots 2^\lambda m - 1$$

de $2^\mu m'$. Notre formule devient donc

$$(e). \quad \sum\left[\sum\sum(f(2^\mu \alpha - 2^\nu \beta, a + b) - f(2^\mu \alpha + 2^\nu \beta, a - b))\right] =$$
$$\sum d\left[f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + 4f(0, 8d) + \ldots + 2^{\lambda-1} f(0, 2^\lambda d)\right]$$
$$+ \sum\left[f(2^\lambda d, 0) + 2f(2^\lambda d, 2) + 2f(2^\lambda d, 4) + \ldots + 2f(2^\lambda d, \delta - 1)\right] - 2^\lambda \sum d f(2^\lambda d, 0).$$

Les sommes du second membre se rapportent à toutes les solutions de l'é-

quation $m = d\delta$. Les éléments de la triple snmme du premier membre correspondent à tous les systèmes de solutions des équations

$$(12) \qquad 2^\lambda m = 2^\mu m' + 2^\nu m'', \quad m' = a\alpha, \quad m'' = b\beta.$$

Cette formule ne diffère que par les notations, de la formule (e) du cinquième article de Liouville « *Sur quelques formules générales...* » (*Journal de Mathématiques*, 2^{me} *série*, t. III, p. 280).

19. On peut réduire la fonction $f(x, y)$ à une fonction paire de x ou de y. Supposons d'abord qu'elle se réduise à une fonction paire de la seule variable x, c'est-à-dire à une fonction $f(x)$ qui vérifie la condition

$$f(-x) = f(x),$$

pour toutes les valeurs de x employées dans nos formules. La formule (e) se réduit d'abord à la suivante

$$\sum[\sum\sum (f(2^\mu\alpha - 2^\nu\beta) - f(2^\mu\alpha + 2^\nu\beta))] = f(0). \sum d\,(1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{\lambda-1})$$
$$+ \sum f(2^\lambda d)\,[1 + 2 + 2 \ldots + 2(-1)^{\delta-1}] - 2^\lambda \sum d\, f(2^\lambda \delta),$$

que l'on simplifie en effectuant les sommes indiquées dans les deux premiers termes du second membre. On a

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{\lambda-1} = 2^\lambda - 1, \quad \sum d = \zeta_1(m)$$
$$1 + 2 + 2 + \ldots + 2(-1)^{\delta-1} = 1 + 2\,\frac{\delta - 1}{2} = \delta\,;$$

au moyen de ces substitutions notre formule devient

$$(G) \qquad \sum[\sum\sum (f(2^\mu\alpha - 2^\nu\beta) - f(2^\mu\alpha + 2^\nu\beta))] = (2^\lambda - 1)\, f(0)\, \zeta_1(m)$$
$$+ \sum (\delta - 2^\alpha d)\, f(2^\alpha d).$$

C'est la formule (G) du quatrième article de Liouville (l. c, t. III, p. 242).

De même on peut réduire $f(x, y)$ à une fonction paire de la seule variable y. La formule (e) devient alors

$$(J) \quad \sum[\sum\sum (f(a + b) - f(a - b))] = \sum d\,[f(2d) + 2f(4d) + \ldots + 2^{\lambda-1} f(2^\lambda d)]$$
$$+ \sum[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(\delta - 1)] - 2^\lambda f(0)\, \zeta_1(m).$$

Cette formule est équivalente à la formule (J) du cinquième article de Liouville (*l. c.* p. 231).

Lorsque dans la formule (e) on prend $f(x, y) = f(x)\,(-1)^{\frac{y}{2}}$, sous la condition $f(x) = f(-x)$, on a d'abord

$$f(2^{\mu}\alpha - 2^{\nu}\beta,\ a + b) - f(2^{\mu}\alpha + 2^{\nu}\beta,\ a - b) =$$

$$(-1)^{\frac{a+b}{2}}\,(f(2^{\mu}\alpha - 2^{\nu}\beta) + f(2^{\mu}\alpha + 2^{\nu}\beta)) = -(-1)^{\frac{a-1}{2}}\,(-1)^{\frac{b-1}{2}}\,[f(2^{\mu}\alpha+2^{\nu}\beta) + f(2^{\mu}\alpha-2^{\nu}\beta)].$$

D'un autre côté, la première somme du second membre devient

$$f(0)\sum d\,[(-1)^{d} + 2\,(-1)^{2d}\,2^{2} + \ldots + 2^{\lambda-1}] = (2^{\lambda} - 3)\,f(0)\,\zeta_1(m),$$

et la deuxième,

$$\sum f(2^{\lambda}d)\,[1 - 2 + 2 - \ldots + 2\,(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}] = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} f(2^{\lambda}d).$$

La formule (e) changée de signe devient donc

$$(\mathrm{K})\quad \sum\Big[\sum\sum (f(2^{\mu}\alpha - 2^{\nu}\beta) + f((2^{\mu}\alpha+2^{\nu}\beta))\,(-1)^{\frac{a-1}{2}}\,(-1)^{\frac{b-1}{2}}\Big] = (3 - 2^{\lambda})\,f(0)\,\zeta_1(m)$$
$$+ \sum \big(2^{\lambda}d - (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\big)\,f(2^{\alpha}d).$$

C'est la formule désignée par (K) dans le cinquième article de Liouville (*l. c.* p. 282).

18. Le cas où l'exposant λ s'évanouit mérite une attention spéciale. D'abord l'un des deux exposants μ, ν s'évanouit aussi, tandis que l'autre est positif. Le nombre impair m se trouve alors partagé en deux parties, l'une paire et l'autre impaire. La première somme du second membre de la formule (e) s'évanouit; car elle provient de la somme S' (n.° 13) et elle correspond à l'hypothèse $A' = B'$ qui est impossible lorsque $\lambda = 0$, parce que les deux nombres A', B' sont alors, l'un pair et l'autre impair. On peut aussi remplacer l'équation $m = 2^{\mu} m' + 2^{\nu} m''$, par l'équation $m = m_1 + 2^{i} m_2$. Il suffit pour cela de grouper deux à deux les termes de la triple somme qui correspondent à des solutions symétriques

$$2^{\mu'}\alpha_1 = 2^{\nu}\beta,\ \ 2^{\nu'}\beta'_1 = 2^{\mu}\alpha,\ \ a_1 = b,\ \ b_1 = a.$$

Les deux termes correspondants sont égaux, parce que l'on a

$$2^{\mu'}\alpha_1 + 2^{\nu'}\beta_1 = 2^{\mu}\alpha + 2^{\nu}\beta,\quad 2^{\mu'}\alpha_1 - 2^{\nu'}\beta_1 = -(2^{\mu}\alpha - 2^{\nu}\beta),$$
$$a_1 + b_1 = a + b,\quad a_1 - b_1 = -(a - b).$$

Nous remplacerons leur somme par le double de celui qui correspond à une valeur impaire de $2^{\mu}m' = 2^{\mu}a\alpha$. Notre formule devient donc

$$(d) \qquad 2\sum\left[\sum\sum\left(f(\alpha - 2^i\beta,\ a+b) - f(\alpha + 2^i\beta,\ a-b)\right)\right] = \\ \sum\left[f(d,0) + 2f(d,2) + \ldots + 2f(d,\delta-1)\right] - \sum df(d,0).$$

La triple somme qui forme le premier membre de cette formule correspond aux trois équations

$$(13) \qquad m = m_1 + 2^i m_2, \quad m_1 = a\alpha, \quad m_2 = b\beta,$$

en nombres entiers et positifs, tous impairs excepté l'exposant i qui peut être pair ou impair.

19. Lorsque dans la formule (d) on réduit $f(x,y)$ à une fonction paire de la seule variable x ou de la seule variable y, on obtient les deux formules suivantes :

$$(D). \quad 2\sum\left[\sum\sum(f(a+b) - f(a-b))\right] = \sum\left[f(0) + 2f(2) + \ldots + 2f(\delta-1)\right] - f(0)\zeta, \ (d),$$

$$(F). \qquad 2\sum\left[\sum\sum f(\alpha - 2^i\beta) - f(\alpha + 2^i\beta))\right] = \sum(\delta - d)f(d).$$

Dans ces formules la fonction désignée par f doit vérifier la condition

$$f(x) = f(-x).$$

On vérifie cette condition en prenant

$$f(x) = F(x+1) - F(x-1),$$

$F(x)$ désignant une fonction impaire de x, car on a

$$f(-x) = F(-x+1) - F(-x-1) = -F(x-1) + F(x+1).$$

Pour trouver ce que devient alors le second membre de la formule (D), il faut remarquer que l'on a

$$f(0) = 2F(1), \ 2f(2) = 2F(3) - 2F(1), \ 2f(4) = 2F(5) - 2F(3), \ldots$$

et par conséquent

$$f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots 2f(\delta - 1) = 2F(\delta).$$

La formule (D) divisée par 2 devient

$$(E). \qquad \sum\left[\sum\sum(F(a+b+1) - F(a+b+1) - F(a-b+1) + F(a-b-1))\right] = \\ \sum F(d) - F(1)\zeta_1(m).$$

On déduit encore une formule remarquable de la formule (d), en y rem-

plaçant $f(x,y)$ par $f(x)\ (-1)^{\frac{y}{2}}$, la fonction $f(x)$ étant soumise à la seule condition $f(-x)=f(x)$. Dans ce cas

$$f(\alpha-2^i\beta,\ a+b)=(-1)^{\frac{a+b}{2}}f(\alpha-2^i\beta)$$

$$f(\alpha+2^i\beta,\ a-b)=(-1)^{\frac{a-b}{2}}f(\alpha+2^i\beta)=-(-1)^{\frac{a+b}{2}}f(\alpha+2^i\beta),$$

car les deux nombres a, b étant impairs, l'un des deux nombres $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$ est pair, et l'autre, impair.

D'un autre côté le terme général de la première somme du second membre devient

$$f(d)\left[1-2+2-\ldots+2(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\right]=(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}f(d).$$

En substituant ces expressions dans la formule (d) et remplaçant

$$(-1)^{\frac{a+b}{2}} \text{ par } -(-1)^{\frac{a-1}{2}}\ (-1)^{\frac{b-1}{2}}$$

on obtient la formule suivante

$$\text{(I)}\quad 2\sum\left[\sum\sum(-1)^{\frac{a-1}{2}}(-1)^{\frac{b-1}{2}}(f(\alpha+2^i\beta)+f(\alpha-2^i\beta))\right]=\sum\left(d-(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\right)f(d).$$

Les formules obtenues ici ne diffèrent que par les notations, des formules générales, désignées par les mêmes lettres dans le troisième et dans le cinquième article de Liouville (*l. c.* t. III, p. 201, 273).

20. Nous pourrions démontrer d'une manière semblable d'autres formules générales données par Liouville dans son quatrième et dans son cinquième article. Mais il est plus intéressant de montrer par des exemples le parti que l'on peut tirer de ces formules. Liouville a considéré plus particulièrement les conséquences que l'on peut on déduire lorsqu'on égale $f(x)$ à une puissance paire de x, ou $F(x)$ à une puissance de degré impair. Il a aussi indiqué comme donnant des résultats intéressants plusieurs formules que l'on déduit des précédentes en prenant $f(x)=\operatorname{Cos} xt$. Ce sont ces dernières formules que je me propose d'étudier afin d'en déduire divers théorèmes concernant certaines formes quadratiques quaternaires. Mais pour obtenir ces

théorèmes nous devrons nous appuyer sur quelques propositions relatives à la représentations des nombres entiers par les formes quadratiques binaires de déterminant négatif.

CH. IV. *Expression analytique du nombre des représentations d'un nombre donné* m *par certaines formes quadratiques binaires.*

21. Jacobi a trouvé par la théorie des fonctions elliptiques que le nombre des décomposition du double d'un nombre donné impair m en deux carrés est égal à l'excès du nombre des diviseurs $4x+1$ de m sur le nombre de ses diviseurs $4x+3$. Dans ces décompositions les racines des deux carrés sont considérées comme positives, c'est pourquoi il faut quadrupler le nombre précédent pour obtenir le nombre des représentations de $2m$ par la forme x^2+y^2, ou bien, ce qui est la même chose, le nombre des solutions de l'équation

$$2m = x^2 + y^2$$

en nombres entiers x, y positifs ou négatifs. Si l'on désigne avec Liouville par $\rho(m)$ la somme $\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}$ relative à tous les diviseurs du nombre impair m, désignés indéfiniment par d, le nombre des décompositions de $2m$ en deux carrés impairs est égal à $\rho(m)$; le nombre des représentations de $2m$ par la forme $(1, 0, 1)$ est exprimé par $4\rho(m)$.

22. Ce Theorème de Jacobi n'est qu'un cas particulier d'un théorème démontré par Dirichlet dans ses *Recherches sur les applications de l'Analyse à la théorie des nombres* (*Journal de Crelle*, t. XXI, paragraphe VII). On le déduit des deux théorèmes suivants:

I. Si $D = P.S^2$, S^2 désignant le plus grand carré qui divise D, et que $\varpi(n)$ réprésente le nombre de toutes les solutions des congruences

$$x^2 \equiv D \pmod{n}, \quad x^2 \equiv D \left(\text{mod. } \frac{n}{e^2}\right), \quad x^2 \equiv D \left(\text{mod. } \frac{n}{e'^2}\right), \ldots,$$

dans lesquelles n est un nombre premier avec $2D$, dont tous les diviseurs carrés, autres que 1, sont e^2, e'^2, ..., le nombre $\varpi(n)$ est exprimé par la formule

$$\varpi(n) = \sum \left(\frac{P}{i}\right)$$

où $\left(\frac{P}{i}\right)$ est le symbole de Legendre généralisé par Jacobi, et la somme $\sum$ doit s'étendre à tous les diviseurs i de n.

II. Soient e^2, e'^2, e''^2,... tous les diviseurs carrés autres que 1, d'un nombre impair n, et désignons par $\varpi(n)$ le nombre de toutes les solutions diverses des congruences

$$x^2 \equiv D \pmod{n}, \quad x^2 \equiv D \left(\text{mod. } \frac{n}{e^2}\right), \quad x^2 \equiv D \left(\text{mod. } \frac{n}{e'^2}\right), \ldots;$$

Si D est négatif et différent de -1, le nombre des représentations de n par l'ensemble des formes qui représentent les diverses classes de l'ordre proprement primitif de déterminant D, sera $2\varpi(n)$; ce nombre sera $4\varpi(n)$, si $D = -1$. Si pour un déterminant négatif D, on désigne par Ω un système de formes représentant les diverses classes de l'ordre improprement primitif, le nombre des représentations de $2n$ par l'ensemble des formes Ω est $2\varpi(n)$, si D est différent de -3; il est égal à $6\varpi(n)$, si $D = -3$.

En réunissant ces deux propositions, on obtient la suivante, due à Dirichlet :

III. Si l'on désigne par Ω l'ensemble des formes quadratiques

$$(a, b, c), \quad (a', b', c'), \quad (a'', b'', c''), \ldots.$$

propres à représenter toutes les classes du même ordre primitif de déterminant négatif D, et par n un nombre impair, premier avec D, le nombre des représentations de n par les formes Ω est exprimé

$$\text{par } 2\sum\left(\frac{D}{i}\right) \text{ ou par } 4\sum\left(\frac{D}{i}\right),$$

suivant que D est < -1 ou $= -1$.

Le nombre des représentations de $2n$ par l'ensemble des formes Ω qui représentent l'ordre improprement primitif de déterminant D, est exprimé par la formule

$$2\sum\left(\frac{D}{i}\right)$$

si D est différent de -3, et par la formule

$$6\sum\left(\frac{D}{i}\right)$$

si $D = -3$.

Dans toutes ces formules $\left(\frac{D}{i}\right)$ est le symbole généralisé de Jacobi, $\sum$ désigne une somme dont les éléments correspondent à tous les diviseurs de n, représentés indéfiniment par i, enfin les deux nombres n et D sont premiers entre eux.

Lorsque D est de la forme PS^2, on a

$$\left(\frac{D}{i}\right)=\left(\frac{P}{i}\right)\left(\frac{S^2}{i}\right)=\left(\frac{P}{i}\right),$$

pour tout nombre impair i premier avec D.

23. Pour simplifier les formules que nous avons en vue, nous introduirons une fonction numérique définie par la formule

$$\varpi(m, -D)=\sum\left(\frac{D}{i}\right),$$

dans laquelle nous désignons par D un déterminant négatif, par m un nombre impair premier avec D, et par i un diviseur quelconque de m. Dans le cas particulier ou $D=-1$, la fonction $\varpi(m, 1)$ coïncide avec la fonction numérique $\rho(m)$ de Liouville; nous conserverons cette dernière fonction, et nous emploierons la formule $\varpi(m, -D)$ pour les autres valeurs de D.

Lorsque le déterminant D ne présente qu'une classe de formes quadratiques par genre, toutes les représentations du nombre m par les diverses formes Ω appartiennent à une seule de ces formes, savoir celle qui représente le genre caractérisé par le reste de la division du nombre m par $-4D$ ou par $-8D$, suivant la forme du nombre $-D$. Soit par exemple $D=-6$. Le déterminant -6 n'offre que deux genres représentés réspectivement par les deux formes x^2+6y^2, $2x^2+3y^2$. Un nombre impair m est représenté par la première forme ou par la seconde, suivant qu'il est de l'une des deux formes $24l+1$, $24l+7$, ou bien de l'une des deux formes $24l+5$, $24l+11$; pourvu toutefois qu'il soit diviseur de la formule u^2+6. Le nombre des représentation de m par l'une de ces forme est exprimé par la formule

$$2\varpi(m, 6)=2\sum\left(\frac{-6}{i}\right);$$

de plus $\varpi(m, 6)$ se réduit à zéro, lorsque le nombre m n'est pas diviseur de la formule u^2+6.

24. De même, quand $D=-1$, le système Ω se réduit à la forme x^2+y^2. L'expression $4\rho(m)$ donne le nombre des représentations de m par la somme de deux carrés. Elle exprime aussi le nombre des représentations du double de m par la même forme. Car les deux équations

$$2m = p^2 + q^2, \quad m = x^2 + y^2$$

admettent le même nombre de solutions; on passe de l'une à l'autre en posant $p = x + y$, $q = x - y$, et inversement

$$x = \frac{p+q}{2}, \quad y = \frac{p-q}{2}.$$

Chaque système de valeurs de x et de y détermine un système unique de valeurs de p et de q, et ces valeurs sont nécessairement impaires, puisque les deux nombres x, y sont, l'un pair et l'autre impair. Inversement chaque système de valeurs de p et de q détermine un systéme de valeurs entières des deux nombres x, y; car dans l'équation $2m=p^2+q^2$, les deux nombres p et q sont nécessairement impairs.

Il résulte de là que le nombre des décompositions du double d'un nombre impair m en une somme de deux carrés impairs est exprimé par $\rho(m)$; car à chaque décomposition correspondent quatre représentations, par les quatre combinaisons des signes des deux racines; le nombre des décompositions est donc le quart de celui des représentations; et comme ce dernier nombre est exprimé par $4\rho(m)$, le premier est exprimé par $\rho(m)$.

Le symbole $\left(\frac{-1}{i}\right)$ se réduit à $+1$ ou à -1 suivant que i est de la forme $4l+1$, ou de la forme $4l+3$; on peut donc le remplacer par $(-1)^{\frac{i-1}{2}}$. La fonction $\rho(m)$ exprime l'excès du nombre des diviseurs de m qui sont de la forme $4l+1$ sur le nombre de ceux qui sont de la forme $4l+3$. Nous retrouvons ainsi le théoréme de Jacobi, cité au commencement de ce Mémoire, comme cas particulier du Théorème de Dirichlet.

25. La même expression $4\rho(m)$ donne aussi le nombre des solutions de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2,$$

quel que soit l'exposant entier α, positif ou nul. Soit en effet λ l'exposant de la plus haute puissance de 2 qui divise en même temps x et y; si l'on pose $x = 2^\lambda u$, $y = 2^\lambda v$, on a

$$2^{\alpha-2\lambda}\, m = u^2 + v^2.$$

Comme l'un au moins des deux nombres u, v est impair, on ne peut faire que deux hypothèses: ou bien ils sont tous deux impairs, ou bien ils sont, l'un pair et l'autre impair. Dans ce dernier cas, on a $\alpha - 2\lambda = 0$; dans le premier, $\alpha - 2\lambda = 1$. L'équation proposée se ramène donc a l'une des équations

$$2m = x^2 + y^2, \quad m = x^2 + y^2.$$

Dans les deux cas le nombre des solutions de cettc équation est exprimé par $4\rho(m)$.

Le nombre des solutions de l'équation $m = x^2 + 4y^2$ est exprimé par $2\rho(m)$; car si l'on fait $D = -4$ dans le théorème III (n° 22), on trouve que le nombre des représentations de m par la forme $(1, 0, 4)$ est exprimé par $2\varpi(m, 4)$. Dailleurs en vertu de l'égalité

$$\left(\frac{-4}{i}\right) = \left(\frac{-1}{i}\right)\left(\frac{4}{i}\right) = \left(\frac{-1}{i}\right),$$

les deux fonctions $\varpi(m, 4)$ et $\varpi(m, 1) = \rho(m)$ sont égales; le nombre de ces représentations est donc exprimé par $2\rho(m)$.

Le même résultat s'obtient aussi par cette considération que toute solution de l'équation $m = x^2 + (2y)^2$, en donne deux de l'équation $m = u^2 + v^2$, par la permutation des deux carrés:

23. Soit $D = -2$. Ce déterminant ne présente qu'une seule classe de formes quadratiques, représentée par la forme $x^2 + 2y^2$. Le nombre des solutions de l'équation

$$(a) \qquad m = x^2 + 2y^2$$

est donc exprimé par la formule

$$2\varpi(m, 2) = 2\sum\left(\frac{-2}{i}\right) = 2\sum(-1)^{\frac{i^2-1}{8} + \frac{i-1}{2}}.$$

Cette fonction $\varpi(m, 2)$ exprime l'excès du nombre des diviseurs de m compris dans les deux formules $8l + 1$, $8l + 3$, sur le nombre de ceux qui sont compris dans les deux formules $8l + 5$, $8l + 7$.

La même expression donne aussi le nombre des solutions de l'équation

$$(b) \qquad 2^{\alpha} m = x^2 + 2y^2.$$

Si l'exposant α est >1, les deux nombres x, y sont pairs; soit donc λ l'exposant de la plur haute puissanre de 2 qui divise en même temps ces deux nombres, et posons

$$x = 2^{\lambda} p, \quad y = 2^{\lambda} q.$$

L'équation (b) se change en la suivante

$$2^{\alpha-2\lambda}\, m = p^2 + 2q^2,$$

dans laquelle l'un des deux nombres p, q est impair. Si p est impair on a $\alpha = 2\lambda$. Si p est pair, posons $p = 2r$; on a

$$2^{\alpha-2\lambda-1}\, m = q^2 + 2r^2,$$

et comme dans ce cas le nombre q est nécessairement impair, on a $\alpha=2\lambda+1$. Dans les deux cas, les solutions de l'équation (b) correspondent une à une à celles de l'équation (a). Par conséquent le nombre des représentations de $2^{\alpha}m$ par la forme $x^2 + 2y^2$ est égal à $2\varpi\,(m, 2)$, quelque soit l'exposant α.

27. Soit $D = -3$. L'Ordre proprement primitif pour le déterminant -3 se compose d'une seule classe représentée par la forme $x^2 + 3y^2$. Le théorème III revient donc à celui-ci: Le nombre des représentations d'un nombre impair m, non divisible par 3, par la forme $x^2 + 3y^2$ est égal à $2\varpi(m,3)$. De même, le nombre des représentations de $2m$ par la forme $2x^2 + 2xy + 2y^2$ est égal à $6\varpi\,(m, 3)$.

Il est facile d'exprimer le nombre des représentations d'un nombre entier quelconque n par la forme $x^2 + 3y^2$. Soit en effet $n = 2^{\alpha}, 3^{\beta}m$, m étant toujours premier avec 6. Supposons d'abord $\alpha = 0$. L'équation

$$3^{\beta}m = x^2 + 3y^2$$

exige que x soit divisible par 3; nous désignons par λ l'exposant de la plus haute puissance de 3 qui divise en même temps x et y, et nous posons $x = 3^{\lambda}p$, $y = 3^{\lambda}q$. L'équation proposée devient

$$3^{\beta-2\lambda}\, m = p^2 + 3q^2.$$

On conclut de là que le nombre des représentations de $3^{\beta}m$ par la forme $x^2 + 3y^2$ est le même que celui des représentations de m par la même forme; il est exprimé par $2\varpi\,(m, 3)$. On peut dire aussi que ce nombre est exprimé par

$$2\varpi\,(n, 3) = 2\sum\left(\frac{-3}{i}\right),$$

en étendant la somme $\sum$ à tous les diviseurs de n, désignés indéfiniment par i, mais à la condition de réduire à zéro la valeur du symbole $\left(\frac{-3}{i}\right)$ lorsque le nombre i n'est pas premier avec 3.

Soit $n = 2^\alpha m$. Les représentations de $2^\alpha m$ par les formes quadratiques de déterminant -2 appartiennent à l'ordre proprement primitif ou à l'ordre improprement primitif, suivant que α est pair ou impair. Dans les deux cas, si α est >0, le nombre des représentations de $2^\alpha m$ par la forme $x^2 + 3y^2$ ou par la forme $2x^2 + 2xy + 2y^2$ est égal à $6\varpi(m, 3)$. Soit d'abord $\alpha = 2$. Le nombre des représentations de $4m$ par la forme $(1, 0, 3)$ est le même que celui des représentations de $2m$ par la forme $(2, 1, 2)$; car à chaque solution de l'équation

$$2m = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

correspond une solution de l'équation

$$4m = (2x + y)^2 + 3y^2 = p^2 + 3q^2,$$

et réciproquement, à chaque solution de la dernière équation correspond une solution de la première par les formules

$$x = \frac{p-q}{2}, y = q,$$

car les deux nombres p, q sont toujours tous deux pairs ou tous deux impairs. On passe ensuite à une valenr quelconque de l'exposant α, en remarquant que les deux équations

$$2^{2\lambda+2}\, m = x^2 + 3y^2, \quad 2^{2\lambda+1}\, m = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

exigent que les deux nombres x, y soient divisibles en même temps par 2^λ.

Enfin lorsque le nombre m est divisible par 3, le nombre des représentations de $2^\alpha m$ par la forme $x^2 + 3y^2$ ou par la forme $2x^2 + 2xy + 2y^2$, suivant que α est pair ou impair, est égal à $2\varpi(m, 3)$, si $\alpha = 0$, et à $6\varpi(m, 3)$, si α est >0, mais à la condition de réduire à zéro le symbole $\left(\frac{-3}{i}\right)$ dans la formule

$$\varpi(m, 3) = \sum \left(\frac{-3}{i}\right),$$

lorsque i n'est pas premier avec 3.

28. Prenons encore $D = 6$. Tous les diviseurs de la formule $x^2 + 6$ sont représentés par l'une des deux formes (1, 0, 6), (2, 0, 3), et chacun de ces diviseurs par une seule d'entre elles. Le nombre des représentations de m par celle de ces deux formes qui lui convient, en supposant m premier avec 6, est égal à $2\varpi(m, 6)$. Cette même expression donne aussi le nombre des représentations de $2m$; car les deux équations

$$m = x^2 + 6y^2, \quad m = 2x^2 + 3y^2$$

entrainent respectivement les deux suivantes

$$2m = 2x^2 + 3(2y)^2, \quad 2m = (2x) + 6y^2.$$

Pour un nombre quelconque $n = 2^\alpha.3^\beta m$, le nombre des solutions de l'équation

$$n = 2^\alpha.3^\beta m = x^2 + 6y^2 \text{ ou } 2x^2 + 3y^2,$$

est encore exprimé par $2\varpi(m, 3)$. On le démontre en remarquant que si α et β sont supérieurs à l'unité, les deux nombres x et y sont nécessairement divisibles par 2 et par 3, de sorte que les représentations du nombre n par le système des deux formes (1, 0, 6), (2, 0, 3) se ramènent à celles de l'un des nombres m, $2m$, $3m$, $6m$. D'ailleurs les représentations des deux derniers nombres se ramènent à celles des deux premiers. Car si l'on a

$$3m = x^2 + 6y^2,$$

le nombre x doit être multiple de 3; posant donc $x = 3z$ et divisant par 3, on a

$$m = 2y^2 + 3z^2.$$

Inversement en multipliant par 3 tous les termes de la dernière équation on a

$$3m = (3z)^2 + 6y^2.$$

Par conséquent les deux équations admettent le même nombre de solutions.

Le nombre des représentions de $2^\alpha.3^\beta m$ par celle des deux formes (1, 0, 6), (2, 0, 3) qui lui convient, est égal à $2\varpi(m, 6)$. On peut aussi l'exprimer par la formule

$$2\varpi(3^\beta m, 6) = 2\sum \left(\frac{-6}{i}\right)$$

dans laquelle on désigne indéfiniment par i tous les diviseurs de $3^\beta m$, en convenant de réduire à zéro le symbole $\left(\frac{-6}{i}\right)$ lorsque le nombre i n'est pas premier avec 6.

CH. V. *Application des formules précédentes à quelques formes quadratiques quaternaires.*

29. On obtient des résultats intéressants relativement à plusieurs formes quadratiques quaternaires, en faisant $f(x) = \cos xt$ dans les formules générales formées au moyen d'une fonction paire $f\ (x)$ de la seule variable x. Dans toutes ces formules on aura

$$f(a-b) - f(a+b) = 2 \sin at.\ \sin bt,$$

$$f(a-b) + f(a+b) = 2 \cos at.\ \cos bt,$$

de sorte que dans la somme triple du premier membre, les intégrations relatives aux deux équations $m' = a\alpha$, $m'' = b\beta$ se trouvent séparées. La transformation du second membre varie suivant la formule considérée. Dans les formules (A) et (a), la différence

$$f(0) - f(2dt) \text{ ou } f(0) - f(2^\lambda dt)$$

devient

$$2 \sin^2 dt \text{ ou } 2 \sin^2.\ 2^{\lambda-1}\, dt.$$

Ces deux formules se réduisent donc aux deux suivantes :

$$(1) \qquad \sum \left[\sum \sin at.\ \sum \sin bt\right] = \sum d.\ \sin^2 dt,\quad m = d\delta,$$

$$(2) \qquad \sum \left[\sum \sin at.\ \sum \sin bt\right] = 2^{\lambda-1} \sum d \sin^2 (2^{\lambda-1}\, dt),$$

dont la première se rapporte aux solutions des équations

$$2m = m' + m'',\ m' = a\alpha,\ m'' = b\beta,$$

et la deuxième, à celles des trois suivantes

$$2^\lambda m = m' + m'',\ m' = a\alpha,\ m'' = b\beta.$$

Dans toutes ces équations, les nombres m', m'', a, α, b, β, sont impairs et positifs. La première formule se déduit de la deuxième en faisant $\lambda = 1$.

30. Dans les formules (D), (F) et (I) la triple somme du premier membre correspond aux divers systèmes de solutions des trois équations

$$m = m_1 + 2^i m_2,\ m_1 = a\alpha,\ m_2 = b\beta,$$

et le second membre, aux diverses décompositions $m = d\delta$ du nombre im-

pair m en deux facteurs. Le second membre de la formule (D) dépend de la somme

$$1 + 2\cos 2t + 2\cos 3t + \ldots + 2\cos(\delta - 1)t = \frac{\sin\delta t}{\sin t}.$$

Dans les autres formules, la transformation n'offre pas de difficulté. On trouve ainsi les formules suivantes:

$$(3)\qquad 4\sum\left[\sum \sin at.\ \sum\sin bt\right] = \zeta_1(m) - \sum\frac{\sin\delta t}{\sin t}$$

$$(4)\qquad 4\sum\left[\sum \sin at.\ \sum \sin 2^{\nu} bt\right] = \sum(\delta - d)\cos dt,$$

$$(5)\qquad 4\sum\left[\sum(-1)^{\frac{a-1}{2}}\cos\alpha t.\ \sum(-1)^{\frac{b-1}{2}}\cos 2^{\nu}\beta t\right] = \sum\left(d - (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\right)\cos dt.$$

Enfin la même substitution ramène les formules (G) et (J) aux deux suivantes :

$$(6)\qquad 2\sum\left[\sum \sin 2^{\mu} at.\ \sum \sin 2^{\nu} at\right] = (2^{\lambda} - 1)\,\zeta_1(m) + \sum(\delta - 2^{\lambda} d)\cos(2^{\lambda} dt).$$

$$(7)\qquad 2\sum\left[\sum\sin at.\ \sum\sin bt\right] = 2^{\lambda}\,\zeta_1(m) - \frac{\sum\sin\delta t}{\sin t} -$$

$$\sum d\left[\cos 2dt + 2\cos 4dt + 4\cos 8dt + \ldots + 2^{\lambda-1}\cos(2^{\lambda} dt)\right].$$

Les premiers membres des deux dernières formules se rapportent aux divers systèmes de solutions des trois équations

$$2^{\lambda} m = 2^{\mu} m' + 2^{\nu} m'',\quad m' = a\alpha,\quad m'' = b\beta,$$

en nombres impairs et positifs m', m'', a, α, b, β; les exposans μ, ν sont des nombres entiers, positifs ou nuls, pairs ou impairs. Pour chaque partition du nombre donné $2^{\lambda} m$ en deux parties entières et positives $2^{\mu} m'$, $2^{\nu} m''$, les sommes

$$\sum \sin 2^{\mu} at,\ \sum \sin at$$

correspondent aux diverses solutions de l'équation $m' = a\alpha$, et les sommes

$$\sum \sin 2^{\nu} bt,\ \sum \sin bt$$

à celles de l'équation $m'' = b\beta$.

31. Faisons d'abord $t = \frac{\pi}{2}$ dans la formule (1). On a

$$\sin at = \sin a\frac{\pi}{2} = (-1)^{\frac{a-1}{2}}.$$

Posant donc, suivant la notation expliquée précédemment (n° 24).

$$\rho(m') = \sum(-1)^{\frac{a-1}{2}}, \quad \rho(m'') = \sum(-1)^{\frac{b-1}{2}}$$

on obtient la formule suivante

$$(a) \qquad \sum \rho(m).\,\rho(m'') = \sum d = \zeta_1(m).$$

Pour chaque partition de $2m$ en deux parties impaires m', m'', le produit $\rho(m')\,\rho(m'')$ exprime le nombre de toutes les décompositions de $4m$ en quatre carrés impairs, dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est égale à $2m'$ et la somme des deux autres, à $2m''$. Le premier membre de la formule précédente exprime donc le nombre de toutes les décomposition de $4m$ eu une somme de quatre carrés impairs. Cette formule est donc l'expression analytique du théorème de Jacobi:

Le nombre des décompositions du quadruple d'un nombre impair m en quatre carrés impairs est égal à la somme des diviseurs de m.

En multipliant la formule (a) par 4 on trouve

$$(b) \qquad \sum 2\rho(m').\,2\rho(m'') = 4\zeta_1(m).$$

Nous avons vu que le nombre des représentations d'un nombre impair m par la forme x^2+4y^2 est exprimé par $2\varpi(m, 4) = 2\rho(m)$ (n° 25). Le premier membre de la formule (b) est donc égal au nombre des solutions de l'équation

$$(8) \qquad 2m = x^2 + 4y^2 + z^2 + 4v^2;$$

par conséquent la formule (b) exprime ce théorème:

Le nombre des représentations du double d'un nombre impair m *par la fosme* $x^2+y^2+4z^2+4v^2$ *est égal à quatre fois la somme des diviseurs de* m.

En multipliant par 16 les deux membres de l'équation (a) on trouve

$$\sum 4\rho(m').\,4\rho(m'') = 16\zeta_1(m).$$

Or, pour tout nombre impair m, le nombre des représentations de m par une somme de deux carrés est $4\rho(m)$. Par conséquent le produit

$$4\rho(m').\,4\rho(m'')$$

exprime le nombre des représentations de $2m$ par la somme de quatre carrés, dont les deux premiers forment une somme égale au nombre impair m'. La somme de tous les produits semblables, qui correspondent aux valeurs successives $1, 3, 5, \ldots 2m-1$ de m', exprime donc le nombre de toutes les représentations de $2m$ par une somme de quatre carrés, dont les deux premiers forment une somme impaire, ainsi que les deux derniers. Notre formule exprime que le nombre de ces représentations est égal à 16 fois la somme des diviseurs de m.

32. Dans la même formule (1), faisons $t = \frac{\pi}{4}$. En ayant égard aux formules

$$\sin\frac{a\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{\frac{a^2-1}{8}+\frac{a-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-2}{a}\right), \quad \sum\left(\frac{-2}{a}\right) = \varpi\,(m', 2),$$

On obtient la formule suivante

$$\sum \varpi\,(m', 2).\ \varpi\,(m'', 2) = \sum d = \zeta_1\,(m),$$

$$\sum 2\varpi\,(m', 2).\ 2\varpi\,(m'', 2) = 4\zeta_1\,(m),$$

Comme $2\varpi\,(m', 2)$ et $2\varpi\,(m'', 2)$ expriment respectivement les nombres des représentations de m' et de m'' par la forme $x^2 + 2y^2$, le premier membre de la dernière formule exprime le nombre des solutions de l'équation

$$(9) \qquad 2m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2$$

dans lesquelles x et y ont des valeurs impaires. Notre formule exprime que le nombre de ces solutions est égal à quatre fois la somme des diviseurs de m. Ce n'est pas le nombre de toutes les solutions; car outre celles dont nous venons de parler, l'équation (9) en admet d'autres dans lesquelles x et y ont des valeurs paires; celles-ci correspondent aux solutions de l'équation

$$(10) \qquad m = z^2 + t^2 + 2u^2 + 2v^2,$$

par les formules $x = 2u$, $y = 2v$.

La même substitution $t = \frac{\pi}{4}$ dans la formule (2) donne

$$\sum \varpi(m', 2)\ \varpi(m'', 2) = 2\zeta_1\,(m) \text{ ou } 0,$$

suivant que λ est égal à 2 ou supérieur à 2. On conclut de là que le nombre des solutions de l'équation

$$(11) \qquad 4m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2,$$

dans lesquelles les nombres x et y sont impairs, est égal à huit fois la somme des diviseurs de m, et que l'équation

$$2^{i+2}\, m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2$$

n'admet aucune solution dans laquelle x et y soient des nombres impairs, lorsque le nombre i est positif.

Ce dernier résultat peut se prévoir à priori; car dans la partition

$$2^{i+2}\, m = m' + m'',$$

si i est >0, l'un des deux nombres m' ou m'' est toujours de l'une des deux formes $8l+5$ ou $8l+7$; or aucun nombre de l'une de ces deux formes n'est représenté par la forme $x^2 + 2y^2$. Par conséquent, pour toutes les solutions de la dernière équation en nombres impairs et positifs m', m'', l'un des deux facteurs $\varpi(m', 2)$ ou $\varpi(m'', 2)$ se réduit à zéro.

33. En faisant $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{4}$ dans la formule (3), on obtient les deux formules suivantes:

$$(a) \qquad 4\sum \rho(m_1)\, \rho(m_2) + \rho(m) = \zeta_1(m)$$

$$(b) \qquad 2\sum \varpi(m_1, 2).\ \varpi(m_2, 2) + \varpi(m, 2) = \zeta_1(m).$$

Le produit $4\rho(m_1).\ 4\rho(m_2)$ exprime le nombre des solutions de l'équation

$$(12) \qquad m = x^2 + y^2 + 2^i (z^2 + t^2), \quad i > 0,$$

dans lesquelles la somme des deux premier carrés est égale à m_1. Par conséquent la somme

$$\sum 4\rho(m_1).\ 4\rho(m_2)$$

exprime le nombre des solutions de l'équation (12) dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est un nombre impair, inférieur à m. Si l'on ajoute à ce nombre celui des solutions dans lesquelles $x^2 + y^2 = m$, savoir $4\rho(m)$, on obtient le nombre de toutes les solutions de l'équation (12), et la formule (a) exprime que ce nombre est égal à $4\zeta_1(m)$.

Dans le cas où le nombre m est de la forme $4n+3$, le nombre i est constamment égal à 1; car m_1 étant de la forme $4l+1$, $m - m_1 = 2^i m_2$ est de la forme $4l+2$. Dans ce cas l'équation (a) exprime le théorème suivant:

Le nombre des solutions de l'équation

$$(13)\qquad m = 4n + 3 = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

est égal à quatre fois la somme des diviseurs du nombre m.

Dans le même cas où $m = 4n + 3$, l'équation (a) mise sous la forme suivante:

$$(a)\qquad \sum 2\rho(m_1).\ 2\rho(m_2) = \zeta_1(m),$$

exprime que:

Le nombre des solutions de l'équation

$$(14)\qquad m = 4n + 3 = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2$$

est égal à la somme des diviseurs de m.

Car $2\rho(m_1)$ exprime le nombre des représentations de m_1 par la forme $(x^2 + 4z^2)$; par conséquent le produit $2\rho(m_1).\ 2\rho(m_2)$ exprime le nombre des solutions de l'équation (14), dans lesquelles $x^2 + 4z^2 = m_1$ et $y^2 + 4t^2 = m_2$; la somme de tous les produits semblables, qui correspondent aux valeurs 1, 5,... $m - 2$, de m_1, c'est-à-dire le premier membre de la formule (a'), exprime le nombre de toutes les solutions de l'équation (14).

34. La formule (a) peut encore s'interpréter d'une autre manière et donner le nombre des représentations d'un nombre impair quelconque m par la somme de quatre carrés. En effet, ces représentations peuvent se partager en trois groupes, celles où les deux premiers carrés sont nuls, celles où les deux derniers carrés sont nuls, et enfin celles où la somme des deux premiers carrés est positive ainsi que celle des deux derniers. Or le nombre des représentations comprises dans chacun des deux premiers groupes est égal à celui des représentations de m par la somme de deux carrés; il est exprimé par $4\rho(m)$, et le nombre des termes des deux groupes, par $8\rho(m)$. Le nombre des représentations du troisième groupe est le double du nombre de celles dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est un nombre impair, inférieur à m; car à chacune de ces dernières représentations il en correspond une autre dans laquelle la somme des deux premiers carrés est un nombre pair; ces deux représentations se déduisent l'une de l'autre en échangeant les deux derniers carrés avec les deux premiers, sans altérer autrement l'ordre de ces carrés. D'ailleurs le nombre des représentations de m par une somme de quatre carrés dont les deux

premiers forment une somme impaire, inférieure à m, est exprimé par la somme

$$\sum 4\rho(m_1).\ 4\rho\ (m_2)$$

étendue à toutes les solutions de l'équation $m = m_1 + 2^i m_2$, en nombres impairs et positifs m_1, m_2; car le produit $4\rho(m_1).4\rho\ (m_2)$ exprime le nombre de toutes les combinaisons possible des solutions des deux équations

$$m_1 = x^2 + y^2, \quad 2^i m_2 = z^2 + t^2;$$

la somme de tous les produits semblables est donc égale au nombre des solutions de l'équation

$$(15) \qquad m = 2l + 1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

dans lesquelles la somme $x^2 + y^2$ est un nombre impair, inférieur à m. Le double de cette somme est égal au nombre de toutes les solutions de l'équation (15) dans lesquelles $x^2 + y^2$ et $z^2 + t^2$ sont > 0.

Par conséquent le nombre de toutes les solutions de l'équation (15) est égal à

$$8\rho(m) + 2\sum 4\rho(m_1).\ 4\rho(m_2) = 8\zeta_1\ (m):$$

Le nombre des représentations d'un nombre impair quelconque m *par une somme de quatre carrés, à racines positives, négatives ou nulles, est égal à huit fois la somme des diviseurs de* m.

35. L'interprétation dc la formule (*b*) n. 33, repose sur ce fait démontré plus haut (n.° 26), que le nombre des représentations de $2^\alpha m$ par la forme (1, 0, 2) est exprimé par $2\varpi\ (m, 2)$, quel que soit l'exposant entier α, nul ou positif. Le produit $2\varpi(m_1, 2).\ 2\varpi(m_2, 2)$ exprime le nombre de toutes les combinaisons de chacune des solutions de l'équatiou $m_1 = x^2 + 2y^2$, avec chacune des solutions de l'une des deux équations $m_2 = z^2 + 2t^2$ ou $2^i m_2 = z^2 + 2t^2 = 2t^2 + 4u^2$. La somme de tous les produits semblables est donc égale au nombre des solutions soit de l'équation

$$(16) \qquad m = x^2 + 2y^2 + 2^i\ (z^2 + 2t^2),\ i > 0$$

soit de l'équation

$$(17) \qquad m = x^2 + 2y^2 + 2t^2 + 4u^2,$$

dans lesquelles $x^2 + 2y^2$ est $< m$. On aura le nombre de toutes les solu-

tions de chacune de ces deux équations en ajoutant le nombre $2\varpi(x, 2)$ des solutions dans lesquelles $x^2 + 2y^2 = m$. La formule (*b*) multipliée par 2, exprime que le nombre de ces solutions est égal à $2\zeta_1(m)$.

36. En faisant $t = \frac{\pi}{4}$ dans la formule (4), on a

$$4\sum\left[\sum \sin a\frac{\pi}{4}.\ \sum \sin\frac{2^i b\pi}{4}\right] = \sum(\delta - d)\cos\frac{d\pi}{4}.$$

Comme le facteur $\sin\left(\frac{2^i b\pi}{4}\right)$ s'évanouit pour toute valeur entière de i supérieure à 1, il suffit de considérer les équations

$$m = m_1 + 2m_2,\ m_1 = a\alpha,\ m_2 = b\beta.$$

Or on a

$$\sin\frac{a\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-2}{a}\right),\ \operatorname{Cos}\frac{d\pi}{4} = \frac{(-1)^{\frac{d^2-1}{8}}}{\sqrt{2}},\ \sin\frac{2b\pi}{4} = (-1)^{\frac{b-1}{2}},$$

$$\sum\sin\frac{a\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\ \varpi(m_1, 2),\ \sum\sin\frac{2b\pi}{4} = \rho(m_2).$$

La formule précédente devient donc

$$4\sum \varpi(m_1, 2).\ \rho(m_2) = \sum(\delta - d)\ (-1)^{\frac{d^2-1}{8}},\ d\delta = m.$$

Comme l'équation $m = d\delta$ est symétrique par rapport aux deux lettres d, δ, on a

$$\sum\delta\,(-1)^{\frac{d^2-1}{8}} = \sum d\,(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}},$$

de sorte que notre formule peut s'écrire

$$(c)\qquad \sum 4\rho\,(m_2)\ 2\varpi(m_1, 2) = 2\sum d\left((-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} - (-1)^{\frac{d^2-1}{8}}\right).$$

Le premier membre de cette formule s'interprète de la manière suivante. Pour chaque solution de l'équation $m = m_1 + 2m_2$ en nombres impairs et positifs, le produit $4\rho(m_2).\,2\varpi(m_1, 2)$ exprime le nombres de toutes les combinaisons possibles d'une solution de l'équation $2m_2 = x^2 + y^2$, avec une solution de l'équation $m_1 = z^2 + 2t^2$; ce nombre est évidemment égal à celui des solutions de l'équation

$$(18)\qquad m = i^2 + i_1^2 + i_2^2 + 2t^2$$

dans lesquelles les trois premiers carrés sont impairs et les deux premiers forment une somme égale à $2m_2$. La somme de tous les produits semblables qui correspondent aux valeurs 2, 4, 6, ... $m-1$ de $2m_2$, exprime le nombre de toutes les solutions de l'équation (18), qui correspondent à des valeurs impaires des trois premiers carrés.

Si l'on considère $4\rho(m_2)$ comme représentant le nombre des solutions de l'équation $m_2 = x^2 + y^2$, le premier membre de l'équation (c) exprime le nombre des solutions de l'équation

$$(19). \qquad m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2,$$

dans lesquelles la somme $y^2 + z^2$ est un nombre impair m_2.

On reconnaît immédiatement que les deux formes (18) et (19), eu égard aux restrictions énoncés, ne peuvent convenir qu'à des nombres de l'une des deux formes $8l+3$, $8l+5$. Au besoin on en serait averti par le second membre de la formule (c) qui se réduit à zéro, lorsqu'on suppose $m = 8n \pm 1$. Dans ce cas, en effet, les deux facteurs d, δ sont compris dans la même forme $8l+\alpha$, si $m = 8n+1$, on dans deux formes opposées $8l+\alpha$, $8l-\alpha$, si $m = 8n-1$. Dans l'un et l'autre cas on a

$$(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{d^2-1}{8}},$$

et le second membre de la formule (c) s'évanouit.

Au contraire, lorsque le nombre m est compris dans la formule $8l \pm 3$, l'un des deux facteurs d, δ est compris dans la même formule, et l'autre, dans la formule $8l \pm 1$. Dans ce cas, on a

$$\frac{\delta^2-1}{8} \equiv \frac{d^2-1}{8} + 1 \quad (\text{mod. } 2),$$

et la formule (c) devient

$$(c') \qquad \sum 2\varpi\,(m_1, 2).\, 4\rho(m_2) = 4\sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d.$$

Le second membre de cette formule est égal à quatre fois l'excès de la somme des diviseurs de m compris dans la formule $8l \pm 3$ sur le nombre de ceux qui sont compris dans la formule $8l \pm 1$. Par conséquent la formule (c') appliquée à l'équation (18) exprime ce théorème:

Le nombre des représentations d'un nombre impair $m = 8n \pm 3$ *par la*

somme de trois carrés impairs plus le double d'un quatrième carré pair ou impair, est égal à quatre fois l'excès de la somme des diviseurs $8l \pm 3$ *de* m *sur la somme de ses diviseurs* $8l \pm 1$.

37. Si l'on considère $2\rho\,(m_2)$ comme exprimant le nombre des représentations de m_2 par la forme $z^2 + 4t^2$, la somme $\sum 2\varpi\,(m_1,\,2).2\rho\,(m_2)$ exprime le nombre des solutions de l'équation

$$(20) \qquad m = x^2 + 2y^2 + 2\,(z^2 + 4t^2),$$

dans lesquelles z est un nombre impair; la formule (c') exprime que le nombre de ces solutions est égal à $2\sum d\,(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}$.

Si $m = 8l + 5$, les deux carrés y^2 et z^2 sont tous deux impairs, dans ce cas l'expression précédente donne le nombre de toutes les solutions de l'éqnation

$$(21). \qquad 8l + 5 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 8t^2.$$

Si $m = 8l + 3$, l'équation

$$(22). \qquad 9l + 3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2,$$

exige que l'un des deux carrés y^2, z^2 soit pair et l'autre impair; mais on peut permuter entre eux ces deux carrés, tandis que dans l'équation (20) le carré impair multiplié par 2 doit former le troisième terme. Le nombre des solutions de l'équation (22) est donc double de celui des solutions de l'équation (20); par conséquent il est exprimé par la formule

$$4\sum d\,(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}.$$

38. En faisant $t = \frac{\pi}{4}$ dans la formule (6) et en ayant égard aux formules suivantes:

$$\text{Cos}\,\frac{\alpha\pi}{4} = \left(\frac{2}{\alpha}\right)\frac{1}{\sqrt{2}},\quad (-1)^{\frac{a-1}{2}} = \left(\frac{-1}{a}\right) = \left(\frac{-1}{m_1}\right)\left(\frac{-1}{\alpha}\right),$$

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}}\,\text{Cos}\,\frac{\alpha\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1)^{\frac{m_1-1}{2}}\left(\frac{-2}{\alpha}\right),$$

on trouve

$$4\sum\left((-1)^{\frac{m_1-1}{2}}\,\varpi\,(m_1,\,2)\,\sum(-1)^{\frac{m_2-1}{2}}(-1)^{\frac{\beta-1}{2}}\,\text{Cos}\,\frac{2^i\beta\pi}{4}\right) = \sum\left(d - (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\right)\left(\frac{2}{d}\right)$$

Le facteur Cos $\frac{2^i\beta\pi}{4}$ se réduit à 0, à -1 ou à $+1$, suivant que l'on a $i=1$, $i=2$ ou $i>2$. Par conséquent dans l'équation

$$m = m_1 + 2^i m_2$$

on doit négliger toutes les solutions dans lesquelles $i=1$. De même on doit omettre les solutions dans lesquelles m_1 est de l'une des deux formes $8l+5$ ou $8l+7$, parce que les valeurs correspondantes du facteur $\varpi(m_1, 2)$ s'évanouissent. Enfin on ne doit pas non plus tenir compte des solutions dans lesquelles m_2 serait de la forme $4l+3$, car la somme

$$\sum(-1)^{\frac{\beta-1}{2}} \operatorname{Cos}\left(\frac{2^i\beta\pi}{4}\right) = \operatorname{Cos}\frac{2^i\pi}{4} \sum(-1)^{\frac{\beta-1}{8}} = \operatorname{Cos}\frac{2^i\pi}{4}\, \rho(m_2)$$

se réduit alors à zéro; on a donc $(-1)^{\frac{m_2-1}{2}} = 1$.

Si $m = 4n+1$, on ne peut donner à m_1 aucune valeur de la forme $4l+3$, parce qu'alors la différence $m - m_1$ serait de la forme $4l+2$ et l'on aurait $i=1$. D'un autre côté les deux facteurs d, δ vérifient la condition $\frac{d-1}{2} \equiv \frac{\delta-1}{2}$ (mod. 2), par conséquent $(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{2}{d}\right) = (-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{2}{d}\right) = \left(\frac{-2}{d}\right)$. Dans ce cas notre formule prend la forme suivante

$$(d) \qquad 4\sum\varpi(m_1, 2).\, \operatorname{Cos}\frac{2^i\pi}{4}\, \rho(m_2) + \varpi(m, 2) = \sum d\, (-1)^{\frac{d^2-1}{8}}.$$

Si $m = 4n+3$, le nombre m_1 doit être de la même forme de sorte que $(-1)^{\frac{m_1-1}{2}} = -1$ pour toutes les solutions que nous avons à considérer. D'un autre côté on a $(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} = -(-1)^{\frac{d-1}{2}}$; par conséquent notre formule changée de signe, eu égard aux égalités $\left(\frac{2}{d}\right) = (-1)^{\frac{d^2-1}{8}}$, $(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{2}{d}\right) = \left(\frac{-2}{d}\right)$, devient

$$(d') \qquad 4\sum\varpi(m_1, 2).\, \operatorname{Cos}\frac{2^i\pi}{4}\, \rho(m_2) + \varpi(m, 2) = -d\sum(-1)^{\frac{d^2-1}{8}}$$

Les deux formules peuvent se réunir en une seule, savoir

$$(2) \qquad 2\varpi(m, 2) + \sum 2\varpi(m_1, 2).\, 4\rho(m_2)\, \operatorname{Cos}\frac{2^i\pi}{4} = 2\,(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum d(-1)^{\frac{d^2-1}{8}}$$

Le premier membre se rapporte à toutes les solutions de l'équation

$$m = m_1 + 2^i m_2$$

en nombres impairs et positifs m_1, m_2, et le second, à celles de l'équation $m = d\delta$. Pour interpréter le premier membre, nous distinguerons les diverses valeurs de m relativement au module 8.

39. Soit $m = 8n + 1$. Le nombre m_1 doit être de même forme, par conséquent la différence $m - m_1 = 2^i m_2$ est divisible par 8; on a $i > 2$ et $\operatorname{Cos} \frac{2^i \pi}{4} = 1$. En même temps les deux facteurs d, δ vérifient la condition $\frac{d^2 - 1}{8} = \frac{\delta^2 - 1}{8}$; la formule (e) devient donc

$$(e') \quad 2\varpi(8l + 1, 2) + \sum 2\varpi(m_1, 2)\, 4\rho(m_2) = 2\sum d(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} = 2\sum d(-1)^{\frac{d^2-1}{8}}.$$

Le premier membre de cette formule exprime le nombre des solutions de l'équation

$$(23) \qquad m = 8l + 1 = x^2 + 2y^2 + 4(z^2 + t^2);$$

car le premier terme $2\varpi(8l + 1, 2)$ exprime le nombre de celles dans lesquelles les deux derniers carrés sont nuls, et le second terme, le nombre de toutes les autres solutions. Donc

Le nombre des solutions de l'équation (23) *est égal à deux fois l'excès de la somme des diviseurs* $8h \pm 1$ *de* m *sur la somme de ses diviseurs* $8h \pm 3$.

Soit $m = 8n + 5$. Le nombre m_1 doit être encore de la forme $8h \pm 1$, et l'on a $i = 2$, $\operatorname{Cos} \frac{2^i \pi}{4} = -1$. Mais en même temps $\varpi(m, 1)$ s'évanouit et les deux facteurs d, δ vérifient la congruence $\frac{d^2 - 1}{8} \equiv \frac{\delta^2 - 1}{8} + 1 \pmod{2}$. La formule (e) changée de signe devient donc

$$(e''). \qquad \sum 2\varpi(m_1, 2) \cdot 4\rho(m_2) = 2\sum d(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}.$$

Elle exprime ce théorème:

Le nombre des solutions de l'équation

$$(24). \qquad m = 8n + 5 = x^2 + 2y^2 + 4(z^2 + t^2)$$

est égal à deux fois l'excès de la somme des diviseurs de m *compris dans la formule* 8h ± 3 *sur la somme de ceux qui sont de la forme* 8h ± 1.

Soit $m = 8l + 3$. Le nombres m_1 doit être de même forme, de sorte que la différence $m - m_1$ est divisible par 8, on a $i > 2$ et $\mathrm{Cos}\frac{2^i\pi}{4} = 1$. On a en même temps $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = -1$ et $(-1)^{\frac{d^2-1}{8}} = -(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}$;

$$(e'') \qquad m = 8n + 3, \quad 2\varpi(m_1\, 2) + \sum 2\varpi(m_1,\, 2)\; 4\rho(m_2) = 2\sum d\,(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}.$$

En considérant $4\rho(m_2)$ comme expriment le nombre des solutions de chacune des deux équations

$$2^{i-2}\, m_2 = z^2 + t^2,\; 2^{i-3}\, m_2 = z^2 + t^2,$$

on deduit de la formule (e'') que:

Le nombre des solutions de l'équation

$$(25). \qquad m = 8n + 3 = x^2 + 2y^2 + 4(z^2 + t^2),$$

comme celui des solutions de l'équation

$$(26). \qquad m = 8n + 3 = x^2 + 2y^2 + 8(z^2 + t^2),$$

est égal à deux fois l'excès de la somme des diviseurs 8h ± 3 *de* m, *sur la somme de ses diviseurs* 8h ± 1.

Soit enfin $m = 8n + 7$. On a $\varpi(m, 2) = 0$, $\frac{d^2-1}{8} \equiv \frac{\delta^2-1}{8}$ (mod. 2). D'ailleurs m_1 étant de la forme $8l + 3$, la différence $m - m_1$ est de la forme $8h + 4$. On a donc $i = 2$, $\cos\frac{2^i\pi}{4} = -1$; l'équation (e) changée de signe devient donc

$$(e'''') \qquad \sum 2\varpi(m_1,\, 2)\,.\,4\rho(m_2) = \sum d(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}},$$

et elle exprime le théorème suivant:

Le nombre des solutions de l'équation

$$(27). \qquad m = 8n + 7 = x^2 + 2y^2 + 4\,(z^2 + t^2)$$

est égal à deux fois l'excès de la somme des diviseurs $8h \pm 1$ *de* m *sur la somme de ses diviseurs* $8h \pm 3$.

Nous reviendrons sur les résultats précédents pour en déduire diverses conséquences relatives aux formes quadratiques $x^2+y^2+z^2+2t^2$, $x^2+2y^2+2z^2+2t^2$; pour le moment, nous nous bornons aux conséquences immédiates des formules.

40. Si l'on fait $t=\frac{\pi}{2}$ dans la formule (7), le premier membre devient

$$2\sum\rho(m')\,\rho(m''),\quad (2^\lambda m = 2^\alpha m' + 2^\beta m'').$$

Le coefficient de d dans le dernier terme du second membre est, en supposant $\lambda > 0$,

$$\text{Cos}\,\pi + 2\,\text{Cos}\,2\pi + 4\,\text{Cos}\,4\pi + \ldots + 2^{\lambda-1}\,\text{Cos}\,2^{\lambda-1}\pi = 2^\lambda - 3.$$

On déduit donc de la formule (7) multipliée par 8.

$$2.\,4\rho(m) + \sum 4\rho(m')\,4\rho(m'') = 24\zeta_1(m).$$

Le premier membre exprime le nombre des solutions de l'équation

$$2^\lambda m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \tag{27}$$

pour toute valeur entière et positive de λ. Car le nombre des solutions dans lesquelles les deux premiers carrés satisfont à la double inégalité

$$0 < x^2 + y^2 < 2^\lambda m$$

est exprimé par la somme $\sum 4\rho(m').\,4\rho(m'')$. Pour obtenir le nombre de toutes les solutions, il faut ajouter le nombre de celles qui satisfont soit à l'équation $x^2+y^2=0$, soit à l'équation $x^2+y^2=2^\lambda m$. Chacun de ces deux nombres est égal à celui des représentations de $2^\lambda m$ par une somme de deux carrés, c'est-à-dire à $4\rho(m)$; par conséquent le terme $2.4\,\rho(m)$ exprime le nombre des solutions de l'équation (27) dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est nulle ou égale à $2^\lambda m$. Notre formule exprime donc ce théorème de Jacobi:

Le nombre des représentations d'un nombre pair 2^λm *par la somme de quatre carrés est égal à vingt quatre fois la somme des diviseurs impairs de ce nombre* 2^λm.

41. En posant $t = \frac{\pi}{4}$ dans la formule (7), on trouve

$$\sum \varpi (m', 2)\, \varpi (m'', 2) = 2^{\lambda} \zeta_1 (m) - \varpi (m, 2) - \sum d\, (-2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{\lambda-1}).$$

ou bien

$$\sum \varpi (m', 2).\ \varpi (m'', 2) = 2\zeta_1 (m) - \varpi (m, 2),$$

suivant que λ est égal à 1 ou supérieur à 1. Quand $\lambda = 2$, le coefficient de d est $-2 = 2^2 - 6$. Quand λ est > 2, la somme $-2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{\lambda-1}$ est égale à $2^{\lambda} - 6$.

On a donc

$$(f) \qquad \varpi (m, 2) + \sum \varpi (m', 2)\, \varpi (m'', 2) = 2\zeta_1 (m), \text{ si } \lambda = 1,$$

$$(f') \qquad \varpi (m, 2) + \sum \varpi (m', 2)\, \varpi (m'', 2) = 6\zeta_1 (m), \text{ si } \lambda \text{ est} > 1.$$

La formule $\quad 4\varpi (m, 2) + \sum 2\varpi (m', 2).\ 2\varpi (m'', 2)$

exprime le nombre des solutions de l'équation

$$(28). \qquad 2^{\lambda} m = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2t^2;$$

car le premier terme $2.\ 2\varpi (m, 2)$ exprime le nombre de celles dans lesquelles on a $x = y = 0$, ou bien $z = t = 0$; et le second terme donne le nombre de celles dans lesquelles le deux sommes $x^2 + 2y^2$, $z^2 + 2t^2$, sont respectivement égales à deux nombres entiers et positifs $2^{\mu} m'$, $2^{\nu} m''$ dont la somme est égale à $2^{\lambda} m$. Les formules (f) et (f') multipliées par 4 expriment donc le théorème suivant:

Le nombre des solutions de l'équation

$$(28). \qquad 2^{\lambda} m = x^2 + y^2 + 2\, (z^2 + t^2)$$

est égal à huit fois la somme des diviseurs de m, *si* $\lambda = 1$, *et à vingt quatre fois cette même somme, si* $\lambda \gtreqless 2$.

42. Lorsqu'on fait $t = \frac{\pi}{4}$ dans l'équation (6), on trouve

$$(g). \quad 2\sum \left[\sum \sin \frac{2^{\mu} a\pi}{4} \cdot \sum \sin \frac{2^{\nu} b\pi}{4} \right] = (2^{\lambda} - 1)\, \zeta_1 (m) + \sum (\delta - 2^{\lambda} d) \operatorname{Cos} \frac{2^{\lambda} d\pi}{4}.$$

La facteur $\operatorname{Cos} \frac{2^{\lambda} d\pi}{4}$ est indépendant de d; il est nul, si $\lambda = 1$; il est

égal à -1, si $\lambda = 2$, et à $+1$ si λ est > 2. Dans ce dernier cas le second membre se réduit à zéro. On reconnaît aisément que le premier membre doit s'annuler lorsque λ est > 2. Car les solutions de l'équation

$$2^{l+3}\, m = 2^{\mu} m' + 2^{\nu} m'', \quad l \gtreqless 0,$$

se partagent en trois groupes, suivant que l'on a $\mu = \nu = 0$; $\mu = \nu = 1$; $\mu > 1$. Dans la dernière hypothèse $\sin \frac{2^{\mu} a\pi}{4} = 0$. $\sin \frac{2\nu b\pi}{4} = 0$. Dans le second groupe où $\mu = \nu = 1$, l'un des deux nombres m', m'' est nécessairement de la forme $4l + 3$, de sorte que l'un des deux facteurs

$$\sum \sin \frac{a\pi}{2} = \rho(m'), \quad \sum \sin \frac{b\pi}{2} = \rho(m'')$$

se réduit à zéro. Enfin pour les solutions du premier groupe on a

$$\sum \sin \frac{a\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \varpi(m', 2), \quad \sum \sin \frac{b\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \varpi(m'', 2).$$

Comme dans l'équation $2^{\lambda} m = m' + m''$, lorsque λ est égal ou supérieur à 3, l'un des deux nombres m', m'' est nécessairement de l'une des deux formes $8l + 5$ ou $8l + 7$, l'un des deux facteurs $\varpi(m', 2)$, $\varpi(m'', 2)$ est toujours nul.

Il suffit donc d'examiner la formule (9) dans les deux cas où $\lambda = 1$, ou 2.

43. Soit d'abord $\lambda = 1$. La formule (9) devient

$$(g'). \qquad 2 \sum \left[\sum \sin \frac{2\mu a\pi}{4} \cdot \sum \sin \frac{2\nu b\pi}{4} \right] = \zeta_1(m).$$

Si dans l'équation $2^{\mu} m' + 2^{\nu} m'' = 2m$, on suppose μ ou $\nu = 1$, on a ν ou $\mu > 1$, de sorte que l'une des deux sommes renfermées entre crochets est égale à zéro. Il suffit donc de considérer le cas où $\mu = \nu = 0$. On a dans ce cas

$$\sum \varpi(m', 2)\ \varpi(m'', 2) = \zeta_1(m),$$

comme nous l'avons trouvé plus haut (n.° 32). Cette formule exprime que:

Le nombre des solutions de l'équation

$$2m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

dans lesquelles x *et* y *ont des valeurs impaires est égal à quatre fois la somme des diviseurs de* m.

Si $\lambda=2$, on a $\cos\frac{2^\lambda\pi}{4}=-1$, et le second membre de la formule (g) se réduit à $6\zeta_1(m)$, puisque $\sum\delta=\sum d=\zeta_1(m)$. Quant au premier membre, il se réduit à zéro lorsqu'on suppose μ ou $\nu>1$. Par conséquent, de toutes les solutions de l'équation

$$4m=2^\mu m'+2^\nu m'',$$

il suffit de considérer celles dans lesquelles on a $\mu=\nu=0$, on $\mu=\nu=1$. Les termes de la formule (9) qui correspondent à la première hypothèse ont pour somme $\sum\varpi(m',2)\,\varpi(m'',2)$; ceux qui correspondent à l'hypothèse $\mu=\nu=1$ ont pour somme $2\sum\rho(m')\rho(m'')$; par conséquent la formule (g) devient

$$\sum\varpi(m',2)\,.\,\varpi(m'',2)+2\sum\rho(m')\,\rho(m'')=6\zeta_1(m).$$

Le première somme se rapporte aux solutions de l'équation

$$4m=m'+m'',$$

et la deuxième, à celles de l'équation

$$2m=m'+m''.$$

Nous avons vu que $\sum\rho(m')\,\rho(m'')=\zeta_1(m)$, (n° 31); par conséquent notre formule peut se réduire à la suivante:

$$\sum 2\varpi(m',2)\,.\,2\varpi(m'',2)=16\zeta_1(m),$$

Le nombre des solutions de l'équation

$$4m=x^2+y^2+2(z^2+t^2)$$

dans lesquelles x *et* y *ont des valeurs impaires, est égal à seize fois la somme des diviseurs de* m.

Ch. VI. *Sur les formes quadratiques*

$$x^2+y^2+2(z^2+t^2),\ x^2+y^2+z^2+2t^2,\ x^2+2y^2+2z^2+2t^2.$$

44. Nous avons obtenu concernant ces formes des résultats que nous allons réunir et compléter au moyen de considérations arithmétiques fort simples. La première forme peut représenter tous les nombres entiers.

Le nombre des représentations d'un nombre impair m par cette forme se déduit du théorème relatif à l'équation (17) du n° 35. Car les solutions de l'équation

$$(1). \qquad m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

se déduisent deux à deux de celles de l'équation

$$(17). \qquad m = p^2 + 4q^2 + 2(z^2 + t^2),$$

en posant alternativement, pour chaque solution de cette dernière équation,

$$x = p, y = 2q, \text{ et } x = 2q, y = p.$$

Le nombre des solutions de la première équation est donc double de celui des solutions de la dernière. Par conséquent (n° 35) :

Le nombre des représentations d'un nombre impair m *par la forme* $x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$ *est égal à quatre fois la somme des diviseurs de* m.

Ce théorème et celui de Jacobi concernant l'équation

$$(2) \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

sont une conséquence immédiate l'un de l'autre. En effet le nombre des solutions de cette équation qui satisfont à la condition

$$z^2 + t^2 \equiv 0 \pmod{2}$$

est égal à celui des solutions de l'équation

$$(1). \qquad m = x^2 + y^2 + 2p^2 + 2q^2,$$

car ces solutions se correspondent une à une au moyen des formules

$$z = p + q, \ t = p - q, \ z^2 + t^2 = 2(p^2 + q^2).$$

Or le nombre des solutions de l'équation (2) qui satisfont à la condition énoncée est la moitié du nombre de toutes les solutions ; car si nous groupons ensemble toutes les solutions de l'équation (2) dans lesquelles la somme des deux derniers carrés est paire, il suffit de permuter x et y respectivement avec z et t, pour obtenir un nombre égal de solutions dans lesquelles la somme des deux derniers carrés est impaire. Donc

Le nombre des représentations d'un nombre impair m *par la somme de quatre carrés est double de celui des représentations du même nombre* m *par la forme* $x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$.

45. Pour un nombre pair $2^\lambda . m$, la théorie de la même forme se déduit des résultats obtenus dans les n^{os} 32, 33, 41, 42. Le théorème du n° 41

donne le nombre de toutes les solutions de cette équation. Le n° 42 détermine le nombre des solutions dans lesquelles x et y sont des nombres impairs; il nous apprend que ce nombre est

$$4\zeta_1(m),\ 16\zeta_1(m) \text{ ou } 0,$$

suivant que l'on a

$$\lambda = 1,\ \lambda = 2, \text{ ou } \lambda > 2.$$

Le théorème du n° 41 peut aisément se déduire de celui-ci et du théorème démontré plus haut n° 44. D'abord les solutions de l'équation

$$(3).\qquad 2m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

se partagent en deux groupes, celui des solutions où x et y sont impairs et celui des solutions où ces deux nombres sont pairs. Nous venons de dire que le nombre des premières solutions est égal à $4\zeta_1(m)$. D'ailleurs le nombre des solutions dans lesquelles x et y sont pairs est égal à celui des solutions de l'équation (1), c'est-à-dire à $4\zeta_1(m)$ (n° 44). Le nombre de toutes les solutions de l'équation (3) est donc égal à $8\zeta_1(m)$.

De même les solutions de l'équation

$$(4).\qquad 4m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

se partagent en deux groupes, suivant que x et y sont pairs ou impairs. Or le nombre des solutions du premier groupe est égal à celui des solutions de l'équation (3), c'est-à-dire à $8\zeta_1(m)$. Le nombre de celles du second groupe est $16\zeta_1(m)$. Par conséquent le nombre de toutes les solutions de l'équation (4) est égal à $24\zeta_1(m)$.

46. Les deux équations

$$(5).\qquad m = x^2 + p^2 + q^2 + 2t^2,$$

$$(6).\qquad m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2.$$

doivent être considérées conjointement. Chacune d'elles est possible pour toute valeur impaire de m. Chaque solution de l'équation (6) donne une solution de l'équation (5) par les formules

$$(\text{A}).\qquad 2y = p + q,\qquad 2z = p - q,\qquad 2y^2 + 2z^2 = p^2 + q^2.$$

Mais dans les solutions ainsi obtenues la somme $p^2 + q^2$ est paire, ce qui exige que le premier carré, x^2, soit impair. Inversement toute solu-

tion de l'équation (5) dans laquelle x est impair donne par les formules (A) une solution de l'équation (6).

Le nombre des solutions de l'équation (6) *est égal à celui des solutions de l'équation* (5) *dans lesquelles le premier carré est impair.*

Si dans l'équation (5) on suppose x, p et q impairs, le nombre m est de la forme $8l+3$ ou $8l+5$, suivant que t est pair ou impair. Par conséquent si le nombre m est de la forme $8l \pm 1$, un seul des trois nombres x, p, q est impair. Dans ce cas le nombre total des solutions de l'équation (5) est triple de celui des solutions dans lesquelles le premier carré est impair. Si donc nous désignons avec Liouville par $A(m)$ le nombre des solutions de l'équation (5) et par $B(m)$ celui des solutions de l'équation (6), nous avons entre ces deux nombres la relation $A(8n \pm 1) = 3B(8n \mp 1)$. La relation entre ces deux nombres est plus compliquée lorsque le nombre m est de la forme $8n \pm 3$.

Il faut d'abord partager en deux groupes les solutions de l'équation (5), suivant que les trois nombre x, p, q sont impairs ou qu'un seul d'entre eux est impair. Nous désignons par A' le premier groupe ainsi que le nombre de ses termes, et par A'' le deuxième groupe et le nombre de ses termes. De même nous partageons les solutions de l'équation (6) en deux groupes, suivant que la somme y^2+z^2 est impaire ou paire. Nous désignons par B' le premier groupe ainsi que le nombre de ses termes, et par B'' le second groupe et le nombre de ses termes.

Dans le groupe A', les deux nombres p, q étant impairs, on peut poser

$$\text{(A).} \qquad p+q=2y, \qquad p-q=2z, \qquad p^2+q^2=2y^2+2z^2;$$

donc à chaque solution du groupe A' on fait correspondre par les formules (A) une solution de l'équation (6). Cette solution appartient au groupe B', puisque la somme $y^2+z^2=\dfrac{p^2+q^2}{2}$ est impaire. Inversement à toute solution du groupe B', correspond par les formules (A) une solution du groupe A'. On a donc $A'=B'$.

Dans le groupe A'' le nombre des solutions qui commencent par un carré impair est le tiers du nombre total A'', puisque le carré impair peut occuper successivement trois places différentes. Or les formules (A) font correspondre une solution du groupe B'' à chaque solution du groupe A'', commençant par le carré impair; car les deux nombres p et q étant tous

deux pairs, les formules (A) déterminent pour y et z des valeurs entières dont la somme est paire, en vertu de la relation $2y^2 + 2z^2 = p^2 + q^2$. Inversement à toute solution du groupe B'' les formules (A) font correspondre des solutions du groupe A' dans lesquelles les deux carrés p^2 et q^2 sont pairs, et x^2, impair. On a donc $B'' = \frac{1}{3} A''$.

D'ailleurs on a entre les deux nombres B', B'' la relation $B' = 2B''$. Car les trois carrés y^2, z^2, t^2 ne peuvent être, ni tous pairs ni tous impairs, parce que le nombre m serait de la forme $8l + 1$, dans le premier cas, et $8l + 7$ dans le second; par conséquent, parmi les 6 permutations de ces trois carrés, il y en a deux dans lesquelles la somme $y^2 + z^2$ est paire, et quatre dans lesquelles cette somme est impaire. On a donc $B'' : B' = 2:4$, $B' = 2B''$.

En combinant les trois formules obtenues

$$B' = 2B'', \quad B' = A', \quad A'' = 3B''$$

avec les deux relations

$$A' + A'' = A, \quad B' + B'' = B,$$

on trouve

$$B'' = \tfrac{1}{3} B, \quad B' = \tfrac{2}{3} B, \quad A'' = B, \quad A' = \tfrac{2}{3} B = \tfrac{2}{3} A''$$

$$A' + A'' = A = B\left(1 + \tfrac{2}{3}\right); \quad 3A\,(8l \pm 3) = 5B\,(8l \pm 3).$$

Lorsque le nombre des solutions de l'équation (5) sera déterminé, on connaitra le nombre des solutions de l'équation (6) au moyen des deux formules

$$A\,(8l \pm 1) = 3B\,(8l \pm 1), \quad 3A\,(8l \pm 3) = 5B\,(8l \pm 3).$$

47. Le nombre $A(m)$ des solutions de l'équation

$$(5) \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

dépend de la fonction

$$S(m) = \sum d\,(-1)^{\frac{\delta^2 - 1}{8}}, \quad d\delta = m,$$

qui est égale à l'excès de la somme des diviseurs d de m, qui ont pour conjugués dans l'équation $d\delta = m$ des nombres δ de la forme $8l \pm 1$, sur la somme des diviseurs dont les conjugués sont de la forme $8l \pm 3$. Au moyen de cette notation, le théorème du n° 36 peut s'énoncer de la manière suivante :

tion de l'équation (5) dans laquelle x est impair donne par les formules (A) une solution de l'équation (6).

Le nombre des solutions de l'équation (6) *est égal à celui des solutions de l'équation* (5) *dans lesquelles le premier carré est impair.*

Si dans l'équation (5) on suppose x, p et q impairs, le nombre m est de la forme $8l+3$ ou $8l+5$, suivant que t est pair ou impair. Par conséquent si le nombre m est de la forme $8l \pm 1$, un seul des trois nombres x, p, q est impair. Dans ce cas le nombre total des solutions de l'équation (5) est triple de celui des solutions dans lesquelles le premier carré est impair. Si donc nous désignons avec Liouville par $A(m)$ le nombre des solutions de l'équation (5) et par $B(m)$ celui des solutions de l'équation (6), nous avons entre ces deux nombres la relation $A(8n \pm 1) = 3B(8n \mp 1)$. La relation entre ces deux nombres est plus compliquée lorsque le nombre m est de la forme $8n \pm 3$.

Il faut d'abord partager en deux groupes les solutions de l'équation (5), suivant que les trois nombre x, p, q sont impairs ou qu'un seul d'entre eux est impair. Nous désignons par A' le premier groupe ainsi que le nombre de ses termes, et par A'' le deuxième groupe et le nombre de ses termes. De même nous partageons les solutions de l'équation (6) en deux groupes, suivant que la somme y^2+z^2 est impaire ou paire. Nous désignons par B' le premier groupe ainsi que le nombre de ses termes, et par B'' le second groupe et le nombre de ses termes.

Dans le groupe A', les deux nombres p, q étant impairs, on peut poser

$$\text{(A).} \qquad p+q=2y, \qquad p-q=2z, \qquad p^2+q^2=2y^2+2z^2;$$

donc à chaque solution du groupe A' on fait correspondre par les formules (A) une solution de l'équation (6). Cette solution appartient au groupe B', puisque la somme $y^2+z^2=\dfrac{p^2+q^2}{2}$ est impaire. Inversement à toute solution du groupe B', correspond par les formules (A) une solution du groupe A'. On a donc $A'=B'$.

Dans le groupe A'' le nombre des solutions qui commencent par un carré impair est le tiers du nombre total A'', puisque le carré impair peut occuper successivement trois places différentes. Or les formules (A) font correspondre une solution du groupe B'' à chaque solution du groupe A'', commençant par le carré impair; car les deux nombres p et q étant tous

deux pairs, les formules (A) déterminent pour y et z des valeurs entières dont la somme est paire, en vertu de la relation $2y^2 + 2z^2 = p^2 + q^2$. Inversement à toute solution du groupe B'' les formules (A) font correspondre des solutions du groupe A'' dans lesquelles les deux carrés p^2 et q^2 sont pairs, et x^2, impair. On a donc $B'' = \frac{1}{3} A''$.

D'ailleurs on a entre les deux nombres B', B'' la relation $B' = 2B''$. Car les trois carrés y^2, z^2, t^2 ne peuvent être, ni tous pairs ni tous impairs, parce que le nombre m serait de la forme $8l + 1$, dans le premier cas, et $8l + 7$ dans le second; par conséquent, parmi les 6 permutations de ces trois carrés, il y en a deux dans lesquelles la somme $y^2 + z^2$ est paire, et quatre dans lesquelles cette somme est impaire. On a donc $B'': B' = 2:4$, $B'=2B''$.

En combinant les trois formules obtenues

$$B' = 2B'', \quad B' = A', \quad A'' = 3B''$$

avec les deux relations

$$A' + A'' = A, \quad B' + B'' = B,$$

on trouve

$$B'' = \tfrac{1}{3} B, \quad B' = \tfrac{2}{3} B, \quad A'' = B, \quad A' = \tfrac{2}{3} B = \tfrac{2}{3} A''$$

$$A' + A'' = A = B\left(1 + \tfrac{2}{3}\right); \quad 3A\,(8l \pm 3) = 5B\,(8l \pm 3).$$

Lorsque le nombre des solutions de l'équation (5) sera déterminé, on connaitra le nombre des solutions de l'équation (6) au moyen des deux formules

$$A\,(8l \pm 1) = 3B\,(8l \pm 1), \quad 3A\,(8l \pm 3) = 5B\,(8l \pm 3).$$

47. Le nombre $A(m)$ des solutions de l'équation

$$(5) \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

dépend de la fonction

$$S(m) = \sum d\,(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}, \quad d\delta = m,$$

qui est égale à l'excès de la somme des diviseurs d de m, qui ont pour conjugués dans l'équation $d\delta = m$ des nombres δ de la forme $8l \pm 1$, sur la somme des diviseurs dont les conjugués sont de la forme $8l \pm 3$. Au moyen de cette notation, le théorème du n.° 36 peut s'énoncer de la manière suivante :

tion de l'équation (5) dans laquelle x est impair donne par les formules (A) une solution de l'équation (6).

Le nombre des solutions de l'équation (6) *est égal à celui des solutions de l'équation* (5) *dans lesquelles le premier carré est impair.*

Si dans l'équation (5) on suppose x, p et q impairs, le nombre m est de la forme $8l+3$ ou $8l+5$, suivant que t est pair ou impair. Par conséquent si le nombre m est de la forme $8l \pm 1$, un seul des trois nombres x, p, q est impair. Dans ce cas le nombre total des solutions de l'équation (5) est triple de celui des solutions dans lesquelles le premier carré est impair. Si donc nous désignons avec Liouville par $A(m)$ le nombre des solutions de l'équation (5) et par $B(m)$ celui des solutions de l'équation (6), nous avons entre ces deux nombres la relation $A(8n \pm 1) = 3B(8n \mp 1)$. La relation entre ces deux nombres est plus compliquée lorsque le nombre m est de la forme $8n \pm 3$.

Il faut d'abord partager en deux groupes les solutions de l'équation (5), suivant que les trois nombre x, p, q sont impairs ou qu'un seul d'entre eux est impair. Nous désignons par A' le premier groupe ainsi que le nombre de ses termes, et par A'' le deuxième groupe et le nombre de ses termes. De même nous partageons les solutions de l'équation (6) en deux groupes, suivant que la somme y^2+z^2 est impaire ou paire. Nous désignons par B' le premier groupe ainsi que le nombre de ses termes, et par B'' le second groupe et le nombre de ses termes.

Dans le groupe A', les deux nombres p, q étant impairs, on peut poser

$$\text{(A).}\qquad p+q=2y, \qquad p-q=2z, \qquad p^2+q^2=2y^2+2z^2;$$

donc à chaque solution du groupe A' on fait correspondre par les formules (A) une solution de l'équation (6). Cette solution appartient au groupe B', puisque la somme $y^2+z^2=\dfrac{p^2+q^2}{2}$ est impaire. Inversement à toute solution du groupe B', correspond par les formules (A) une solution du groupe A'. On a donc $A'=B'$.

Dans le groupe A'' le nombre des solutions qui commencent par un carré impair est le tiers du nombre total A'', puisque le carré impair peut occuper successivement trois places différentes. Or les formules (A) font correspondre une solution du groupe B'' à chaque solution du groupe A'', commençant par le carré impair; car les deux nombres p et q étant tous

deux pairs, les formules (A) déterminent pour y et z des valeurs entières dont la somme est paire, en vertu de la relation $2y^2 + 2z^2 = p^2 + q^2$. Inversement à toute solution du groupe B'' les formules (A) font correspondre des solutions du groupe A' dans lesquelles les deux carrés p^2 et q^2 sont pairs, et x^2, impair. On a donc $B'' = \frac{1}{3} A''$.

D'ailleurs on a entre les deux nombres B', B'' la relation $B' = 2B''$. Car les trois carrés y^2, z^2, t^2 ne peuvent être, ni tous pairs ni tous impairs, parce que le nombre m serait de la forme $8l + 1$, dans le premier cas, et $8l + 7$ dans le second; par conséquent, parmi les 6 permutations de ces trois carrés, il y en a deux dans lesquelles la somme $y^2 + z^2$ est paire, et quatre dans lesquelles cette somme est impaire. On a donc $B'' : B' = 2:4$, $B' = 2B''$.

En combinant les trois formules obtenues

$$B' = 2B'', \quad B' = A', \quad A'' = 3B''$$

avec les deux relations

$$A' + A'' = A, \quad B' + B'' = B,$$

on trouve

$$B'' = \tfrac{1}{3} B, \quad B' = \tfrac{2}{3} B, \quad A'' = B, \quad A' = \tfrac{2}{3} B = \tfrac{2}{3} A''$$

$$A' + A'' = A = B\left(1 + \tfrac{2}{3}\right); \quad 3A\,(8l \pm 3) = 5B\,(8l \pm 3).$$

Lorsque le nombre des solutions de l'équation (5) sera déterminé, on connaitra le nombre des solutions de l'équation (6) au moyen des deux formules

$$A\,(8l \pm 1) = 3B\,(8l \pm 1), \quad 3A\,(8l \pm 3) = 5B\,(8l \pm 3).$$

47. Le nombre $A(m)$ des solutions de l'équation

$$(5) \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

dépend de la fonction

$$S(m) = \sum d\,(-1)^{\frac{\delta^2 - 1}{8}}, \quad d\delta = m,$$

qui est égale à l'excès de la somme des diviseurs d de m, qui ont pour conjugués dans l'équation $d\delta = m$ des nombres δ de la forme $8l \pm 1$, sur la somme des diviseurs dont les conjugués sont de la forme $8l \pm 3$. Au moyen de cette notation, le théorème du n.° 36 peut s'énoncer de la manière suivante :

tion de l'équation (5) dans laquelle x est impair donne par les formules (A) une solution de l'équation (6).

Le nombre des solutions de l'équation (6) *est égal à celui des solutions de l'équation* (5) *dans lesquelles le premier carré est impair.*

Si dans l'équation (5) on suppose x, p et q impairs, le nombre m est de la forme $8l + 3$ ou $8l + 5$, suivant que t est pair ou impair. Par conséquent si le nombre m est de la forme $8l \pm 1$, un seul des trois nombres x, p, q est impair. Dans ce cas le nombre total des solutions de l'équation (5) est triple de celui des solutions dans lesquelles le premier carré est impair. Si donc nous désignons avec Liouville par $A(m)$ le nombre des solutions de l'équation (5) et par $B(m)$ celui des solutions de l'équation (6), nous avons entre ces deux nombres la relation $A(8n \pm 1) = 3B(8n \mp 1)$. La relation entre ces deux nombres est plus compliquée lorsque le nombre m est de la forme $8n \pm 3$.

Il faut d'abord partager en deux groupes les solutions de l'équation (5), suivant que les trois nombre x, p, q sont impairs ou qu'un seul d'entre eux est impair. Nous désignons par A' le premier groupe ainsi que le nombre de ses termes, et par A'' le deuxième groupe et le nombre de ses termes. De même nous partageons les solutions de l'équation (6) en deux groupes, suivant que la somme $y^2 + z^2$ est impaire ou paire. Nous désignons par B' le premier groupe ainsi que le nombre de ses termes, et par B'' le second groupe et le nombre de ses termes.

Dans le groupe A', les deux nombres p, q étant impairs, on peut poser

$$(A). \qquad p + q = 2y, \qquad p - q = 2z, \qquad p^2 + q^2 = 2y^2 + 2z^2;$$

donc à chaque solution du groupe A' on fait correspondre par les formules (A) une solution de l'équation (6). Cette solution appartient au groupe B', puisque la somme $y^2 + z^2 = \dfrac{p^2 + q^2}{2}$ est impaire. Inversement à toute solution du groupe B', correspond par les formules (A) une solution du groupe A'. On a donc $A' = B'$.

Dans le groupe A'' le nombre des solutions qui commencent par un carré impair est le tiers du nombre total A'', puisque le carré impair peut occuper successivement trois places différentes. Or les formules (A) font correspondre une solution du groupe B'' à chaque solution du groupe A'', commençant par le carré impair; car les deux nombres p et q étant tous

deux pairs, les formules (A) déterminent pour y et z des valeurs entières dont la somme est paire, en vertu de la relation $2y^2 + 2z^2 = p^2 + q^2$. Inversement à toute solution du groupe B'' les formules (A) font correspondre des solutions du groupe A' dans lesquelles les deux carrés p^2 et q^2 sont pairs, et x^2, impair. On a donc $B'' = \frac{1}{3} A''$.

D'ailleurs on a entre les deux nombres B', B'' la relation $B' = 2B''$. Car les trois carrés y^2, z^2, t^2 ne peuvent être, ni tous pairs ni tous impairs, parce que le nombre m serait de la forme $8l + 1$, dans le premier cas, et $8l + 7$ dans le second; par conséquent, parmi les 6 permutations de ces trois carrés, il y en a deux dans lesquelles la somme $y^2 + z^2$ est paire, et quatre dans lesquelles cette somme est impaire. On a donc $B'' : B' = 2:4$, $B' = 2B''$.

En combinant les trois formules obtenues

$$B' = 2B'', \quad B' = A', \quad A'' = 3B''$$

avec les deux relations

$$A' + A'' = A, \quad B' + B'' = B,$$

on trouve

$$B'' = \frac{1}{3} B, \quad B' = \frac{2}{3} B, \quad A'' = B, \quad A' = \frac{2}{3} B = \frac{2}{3} A''$$

$$A' + A'' = A = B\left(1 + \frac{2}{3}\right); \quad 3A\,(8l \pm 3) = 5B\,(8l \pm 3).$$

Lorsque le nombre des solutions de l'équation (5) sera déterminé, on connaitra le nombre des solutions de l'équation (6) au moyen des deux formules

$$A\,(8l \pm 1) = 3B\,(8l \pm 1), \quad 3A\,(8l \pm 3) = 5B\,(8l \pm 3).$$

47. Le nombre $A(m)$ des solutions de l'équation

$$(5) \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

dépend de la fonction

$$S(m) = \sum d\,(-1)^{\frac{\delta^2 - 1}{8}}, \quad d\delta = m,$$

qui est égale à l'excès de la somme des diviseurs d de m, qui ont pour conjugués dans l'équation $d\delta = m$ des nombres δ de la forme $8l \pm 1$, sur la somme des diviseurs dont les conjugués sont de la forme $8l \pm 3$. Au moyen de cette notation, le théorème du n.° 36 peut s'énoncer de la manière suivante :

tion de l'équation (5) dans laquelle x est impair donne par les formules (A) une solution de l'équation (6).

Le nombre des solutions de l'équation (6) *est égal à celui des solutions de l'équation* (5) *dans lesquelles le premier carré est impair.*

Si dans l'équation (5) on suppose x, p et q impairs, le nombre m est de la forme $8l+3$ ou $8l+5$, suivant que t est pair ou impair. Par conséquent si le nombre m est de la forme $8l \pm 1$, un seul des trois nombres x, p, q est impair. Dans ce cas le nombre total des solutions de l'équation (5) est triple de celui des solutions dans lesquelles le premier carré est impair. Si donc nous désignons avec Liouville par $A(m)$ le nombre des solutions de l'équation (5) et par $B(m)$ celui des solutions de l'équation (6), nous avons entre ces deux nombres la relation $A(8n \pm 1) = 3B(8n \mp 1)$. La relation entre ces deux nombres est plus compliquée lorsque le nombre m est de la forme $8n \pm 3$.

Il faut d'abord partager en deux groupes les solutions de l'équation (5), suivant que les trois nombre x, p, q sont impairs ou qu'un seul d'entre eux est impair. Nous désignons par A' le premier groupe ainsi que le nombre de ses termes, et par A'' le deuxième groupe et le nombre de ses termes. De même nous partageons les solutions de l'équation (6) en deux groupes, suivant que la somme y^2+z^2 est impaire ou paire. Nous désignons par B' le premier groupe ainsi que le nombre de ses termes, et par B'' le second groupe et le nombre de ses termes.

Dans le groupe A', les deux nombres p, q étant impairs, on peut poser

$$(A).\qquad p+q=2y,\qquad p-q=2z,\qquad p^2+q^2=2y^2+2z^2;$$

donc à chaque solution du groupe A' on fait correspondre par les formules (A) une solution de l'équation (6). Cette solution appartient au groupe B', puisque la somme $y^2+z^2=\frac{p^2+q^2}{2}$ est impaire. Inversement à toute solution du groupe B', correspond par les formules (A) une solution du groupe A'. On a donc $A'=B'$.

Dans le groupe A'' le nombre des solutions qui commencent par un carré impair est le tiers du nombre total A'', puisque le carré impair peut occuper successivement trois places différentes. Or les formules (A) font correspondre une solution du groupe B'' à chaque solution du groupe A'', commençant par le carré impair; car les deux nombres p et q étant tous

deux pairs, les formules (A) déterminent pour y et z des valeurs entières dont la somme est paire, en vertu de la relation $2y^2 + 2z^2 = p^2 + q^2$. Inversement à toute solution du groupe B'' les formules (A) font correspondre des solutions du groupe A' dans lesquelles les deux carrés p^2 et q^2 sont pairs, et x^2, impair. On a donc $B'' = \frac{1}{3} A''$.

D'ailleurs on a entre les deux nombres B', B'' la relation $B' = 2B''$. Car les trois carrés y^2, z^2, t^2 ne peuvent être, ni tous pairs ni tous impairs, parce que le nombre m serait de la forme $8l + 1$, dans le premier cas, et $8l + 7$ dans le second; par conséquent, parmi les 6 permutations de ces trois carrés, il y en a deux dans lesquelles la somme $y^2 + z^2$ est paire, et quatre dans lesquelles cette somme est impaire. On a donc $B'' : B' = 2 : 4$, $B' = 2B''$.

En combinant les trois formules obtenues

$$B' = 2B'', \quad B' = A', \quad A'' = 3B''$$

avec les deux relations

$$A' + A'' = A, \quad B' + B'' = B,$$

on trouve

$$B'' = \frac{1}{3} B, \quad B' = \frac{2}{3} B, \quad A'' = B, \quad A' = \frac{2}{3} B = \frac{2}{3} A''$$

$$A' + A'' = A = B\left(1 + \tfrac{2}{3}\right); \quad 3A\,(8l \pm 3) = 5B\,(8l \pm 3).$$

Lorsque le nombre des solutions de l'équation (5) sera déterminé, on connaitra le nombre des solutions de l'équation (6) au moyen des deux formules

$$A\,(8l \pm 1) = 3B\,(8l \pm 1), \quad 3A\,(8l \pm 3) = 5B\,(8l \pm 3).$$

47. Le nombre $A(m)$ des solutions de l'équation

$$(5) \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

dépend de la fonction

$$S(m) = \sum d\,(-1)^{\frac{\delta^2 - 1}{8}}, \quad d\delta = m,$$

qui est égale à l'excès de la somme des diviseurs d de m, qui ont pour conjugués dans l'équation $d\delta = m$ des nombres δ de la forme $8l \pm 1$, sur la somme des diviseurs dont les conjugués sont de la forme $8l \pm 3$. Au moyen de cette notation, le théorème du n.° 36 peut s'énoncer de la manière suivante :

tion de l'équation (5) dans laquelle x est impair donne par les formules (A) une solution de l'équation (6).

Le nombre des solutions de l'équation (6) *est égal à celui des solutions de l'équation* (5) *dans lesquelles le premier carré est impair.*

Si dans l'équation (5) on suppose x, p et q impairs, le nombre m est de la forme $8l+3$ ou $8l+5$, suivant que t est pair ou impair. Par conséquent si le nombre m est de la forme $8l \pm 1$, un seul des trois nombres x, p, q est impair. Dans ce cas le nombre total des solutions de l'équation (5) est triple de celui des solutions dans lesquelles le premier carré est impair. Si donc nous désignons avec Liouville par $A(m)$ le nombre des solutions de l'équation (5) et par $B(m)$ celui des solutions de l'équation (6), nous avons entre ces deux nombres la relation $A(8n \pm 1) = 3B(8n \mp 1)$. La relation entre ces deux nombres est plus compliquée lorsque le nombre m est de la forme $8n \pm 3$.

Il faut d'abord partager en deux groupes les solutions de l'équation (5), suivant que les trois nombre x, p, q sont impairs ou qu'un seul d'entre eux est impair. Nous désignons par A' le premier groupe ainsi que le nombre de ses termes, et par A'' le deuxième groupe et le nombre de ses termes. De même nous partageons les solutions de l'équation (6) en deux groupes, suivant que la somme y^2+z^2 est impaire ou paire. Nous désignons par B' le premier groupe ainsi que le nombre de ses termes, et par B'' le second groupe et le nombre de ses termes.

Dans le groupe A', les deux nombres p, q étant impairs, on peut poser

$$(A). \qquad p+q=2y, \qquad p-q=2z, \qquad p^2+q^2=2y^2+2z^2;$$

donc à chaque solution du groupe A' on fait correspondre par les formules (A) une solution de l'équation (6). Cette solution appartient au groupe B', puisque la somme $y^2+z^2=\dfrac{p^2+q^2}{2}$ est impaire. Inversement à toute solution du groupe B', correspond par les formules (A) une solution du groupe A'. On a donc $A'=B'$.

Dans le groupe A'' le nombre des solutions qui commencent par un carré impair est le tiers du nombre total A'', puisque le carré impair peut occuper successivement trois places différentes. Or les formules (A) font correspondre une solution du groupe B'' à chaque solution du groupe A'', commençant par le carré impair; car les deux nombres p et q étant tous

deux pairs, les formules (A) déterminent pour y et z des valeurs entières dont la somme est paire, en vertu de la relation $2y^2 + 2z^2 = p^2 + q^2$. Inversement à toute solution du groupe B'' les formules (A) font correspondre des solutions du groupe A' dans lesquelles les deux carrés p^2 et q^2 sont pairs, et x^2, impair. On a donc $B'' = \frac{1}{3} A''$.

D'ailleurs on a entre les deux nombres B', B'' la relation $B' = 2B''$. Car les trois carrés y^2, z^2, t^2 ne peuvent être, ni tous pairs ni tous impairs, parce que le nombre m serait de la forme $8l + 1$, dans le premier cas, et $8l + 7$ dans le second; par conséquent, parmi les 6 permutations de ces trois carrés, il y en a deux dans lesquelles la somme $y^2 + z^2$ est paire, et quatre dans lesquelles cette somme est impaire. On a donc $B'' : B' = 2:4$, $B' = 2B''$.

En combinant les trois formules obtenues

$$B' = 2B'', \quad B' = A', \quad A'' = 3B''$$

avec les deux relations

$$A' + A'' = A, \quad B' + B'' = B,$$

on trouve

$$B'' = \tfrac{1}{3} B, \quad B' = \tfrac{2}{3} B, \quad A'' = B, \quad A' = \tfrac{2}{3} B = \tfrac{2}{3} A''$$

$$A' + A'' = A = B\left(1 + \tfrac{2}{3}\right); \quad 3A\,(8l \pm 3) = 5B\,(8l \pm 3).$$

Lorsque le nombre des solutions de l'équation (5) sera déterminé, on connaitra le nombre des solutions de l'équation (6) au moyen des deux formules

$$A\,(8l \pm 1) = 3B\,(8l \pm 1), \quad 3A\,(8l \pm 3) = 5B\,(8l \pm 3).$$

47. Le nombre $A(m)$ des solutions de l'équation

$$(5) \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

dépend de la fonction

$$S(m) = \sum d\,(-1)^{\frac{\delta^2 - 1}{8}}, \quad d\delta = m,$$

qui est égale à l'excès de la somme des diviseurs d de m, qui ont pour conjugués dans l'équation $d\delta = m$ des nombres δ de la forme $8l \pm 1$, sur la somme des diviseurs dont les conjugués sont de la forme $8l \pm 3$. Au moyen de cette notation, le théorème du n.° 36 peut s'énoncer de la manière suivante :

Le nombre des solutions de l'équation

$$(6) \qquad 8n \pm 3 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

dans lesquelles les trois premiers carrés sont impairs est égal à $4S(8n \pm 3)$.

Ce nombre a été désigné plus haut par A' et nous avons trouvé entre ce nombre et le nombre A'' des solutions où un seul des trois carrés x^2, y^2, z^2 est impair, la relation $A'' = \frac{3}{2} A'$. Par conséquent:

Le nombre des solutions de l'équation (6) *dans lesquelles un seul des trois carrés* x^2, y^2, z^2 *est impair, est égal à* $6S\,(8n \pm 3)$.

En réunissant ces deux théorèmes, on obtient le suivant:

Le nombre $A(8n \pm 3)$, *des représentations d'un nombre impair* $8n \pm 3 = m$ *par la somme de trois carrés plus le double d'un quatrième carré est égal à* $10S(8n \pm 3)$, *c'est à dire à* 10 *fois l'excès de la somme des diviseurs* $8l \pm 3$ *de ce nombre* m, *sur la somme de ses diviseurs* $8l \pm 1$.

Soit par exemple $n = 5$. Le théorème énoncé donne $10(5 - 1) = 40$ pour exprimer le nombre des solutions de l'équation

$$5 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2.$$

Ces résultat est facile à vérifier. Les solutions dans lesquelles les trois premiers carrés sont impairs, correspondent à une seule combinaison $x^2 = y^2 = z^2 = t^2 = 1$ des quatre carrés et aux seize combinaisons des signes de leurs racines. On a donc bien $A'(5) = 16 = 4S(5)$.

De même les solutions du groupe (A'') dans lesquelles un seul des trois premiers carrés est impair correspondent aux valeurs 0, 1, 4 de ces carrés et à une valeur nulle de t. Les trois premiers carrés offrent six permutations distinctes, lesquelles étant combinées avec les quatre combinaisons de signes des deux carrés différents de zéro font 24 solutions. On a donc bien $A''(5) = 6.S\,(5) = \frac{3}{2} A'(5)$; puis en ajoutant ces deux nombres on trove que le nombre $A(5)$ de toutes les solutions est égal à 40.

48. Pour les nombres de la forme $8n \pm 1$, nous avons trouvé (n.° 39) que le nombre des solutions de l'équation

$$(23) \qquad m = 8n + 1 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2t^2,$$

comme celui des solutions de l'équation

$$(27) \qquad m = 8n + 7 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2t^2$$

est égal à $2S(m)$. Or en comparant ces équations avec la suivante

$$8n \pm 1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2,$$

on réconnaît aisément que le nombre de leurs solutions n'est que le tiers de celui des solutions de la dernière équation. En effet, dans cette équation un seul des trois nombres x, y, z est impair et les deux autres sont pairs. Le nombre de ses solutions est donc le triple de celui des solutions de l'équation

$$(7) \qquad 8n \pm 1 = x^2 + (2y)^2 + (2z)^2 + 2t^2\,;$$

puisqu'à chaque solution de cette dernière équation correspondent trois solutions de l'équation (5') qu'on obtient en plaçant successivement le carré impair au premier, au second et au troisième terme. Donc $A(8n \pm 1) = 6S(8n \pm 1)$; c'est-à-dire:

Le nombre des solutions de l'équation

$$(8) \qquad m = 8n \pm 1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

est égal à si x fois l'excès de la somme des diviseurs $8l \pm 1$ *de* m *sur la somme de ses diviseurs* $8l \pm 3$.

Au moyen de ce théorème et de celui du n.° 37 on obtient l'expression du nombre $B(m)$ au moyen de la somme $S(m)$, savoir:

$$B(8n \pm 1) = 2S(8n \pm 1),\ B(8n \pm 3) = 6S(8n \pm 3);\ B(m) = 2\left(2 - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right) S(m).$$

49. On obtient ensuite au moyen des expressions précédentes les nombres des solutions des équations (5) et (6), lorsque le nombre impair m est remplacé par le nombre pair $2^\alpha m$. D'abord dans l'équation

$$(6') \qquad 2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2,$$

le nombre x doit être pair. Posant donc $x = 2x_1$ et divisant par 2, on trouve

$$(5') \qquad 2^{\alpha-1} m = 2x_1^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

On conclut de là que, pour toute valeur entière et positive de l'exposant α, on a $B(2^\alpha m) = A(2^{\alpha-1}m)$; de sorte qu'il nous suffit de déterminer $A(2^\alpha m)$, c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation

$$(9) \qquad 2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2.$$

Pour la determination de ce nombre il faut partager en deux groupes les solutions de cette équation, suivant que les trois premiers carrés sont tous pairs ou qu'un seul est pair, tandis que les deux autres sont impairs. Désignons par A′, A″ les nombres des solutions comprises respectivement dans ces deux groupes. Si α est supérieur à 1, le nombre t est pair dans le premier groupe, de sorte que les solutions de ce groupe se ramènent à celles de l'équation

$$2^{\alpha-2}\, m = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2t_1^2.$$

On a donc $A'(2^\alpha m) = A(2^{\alpha-2} m)$, en supposant $\alpha > 1$. Si au contraire $\alpha = 1$, le nombre t est impair et les solutions du groupe $A'(m)$ ce ramènent à celles de l'équation

$$m = t^2 + 2(m_1^2 + y_1^2 + z_1^2)$$

de sorte que l'on a

$$A'(2m) = B(m) = 2\left(2 - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right) S(m).$$

Quant aux solutions du groupe A″, leur nombre est triple de celui des solutions de l'équation

$$(10) \qquad 2^\alpha m = p^2 + q^2 + 4z^2 + 2t^2,$$

dans laquelle on désigne par p, q deux nombres impairs. En effet dans le groupe A″, comme dans l'équation (10) un seul des trois premiers carrés est pairs et les deux autres sont impairs; mais le carré pair est fixé au troisiéme terme dans l'équation (10), tandis qu'il peut former l'un quelconque des trois premiers termes dans les solutions du groupe A″. On a donc, pour toute valeur entière et positive de l'exposant,

$$A''(2^\alpha m) = 3C(2^\alpha m),$$

en désignant par $C(2^\alpha m)$ le nombre des solutions de l'équation (10).
En réunissant les résultats obtenus, nous trouvons les deux formules

$$(\alpha) \qquad A(2m) = 2\left(2 - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right) S(m) + 3C(2m),$$

$$(\beta) \qquad A(2^\alpha m) = A(2^{\alpha-2} m) + 3C(2^\alpha m).$$

50. On détermine aisément les nombres $C(2m)$ et $C(2^\alpha m)$. Car les nombres p, q étant impairs dans l'équation (10), on peut poser

$$(A) \qquad p+q = 2x,\ p - q = 2y,\ p^2 + q^2 = 2(x^2 + y^2),$$

et par ces formules l'équation (10) se ramène à la suivante

$$2^{\alpha-1}m = x^2 + y^2 + t^2 + 2z^2,$$

dans laquelle les deux nombres x, y doivent former une somme impaire. Si α est >1, le nombre t doit être aussi impair, de sorte qu'un seul des trois premiers carrés est pair, comme dans l'équation

$$(10') \qquad 2^{\alpha-1}m = p^2 + q^2 + 4z^2 + 2t^2,$$

mais le carré pair peut former l'un quelconque des deux premiers termes, tandis que dans la dernière équation il est fixé au troisième terme. Le nombre $C(2^\alpha m)$ des solutions de l'avant dernière équation est donc le double du nombre $C(2^{\alpha-1}m)$ de la dernière, On a donc

$$C(2^\alpha m) = 2C\,(2^{\alpha-1}m) = 4\,C(2^{\alpha-2}m) = \ldots = 2^{\alpha-1}\,C(2m),$$

Quand $\alpha = 1$, l'équation (10) se ramène à la suivante

$$m = x^2 + y^2 + t^2 + 2z^2,\ \ x^2 + y^2 \equiv 1 \ (\text{mod. } 2),$$

Le nombre t doit être pair, de sorte qu'un seul des trois premiers carrés est impair, comme dans l'équation

$$m = x^2 + 4\,(y^2 + z^2) + 2t^2;$$

mais le carré impair peut former l'un quelconque des deux premiers, termes dans l'équation précédente, tandis que, dans celle-ci, il est fixé au premier terme. Le nombre $C(2m)$ est donc le double du nombre des solutions de la dernière équation. Or nous avons trouvé (n° 39) que ce dernier nombre est égal à $2S(m)$. On a donc

$$C(2m) = 4\,S(m),\ \ A(2m) = 2\,\left(8 - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right)\,S(m).$$

Au moyen de ces formules et de la formule (β), nous pouvons déterminer $A(2^\alpha m)$ pour une valeur quelconque de l'exposant α. D'abord on déduit de la formule (β), en y remplaçant $C(2^\alpha m)$ par $2^{\alpha-1}\,C(2m) = 2^{\alpha+1}S(m)$, la suite d'équations

$$A(2^\alpha m) = A(2^{\alpha-2}m) + 3.2^{\alpha+1}\,S(m)$$

$$A(2^{\alpha-2}m) = A(2^{\alpha-4}u) + 3.2^{\alpha-1}\,S(m)$$

$$A(2^{\alpha-4}m) = A(2^{\alpha-6}m) + 3.2^{\alpha-4}\,S(m)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

qui se termine par l'équation

$$A(2^3 m) = A(2m) + 3.2^4\, S(m), \quad \text{si } \alpha \text{ est impair}$$

et par l'équation

$$A(4m) = A(m) + 3.2^3 S(m), \quad \text{si } \alpha \text{ est pair.}$$

En ajoutant ces équations membre à membre, on trouve

1° Si α est impair et > 1,

$$A(2^\alpha m) = A(2m) + (2^{\alpha+2} - 2^3)\, 2S(m) = 2\left(2^{\alpha+2} - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right) S(m).$$

2° Si α est pair,

$$A(2^\alpha m) = A(m) + (2^{\alpha+2} - 2^2)\, 2S(m).$$

Or nous avons trouvé nos 47 et 48 que le nombre $A(m)$ est égal à $10\, S(m)$ on à $6\, S(m)$, suivant que m est de la forme $8l \pm 3$, ou de la forme $8l \pm 1$. On peut réunir ces deux résultats dans la formule unique

$$A(m) = 2\left(2^2 - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right) S(m).$$

On a donc pour toute valeur paire ou impaire de α

$$A(2^\alpha m) = 2\left(2^{\alpha+2} - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right) S(m).$$

Quoique cette formule ait été démontrée en supposant $\alpha > 1$, on reconnait par les exprsssions précédentes de $A(2m)$ et de $A(m)$, qu'elle est encore exacte lorsqu'on suppose $\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$.

SUR TROIS THÉORÈMES DE GAUSS

(Extrait d'une lettre adressée par le

P. THÉOPHILE PEPIN S. J.

à B. Boncompagni).

. . . .

Quant au premier théorème de Gauss sur le *caractère cubique* du nombre 2 relativement à un nombre premier $3n+1$, je ne l'ai jamais rencontré cité que comme cas particulier d'un théorème plus général de Jacobi. Je ne pense pas qu'il ait jamais été publié par Gauss; mais il se trouve peut-être dans le second volume des oeuvres complètes, où se trouvent réunis tous les travaux publiés ou inédits de Gauss, relatifs à la théorie des nombres. Ce théorème de Gauss n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général que l'on trouve dans la lettre écrite le 5 août 1827 par Jacobi à Legendre, lettre qui se trouve dans la correspondance de Jacobi et de Legendre, publiée d'abord par M.r Borchard dans son journal et reproduite dans le *Bulletin des sciences Mathèmatiques* etc. rédigé par M. Darboux etc., tome VIII, p. 287 et t. IX, p. 38, 51, 126. Le théorème de Jacobi dont je parle se trouve dans la première lettre (t. VIII, p. 297).

« Etant donné un nombre premier p de la forme $6n+1$, un autre nombre premier quelconque q sera résidu cubique de p toutes les fois que $4p$ sera de l'une des deux formes $L^2+27q^2M^2$, $q^2L^2+27M^2$.

Cependant il faut exclure la seconde forme dans le cas de $q=2$ et $q=3$. »

C'est-à-dire que si $q=2$ il faut se borner à la première forme et dire que 2 est toujours résidu cubique de p si $4p=L^2+27.4M^2$. Le nombre L doit être pair; posons donc $L=2x$ et $M=y$; nous avons $p=x^2+27y^2$. Ainsi 2 est résidu cubique de p toutes les fois que $p=x^2+27y^2$, ce qui est le théorème énoncé dans la lettre de Gauss. La lettre de Jacobi renferme encore d'autres théorèmes sur les résidus cubiques. Le *Bulletin* présente une faute d'impression; à la page citée 297, l. 20, au lieu de $(qx+m)^2+27M^2$, il faut lire $(qx+mM)^2+27M^2$. Ces divers théorèmes ont été publiés par Jacobi dans le Journal de Crelle, dans son Mémoire: *De residuis cubicis commentatio numerosa*, mais sans démonstration. Ces théorèmes, et avec eux celui de Gauss, ont été démontrés par Lebesgue dans la partie de ses *Recherches sur les nombres* consacrée aux résidus cubiques (Journal de Liouville, 1840). Ces théorèmes sont aussi démontrés dans mon Mémoire sur les lois de réciprocité relatives aux résidus de puissances (n.° 12 à 29).

Le second théorème, relatif au caractère biquadratique du nombre 2 relativement à un nombre premier $p=a^2+b^2$ a été complété par Gauss et publié

par lui dans ses deux célèbres Mémoires sur les résidus biquadratiques, qui ont paru dans les Mémoires de Goettingue en 1827, et qui se trouvent vers le commencement du second volume des oeuvres complètes. A la fin du premier Mémoire il est énoncé de la manière suivante:

« Le nombre 2 appartient au groupe A, B, C ou D suivant que $\frac{1}{2} b$ est de » la forme $4l$, $4l+1$, $4l+2$ ou $4l+3$ ».

Le nombre b est la racine du carré pair dans l'équation $p = a^2 + b^2$, A désigne le groupe des résidus biquadratiques, C celui des résidus quadratiques qui ne sont pas résidus biquadratiques, B et D celui du non-résidus quadratiques. Si donc 2 est résidu biquadratiques de p ou a $\frac{1}{2} b = 4y$, de sorte qu'en posant $a = x$, on a $p = x^2 + 64y^2$, ce qui est le second théorème énoncé dans la lettre à Sophie Germain.

Le même théorème est démontré et énoncé sous un autre forme dans le second Mémoire sur les résidus biquadratiques (Werke, etc., t. II, p. 96).

Lebesgue a démontré ce théorème et un grand nombre d'autres dans le Mémoire cité (Recherches sur les nombres), dans la quatrième partie sur les résidus biquadratiques.

Dirichlet a donné une démonstration très-simple du théorème de Gauss dans sa lettre à M. Stern, dont la traduction française a paru en 1859 dans le Journal de M. Liouville (2.^{ème} série, t. 4, p. 367). Le théorème de Gauss et la démonstration de Dirichlet sont mentionnés au n.° 42 de mon Mémoire sur les Lois de réciprocité.

Quant au troisième théorème énoncé dans la lettre à Sophie Germain, c'est un Lemme dont Gauss se sert pour sa troisième démonstration de la loi de réciprocité qui a lieu dans la théorie des résidus quadratiques. Il a été publié en 1817 par Gauss dans son Mémoire intitulé: « Theorematis fundamen- » talis in doctrinâ de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes » novæ », Mémoire qui se trouve vers le commencement du second volume des oeuvres complètes, et dont la première publication a eu lieu, je crois, dans les Mémoires de Goettingue; mais je ne suis pas certain de ce dernier point.

Ce Lemme et la troisième démonstration de Gauss sont exposés dans les *Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet*. Je cite la deuxième édition, de 1871. Le lemme est démontré au §. 43 (p. 94); il suffit de lire cette démonstration pour reconnaître que Gauss avait raison de dire à Sophie Germain qu' elle pourrait y parvenir sans trop de peine. Cette partie de la lettre de Gauss n'est pas très bien lisible; il faut la lire de la manière suivante:

$$A \ldots 1, 2, 3, \ldots \tfrac{1}{2}(p-1)$$

$$B \ldots \tfrac{1}{2}(p+1), \tfrac{1}{2}(p+3), \tfrac{1}{2}(p+5), \ldots p-1.$$

Car le groupe A doit comprendre les nombres compris entre 0 et $\frac{1}{2}p$, et le groupe B ceux qui sont compris entre $\frac{1}{2}p$ et p, exclusivement.

Ce Lemme de Gauss est cité par M. Liouville, mais sous une forme un peu différente, dans sa note: sur la loi de reciprocité dans la théorie des residus quadratiques (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 24, p. 577). – Monsieur Liouville désigne par α l'un quelconque des nombres du groupe A et il dit: « il suffit . . . de se rappeler le lemme de Gauss rela-
» tif aux produits αq réduits à leurs résidus minima, positifs ou négatifs par
» rapport au module p. En effet, soit μ le nombre de ces résidus qui por-
» tent le signe – »; M. Gauss prouve que

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\mu} \text{ »},$$

C'est à dire que q est résidu ou non-résidu quadratique de p suivant que μ est pair ou impair. Or ceux des produits dont les résidus minima absolus, compris entre $-\frac{1}{2}$, et $\frac{1}{2}p$ sont affectés du signe $-p$ sont précisément ceux dont les résidus positifs appartiennent au groupe B. Le nombre μ est donc égal au nombre β qui figure dans la lettre à Sophie Germain. Le nombre q est donc résidu quadratique de p si β est pair, et non-résidu si β est impair.

Il me semble que M. Serret a reproduit dans le second volume de son traité d'Algébre supérieure la troisième démonstration de Gauss, pour le théorème fondamental, et par conséquent le *lemme précédent* sur lequel cette démonstration repose (1).

Puisqu'il me reste encore un peu de place j'indiquerai la manière probable dont Gauss a été amené à trouver son premier théorème sur le caractère cubique du nombre (2).

Gauss a trouvé la relation

$$(1) \qquad 4p = (6n - 3(n' + n'' - 1) + 1)^2 + 27(n' - n'')^2,$$

où $n, n' n''$ sont trois nombres entiers qui satisfont à l'équation

$$(2) \qquad 1 + n + n' + n'' = \frac{p-1}{3}.$$

Si l'on compare l'équation précédente avec la suivante

$$(3) \qquad 4p = A^2 + 27B^2,$$

on voit que l'une des deux racines du nombre A^2 doit vérifier l'équation

(1) SERRET. Algèbre supérieure, 4me édition, t. 2, p. 102.

$$6n - 3(n' + n'' - 1) + 1 = A,$$

la quelle ajoutée à l'équation

$$3n + 3(n' + n'') = p - 1,$$

déduite de l'équation (2), donne

$$(4) \qquad 9n = A + p - 8.$$

Or si l'on designe par α, α' deux résidus cubiques de p, n exprime le nombre des solutions de l'équation $\alpha + \alpha' = -1 1 + Mp$. Les solutions où les valeurs de α et de α' sont inégales sont en nombre pair, puisque chacune de ces solutions est accompagnée de celle ou ces deux valeurs sont permutées. Or si l'on suppose $\alpha = \alpha' = K$, le nombre K est la solution unique de la congruence $2K \equiv -1$ (mod. p) et de plus, il doit être résidu cubique. Puisque -1 est aussi résidu cubique, cette solution unique n'est possible que si 2 est aussi résidu cubique de p. Le nombre n est donc impair si 2 est résidu cubique de p; il est pair si 2 est non residu cubique. Or on déduit de l'équation (4) que n est impair ou pair suivant que A est pair ou impair. Dans le premier cas on peut poser $A = 2x$, $B = 2y$ et l'on a le théorème de Gauss que 2 est résidu cubique de p toutes les fois que p est de la forme $p = x^2 + 27y^2$.

SUR QUELQUES CONGRUENCES BINOMES

EXTRAITS DE LETTRES ADRESSÉES

PAR LE P. TH.LE PEPIN, S. J.

À D. B. BONCOMPAGNI

I.

Extrait d'une lettre en date de « Lyon 17 mars 1883. »

. . . .
. . . . . Vous me demandez en outre, si l'on peut affirmer que:

« Si c est un nombre premier tel que $x^2 - k$ soit divisible par c, $k^{\frac{c-1}{2}} - 1$ sera divisible aussi par c, et que si cette condition est remplie il existera un nombre x (moindre que $\frac{1}{2} c$) tel que $x^2 - k$, soit divisible par c. »

Cette proposition est parfaitement exacte. La première partie est une conséquence immédiate du théorème de Fermat; car si l'on élève à la puissance $\left(\frac{c-1}{2}\right)^{me}$ les deux membres de la congruence

$$x^2 \equiv k \pmod{c},$$

on trouve

$$k^{\frac{c-1}{2}} \equiv x^{2\frac{k-1}{2}} \equiv x^{c-1} \equiv 1 \pmod{c},$$

Inversement, si cette condition est remplie et qu'on désigne par b une racine primitive du nombre c, l'indice du nombre k est un nombre pair 2μ, puisque c'est là le caractère des résidus quadratiques. On aura donc

$$b^{2\mu} \equiv k \pmod{c},$$

et l'on vérifiera la congruence

$$x^2 \equiv k \pmod{c},$$

en prenant $x = b^{\mu}$. C'est de cette manière que l'on résout la congruence

$$x^2 \equiv k \pmod{c}$$

lorsqu'on possède le *Canon Arithmeticus* de Jacobi, et que le nombre premier c ne dépasse pas les limites des tables renfermées dans cet ouvrage.

De même si k est résidu biquadratique, son *indice* sera multiple de 4, de sorte qu'en désignant par b la base du système *d'indices* pour le nombre premier c, on aura

$$b^{4\mu} \equiv k \pmod{c}.$$

On cherche dans la table d'indices, l'indice qui correspond au nombre donné k; si ce nombre et effectivement résidu biquadratique, comme on le suppose, cet indice sera un multiple de 4, 4μ; en le divisant par 4 et prenant dans la seconde table les quatre nombres qui correspondent aux indices

$$\mu,\ \mu + \frac{c-1}{4},\ \mu + 2\frac{c-1}{4},\ \mu + 3\frac{c-1}{4},$$

on aura les quatre racines de la congruence

$$x^4 \equiv k \pmod{c}.$$

II.

Extrait d'une lettre en date de « Lyon 28 février 1885 ».

. . . .

La méthode la plus simple pour résoudre les problèmes renfermés dans la deuxième question, et en général toutes les congruences binômes, est la méthode des indices, lorsqu'on a les Tables d'indices (*Canon arithmeticus* de Jacobi). Proposons nous par exemple de résoudre la congruence

$$x^3 \equiv 2 \text{ (mod. } 157).$$

Dans l'une des deux tables relatives au nombre premier 157, nous prendrons l'indice du nombre 2; cet indice est multiple de 3, puisque 2 est résidu cubique de 157. Soit donc $3h$ cet indice. Après l'avoir divisé par 3, nous cherchons dans l'autre table les nombres qui correspondent aux indices

$$h\,, \quad h+52\,, \quad h+104.$$

Ces trois nombres sont les trois racines de la congruence proposée.

En l'absence des tables d'indices, la méthode qui me semble la plus commode, mais qui n'est pas applicable dans tous les cas, est celle que Legendre a donnée dans le deuxième §. de la quatrième partie de sa *Théorie des nombres*, pour la solution du problème : « Trouver les valeurs de x qui » donnent une valeur entière au rapport $\dfrac{x^n - b}{a}$ ».

Dans le cas actuel on a $n = 3$, $b = 2$; $a = 157$. Il faut d'abord chercher le plus petit exposant m qui vérifie la condition $2^m \equiv \pm 1$ (mod. 157). On trouve $m = 26$, $2^{26} \equiv -1$ (mod. 157). On résout ensuite la congruence $3\pi \equiv 1$ (mod. 26), qui donne $\pi = 9$. On obtient une racine de la congruence proposée en prenant

$$x \equiv -2^9 \equiv -41 \text{ (mod. } 157).$$

On trouve ensuite les deux autres racines en multipliant -41 par les deux racines de la congruence

$$\frac{y^3 - 1}{y - 1} = y^2 + y + 1 \equiv 0 \text{ (mod. } 157).$$

Pour trouver ces racines, au lieu d'employer la méthode générale, exposée par Legendre à l'endroit cité, pour l'équation $\dfrac{x^n - 1}{a} = e$, il vaut mieux re-

courir aux deux formules

$$y \equiv \frac{\pm s - 1}{2},\ s^2 + 3 \equiv 0 \pmod{157}$$

car la décomposition $157 = 7^2 + 3\,(6)^2$ donne immédiatement

$$s \equiv \pm \tfrac{7}{6} \equiv \pm 25.$$

Les racines de la congruence $y^3 - 1 \equiv 0 \pmod{157}$ sont donc 1, 12 et -13. Les trois racines de la congruence proposée sont donc

$$x = -41,\ -41.12 \equiv -21,\ 41.13 \equiv 62.$$

Cette méthode est applicable à tous les nombres premiers ci-dessus indiqués, à l'exception de 307. Pour ce dernier module le plus petit exposant entier qui vérifie la condition $2^m \equiv \pm 1 \pmod{307}$ est $m = 51$, qui donne $2^{51} \equiv -1 \pmod{307}$. Comme 51 est multiple de 3, l'équation $3\pi - 51\varphi = 1$ est impossible.

La congruence $y^3 - 1 \equiv 0 \pmod{307}$ se résout au moyen des deux formules

$$y \equiv \frac{\pm s - 1}{2},\ s \equiv \sqrt{-3} \equiv \pm \frac{8}{9} \pmod{307},$$

qui donne $s = \pm 35$, $y = 17, -18$. Les trois racines de la congruence $y^3 - 1 \equiv 0 \pmod{307}$ sont donc

$$y = 1,\ 17,\ -18.$$

Il suffit donc de trouver une racine de la congruence $x^3 \equiv 2 \pmod{307}$; en multipliant cette racine par 17 et -18 on obtient les deux autres racines. Or pour trouver une racine nous essaierons la base $t = 10$ qui est non-résidu cubique et nous formerons les résidus des cubes, $t^3, t^6, t^9 \ldots$

Nous trouvons ainsi

$$t^3 = 1000 \equiv 79,\ t^6 \equiv 101,\ t^9 \equiv -3,\ t^{12} \equiv 70,$$

$$t^{15} \equiv 4,\ t^{18} \equiv 9,\ t^{21} \equiv 97,\ t^{24} \equiv -12,\ t^{27} \equiv -27$$

$$t^{24} \times t^{27} = t^{51} \equiv 17,\ t^{102} \equiv -18.$$

Ces résultats suffisent, car en comparant $t^{102} \equiv -18$ et $t^{18} \equiv 9$, nous voyons que le quotient t^{84} se réduit à -2, suivant le module 307. En divisant l'indice 84 par 3, on trouve 28; par conséquent on vérifie la congruence proposée $x^3 \equiv 2 \pmod{307}$ en prenant $x \equiv -t^{28} \equiv 270 \equiv -37$.

On vérifie effectivement que le quotient

$$\frac{(-37)^3 - 2}{307}$$

est un nombre entier. Les deux autres solutions s'obtiennent en multipliant -37 par 17 et par -18; on trouve ainsi $x = -15$ et $x = 52$.

III.

Extrait d'une lettre en date de « Lyon 14 mars 1885 ».

. . . .

. . . Soit p un nombre premier pour lequel on propose de résoudre la congruence

$$(1)\quad x^3 \equiv 2 \pmod{p}.$$

Si le nombre p est renfermé dans les limites des tables de Jacobi, on emploie la méthode suivante.

D'abord on déduit de la formule (1) la congruence

$$(2)\quad 3.\ \text{ind.}\ x \equiv \text{ind.}\ 2.\ (\text{mod.}\ p-1)$$

où l'on désigne par ind. x et ind. 2. l'indice du nombre x et l'indice du nombre 2. Dans les tables de Jacobi, l'indice de 2 est toujours dans la table « indices » dans la quatrième case de la deuxième ligne, dont les deux premières cases sont vides; la troisième case renferme le nombre $p-1$, qui est l'indice de 1, et la quatrième case renferme l'indice du nombre 2. Lorsque $p-1$ est divisible par 3 et que 2 est résidu cubique de p, l'indice du nombre 2 est un multiple de 3. C'est pourquoi je le désigne par $3h$. Ce nombre $3h$ se trouve dans la quatrième case de la deuxième ligne de la table « indices », immédiatement au dessous du nombre 2, dont il est l'indice.

Dans la Table relative au nombre 433, je prends dans la 4^me^ case de la 2^me^ ligne, le nombre $258 = 3h$, qui est l'indice de 2; je le divise par 3 et je trouve $h = 86$.

On déduit de la congruence (2), en posant ind. $2 = 3h$,

$$(3)\quad \begin{cases} \text{ind}x \equiv \dfrac{3h + l\,(p-1)}{3}\ (\text{mod.}\ p-1). \\ \text{ind}x \equiv h + l.\ \dfrac{p-1}{3},\ (\text{mod.}\ p-1). \end{cases}$$

Car on en déduit d'abord

$$\text{ind}x \equiv h\ \left(\text{mod.}\ \frac{p-1}{3}\right),\ \text{ind.}\ x = h + l\,\frac{p-1}{3},$$

et l'on donne à l les valeurs 0, 1, 2. qui déterminent pour l'indice de x trois valeurs non équivalentes entre elles suivant le module $(p-1)$; c'est ce qu'on indique par la formule

$$\text{ind}x \equiv h + l.\ \frac{(p-1)}{3}\ (\text{mod. } p-1).$$

Pour $p = 433$, on a $h = 86$, $\frac{p-1}{3} = 144$. Les trois valeurs de l'indice de x déterminées par la formule précédente sont donc

86, 230 et 374

Je passe maintenant à la table « Numeri » relative au nombre premier 433, afin d'y chercher les nombres qui correspondent aux trois indices précédents, et qui sont les trois racines de la congruence proposée.

Pour l'indice 86, je prends dans la table « Numeri » la dixième ligne, dont la première case renferme le nombre 8 des dizaines de l'indice ; je suis cette ligne jusqu'à la huitième colonne, qui porte en tête le chiffre 6 des unités. Le nombre 400 situé à l'intersection de cette 10^{me} ligne et de cette 8^{me} colonne, est le nombre qui correspond à l'indice 86.

Pour 230, je vais à la ligne dont la première case, dans la colonne I, renferme le nombre des dizaines 23 ; je suis cette ligne jusqu'à la deuxième case, située dans la colonne qui porte en tête le chiffre 0 des unités ; le nombre 394 situé dans cette ligne et cette colonne, est le nombre qui correspond à l'indice 230.

Enfin pour 374, je prends la ligne marquée du nombre 37 dans sa première case ; je suis cette ligne jusqu'à la 6^{me} case, dans la 6^e colonne, portant en tête le nombre 4 des unités ; je trouve le nombre 72 qui correspond à l'indice 374.

Ainsi les trois racines de la congruence proposée sont, 72, $394 \equiv - 39$, $490 \equiv - 33$ (mod. 433). Ce qui veut dire que tous les nombres entiers renfermés dans les trois formules,

$$433\,n + 72,\quad 433\,n - 39,\quad 433\,n - 33.$$

jouissent de la propriété de donner des valeurs entières à l'expression

$$\frac{x^3-2}{433}.$$

Dans la table relative au nombre 433, comme dans les tables relatives à tous les nombres pour lesquels Jacobi a construit son *Canon arithmeticus*, la base du système d'indices se trouve dans la table « Numeri » à la deuxième case de la $3^{ème}$ colonne, immédiatement au dessous du nombre 1. Dans cette case je trouve le nombre 10 ; j'en conclus que 10 est la base du système d'indices de Jacobi, pour le module 433, puisqu'il a l'unité pour indice.

Il y a la plus grande analogie entre les indices et les logarithmes. Cette analogie vient de ce que l'indice α d'un nombre a dans un système dont la

base est t, et le module, un nombre premier p, est défini par la congruence binôme

$$t^{\text{ind}.a} = t^{\alpha} \equiv a \pmod{p},$$

de même que le logarithme vulgaire du nombre a est défini par l'équation binôme

$$(10)^{\log.a} = a$$

Si l'on veut résoudre par logarithme une équation binôme

$$x^n = \text{A},$$

on calcule le logarithme de a par la formule

$$n \log x = \log \text{A}$$

De même si l'on veut résoudre la congruence binôme

$$(1) \qquad x^n \equiv \text{A} \pmod{p}$$

au moyen des Tables d'indices, on déduit de la congruence proposée, la congruence relative aux indices

$$(2) \qquad n.\text{ind}.x \equiv \text{ind}.\text{A}. \pmod{p-1}.$$

Si n est premier avec $p-1$, la congruence (2) admet toujours une racine, et une seule. Dans ce cas la congruence proposée, (1), admet une racine, et une seule. Si n est diviseur de $p-1$, et que l'indice de A ne soit pas divisible par n, les congruences (2) et (1) sont impossibles; si, dans le même cas où n est diviseur de $p-1$, le nombre A est résidu de puissance $n^{\text{ième}}$, son indice est un multiple de n que je désigne par nh. Dans ce cas on deduit de la formule (2)

$$\text{ind}x \equiv h\left(\text{mod. } \frac{p-1}{n}\right); \ \text{ind}x = h + l.\ \frac{p-1}{n},$$

en désignant par l un nombre entier quelconque.

Mais comme deux indices dont la différence est divisible par $(p-1)$ sont équivalents, on se contentera de donner à l les valeurs $0, 1, 2, \ldots n-1$, qui donnent à l'indice de x des valeurs non équivalentes suivant le module $(p-1)$. C'est ce qu'on exprime au moyen de la congruence

$$(3) \qquad \text{ind}x \equiv h + l.\ \frac{p-1}{n} \pmod{p-1}.$$

On conclut de là que, dans le cas où, n étant diviseur de $p-1$, le nombre A est résidu de puissance $n^{\text{ième}}$ relativement au module p, la congruence (1) admet n racines distinctes, c'est-à-dire n racines non équivalentes suivant le module p.

Il me reste à démontrer comment la congruence (2) est une conséquence de la congruence (1), en vertu de la définition des indices.

Les indices du nombre A et du nombre x, dans un système dont la base est t et le module, une puissance d'un nombre premier p, sont les exposants entiers qui vérifient respectivement les deux congruences

$$t^{\text{ind.}A} \equiv A,\ t^{\text{ind.}x} \equiv x \pmod{p^\varpi = M}.$$

En substituant ces expressions de x et de A dans la congruence proposée

$$x^n \equiv A \pmod{p^\varpi = M},$$

on a

$$t^{n.\text{ind}x} \equiv x \ \ t^{\text{ind.}A}$$

$$(4) \qquad t^{(n\text{ind}.x - \text{ind}.A)} \equiv 1 \pmod{M}.$$

Or le nombre t étant une racine primitive pour le module $M = p^\omega$, les seules puissances de t qui soient équivalentes à l'unité suivant le module M sont celles dont l'exposant est un multiple du nombre $\varphi(M) = p^\omega\left(1 - \frac{1}{p}\right)$. La formule (4) entraine donc la congruence

$$n\text{ind}\,x \equiv \text{ind}A \left(\text{mod}\varphi(M) = p^\varpi\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right).$$

Lorsque $\varpi = 1$, on a $M = p$, $\varphi(M) = p - 1$. Dans ce cas, la congruence que nous venons d'obtenir, est précisement la congruence (2) qu'il s'agissait de démontrer.

IV.

EXTRAIT D'UNE LETTRE EN DATE DE « LYON 20 MARS 1885 ».

. . . .

. . . . Vous me demandez ensuite « quelles seraient les formules générales qui pourraient donner pour la même valeur de h, toutes les autres racines de la même congruence ($x^3 \equiv 2 \pmod{p}$), c'est-à-dire toutes les autres valeurs de x qui rendraient entier $\frac{x^3 - 2}{p}$ pour la même valeur de p. »

On suppose 2 résidu cubique de p et l'on désigne par $3h$ l'indice de 2. J'ai démontré dans ma lettre du 14 mars que les indices des trois racines de la congruence

$$(1) \qquad x^3 - 2 \equiv 0 \pmod{p}$$

sont les trois nombres

$$h,\ h + \frac{p-1}{3},\ h + 2\frac{p-1}{3}.$$

On obtient ensuite les racines cherchées en prenant dans la Table « Numeri »

relative au module p, les trois nombres x', x'', x''' qui correspondent à ces trois indices. Toutes les valeurs de x comprises dans les trois formules

$$x = mp + x', \ x = mp + x'', \ x = mp + x''',$$

dans lesquelles on désigne par m un nombre entier quelconque, rendent entier le quotient $\frac{x^3 - 2}{p}$. Je ne connais pas d'autres formules générales pour trouver les racines de la congruence (1) au moyen des tables d'indices.

Je ferai seulement remarquer que

$$0, \frac{p-1}{3}, \quad 2\frac{p-1}{3}$$

sont les indices des trois racines de la congruence

$$(2) \qquad y^3 - 1 \equiv 0 \ (\text{mod. p}).$$

Les formules précédentes montrent que les indices des trois racines de la congruence (1) se déduisent de l'indice h de l'une d'elles, en lui ajoutant les indices des trois racines cubiques de l'unité. En passant des indices aux nombres, on obtient ce théorème: « Les trois racines de la congruence (1) se déduisent de l'une d'elles en la multipliant par les trois racines de la congruence (2). » C'est ce théorème que j'ai appliqué dans les solutions que j'ai eu l'honneur de vous adresser. On voit du reste aisément l'analogie de ce théorème avec le suivant: « Les trois racines de l'équation $x^3 - 2 = 0$ se déduisent de l'une d'elles en la multipliant par les trois racines cubiques de l'unité. »

V.

EXTRAIT D'UNE LETTRE EN DATE DE « LYON 29 MARS 1885 ».

Vous me demandez ensuite, quelle est la manière la plus simple de démontrer 1° qu'en désignant par $3h$ l'indice de 2 relativement à un nombre premier $p = 6l + 1$ dont 2 est résidu cubique, les indices des racines de la congruence

$$x^3 \equiv 2 \ (\text{mod. } p)$$

sont

$$h, \ h + \frac{p-1}{3}, \ h + 2\ \frac{p-1}{3},$$

et que ces racines sont les « numeri » correspondant à ces indices.

2° que les indices des racines de la congruence

$$x^4 \equiv 2 \ (\text{mod. } c)$$

(en supposant l'indice de 2 égal à 4μ) sont

$$\mu, \mu + \frac{c-1}{4}, \mu + 2\frac{c-1}{4}, \mu + 3\frac{c-1}{4},$$

et que ces racines sont les « numeri » correspondants à ces indices.

La démonstration qui semble la plus simple est celle qui est fondée sur cette propriété des racines primitives d'un nombre premier p, d'appartenir à l'exposant $p-1$, du sorte qu'une congruence de la forme

$$t^m \equiv 1 \pmod{p}$$

ne soit possible pour une racine primitive t, qu'à la condition que l'exposant m soit divisible par $p-1$.

Prenons d'abord la congruence

$$x^3 \equiv 2 \pmod{p},$$

dans laquelle on suppose 2 résidu cubique de $p = 6k + 1$. Soit t la racine primitive de p choisie comme base d'un système d'indices. On aura

$$t^{\text{ind. } x} \equiv x \text{ et } t^{\text{ind. } 2} \equiv 2 \pmod{p}.$$

En substituant ces expressions de x et de 2 dans la congruence proposée, on en déduira

$$t^{3\text{ ind. } x} \equiv t^{\text{ind. } 2},\ t^{3\text{ ind. } x - \text{ind. } 2} \equiv 1 \pmod{p}$$

Comme les seules puissances de t qui soient équivalentes à l'unité suivant le module p, sont celles dont les exposants sont multiples de $p-1$, la dernière formule exige que l'on ait

$$3 \text{ ind. } x \equiv \text{ind. } 2. \pmod{p - 1 = 6k}.$$

Cette congruence est impossible si l'indice de 2 n'est pas multiple de 3; dans le cas contraire, supposé ici, posons ind. $2 = 3h$. On déduit de la dernière formule

$$\text{ind. } x = h + n\frac{p-1}{3},$$

en designant par n un nombre entier quelconque..

Comme les indices qui ne diffèrent entre eux que par des multiples de $p-1$ sont équivalents, il suffit de donner à n les trois valeurs 0, 1, 2. Par conséquent l'indice de x admet trois valeurs non équivalentes

$$h, h + \frac{p-1}{3}, h + 2\frac{p-1}{3};$$

et les nombres qui correspondent à ces indices sont les trois racines de cette équation.

De même si l'on désigne par c un nombre premier $8l + 1$ et qu'on propose de résoudre la congruence

$$x^4 \equiv 2 \pmod{c.}$$

on prendra dans les tables d'indices l'indice du nombre 2. Si l'on désigne par t la base du système d'indices, on aura, comme dans le cas précédent

$$t^{\text{ind.}2} \equiv 2, \quad t^{\text{ind.}x} \equiv x \pmod{c.}$$

et par conséquent

$$t^{4\text{ind.}x} \equiv t^{\text{ind.}2} \quad t^{4\text{ind.}x - \text{ind.}2} \equiv 1 \pmod{c.}$$

Comme les seules puissances de t qui se réduisent à l'unité, suivant le module c, sont celles dont les exposants sont multiples de $c-1$, la dernière formule exige que l'on ait

$$4.\ \text{ind.}\ x - \text{ind.}\ 2 = n.\ (c-1),$$

n désignant un nombre entier. Cette congruence est impossible si l'indice de 2 n'est pas multiple de 4; s'il est multiple de 4, posons : ind. $2 = 4\mu$. On a

$$\text{ind.}\ x = \mu + n.\ \frac{c-1}{4}$$

On obtient tous les indices non équivalents renfermés dans cette formule en donnant à n les quatre valeurs 0, 1, 2, 3. Par conséquent les nombres qui vérifient la congruence proposée sont ceux qui correspondent aux indices

$$\mu,\ \mu + \frac{c-1}{4},\ \mu + 2\frac{c-1}{4},\ \mu + 3\ \frac{c-1}{4}.$$

COMUNICAZIONI

De Rossi Prof. M. S. – *Presentazione di un suo lavoro*:

Il Prof. Michele Stefano de Rossi chiamò l'attenzione dell'Accademia sopra il 1° fascicolo 1885 del Bullettino del Vulcanismo italiano, nel quale egli ha pubblicato un primo resoconto di tutti i fatti sismici avvenuti in Italia durante il periodo dei terremoti di Spagna. Indicando il contenuto di quell' articolo ed additandone i dati confermanti le teorie da esso già esposte altre volte, e massime nell'opera sua *Meteorologia endogena* relative alla importanza delle fratture geologiche nei terremoti ed all' azione evidente in essi del vapore d'acqua, confrontò codesti risultati con gli studi speciali sul medesimo argomento ora pubblicati dal Daubrée in Francia nella *Revue des deux Mondes* e dalla commissione Sismologica di Spagna nel suo primo resoconto ufficiale del disastroso fenomeno testè avvenuto nell'Andalusia. La concordia mirabile di tutti i fatti e dei ragionamenti sopra essi stabiliti indicano fino all' evidenza che la scienza intorno al misterioso argomento dei fenomeni geodinamici oggi ha trovato una via sicura per progredire specialmente per la concordia colla quale si vengono organizzando i metodi di osservazione.

Castracane, Conte Ab. F. – *Presentazione di un'opera del Prof.* G. B. Carnoy:

Il Presidente presentò all'Accademia in nome del socio corrispondente Sig. Canonico Gio: Battista Carnoy professore nella Università cattolica di Lovanio la prima parte di un' opera che questi sta pubblicando sotto il titolo « *La Biologie cellulaire, étude comparée de la cellule dans les deux regnes* ». Lo zelo con il quale l'Autore attende a promuovere gli interessi della scienza lo portò ad istituire sin dal 1876 un laboratorio di microscopia applicata alla Citologia ossia studio della cellula e della sua biologia; il quale studio riguardando l'elemento precipuo di ogni essere organizzato abbraccia ambi i regni, il vegetale e l'animale, interessando egualmente il botanico e il zoologo, il medico e il patologo. Questa prima parte dell' opera comprende la tecnica microscopica; e descritto dettaglia-

mente il microscopio semplice e il composto vengono ricordate le qualità che si richiedono in ogni sua parte. In seguito si ragiona dei diversi accessori, sia che riguardano l'illuminazione a luce bianca oppure monocromatica o con raggio polarizzato o con l'applicazione dell'analisi microspettrale. Vengono pure indicati i differenti metodi di micrometria e di determinazione degli angoli dei cristalli, ed i metodi di riproduzione delle imagini microscopiche con l'aiuto della camera lucida o con l'applicazione diretta della fotografia.

Lo studioso in seguito viene ammaestrato nella microchimica, apprendendo le proprietà e l'uso dei diversi reagenti chimici e delle colorazioni, dalle quali si ottiene il rendere più distinti i diversi tessuti e vengono somministrate indicazioni utilissime sulla costituzione chimica delle diverse parti di un dato organismo. Finalmente l'istruzione tecnica termina con ottimi suggerimenti sulla scelta dei materiali di studio, su i processi microtomici e sul modo di fare le preparazioni. Si passa poi a dare le nozioni generali sulla cellula, accennando alla storia della dottrina cellulare, dividendola in tre epoche, cioè dal 1865 al tempo di Roberto Nooke e di Marcello Malpighi sino ai nostri giorni; e quindi si viene a parlare del nucleolo della cellula. Ogni volta che si viene a trattare di un argomento speciale, a questo precede la bibliografia indicando quegli autori, che in più special modo trattarono della materia. Ogni argomento viene illustrato con numerose buone figure intercalate al testo; e in una parola nulla manca per fare di questo un manuale e un testo, al quale utilmente ricorrerà chiunque con il mezzo del microscopio vuole indagare l'intima costituzione e natura di un organismo.

BONCOMPAGNI, D. B. – *Presentazione di memorie manoscritte e di pubblicazioni* :

D. B. Boncompagni presentò da parte del S. C. Sig. Ammiraglio De Jonquières un esemplare manoscritto d'una sua memoria intitolata: « Étude » sur les équations algébriques numériques dans leur relation avec la Règle » des signes de Descartes », già pubblicata negli Atti relativi alla seconda sessione di questo medesimo anno; e da parte del S. C. P. Pepin un esemplare manoscritto di ciascuno dei suoi lavori seguenti:

1. « Étude sur quelques formules d'analyse utiles dans la théorie des nombres »,

2. « Sur trois théorèmes de Gauss »,

3. « Sur quelques congruences binomes ».

Presentò inoltre un esemplare del fascicolo intitolato « BULLETTINO || DI || BIBLIOGRAFIA E DI STORIA || DELLE || SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE || TOMO XVII || LUGLIO 1884 » ecc., e da parte del sig. prof. Angelo Genocchi un esemplare di ciascuna delle seguenti tirature a parte:

ALCUNE ASSERZIONI || DI C. F. GAUSS || CIRCA LE FORME QUADRATICHE YY + n ZZ || NOTA || DI A. GENOCCHI || ESTRATTO DAL « BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA || DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE » || TOMO XVII, || APRILE 1884 || ROMA || TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE || Via Lata, n 3 || 1884.

TEOREMI DI SOFIA GERMAIN || INTORNO || AI RESIDUI BIQUADRATICI || NOTA || DI ANGELO GENOCCHI || ESTRATTO DAL « BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA || DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE || TOMO XVII. — APRILE 1884. || ROMA || TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE || Via Lata, n. 3 || 1884.

DUE LETTERE || DI || C. F. GAUSS || PUBBLICATE || DAL || Principe B. BONCOMPAGNI || NOTA || DI || A. GENOCCHI || TORINO || ERMANNO LOESCHER || Libraio della R. Accademia delle scienze || 1884, in 8° di 7 pagine nella 2ª delle quali si legge: Estr. dagli *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino*, vol. XX. || Adunanza del 30 novembre 1884 || TORINO, STAMPERIA REALE || di G. B. Paravia e C.

De Rossi, prof. M. S. – *Presentazione d'un opuscolo* del prof. D. Ragona: Il Segretario presentò per parte del socio corrispondente prof. D. Ragona un suo secondo opuscolo sul clima di Assab.

COMITATO SEGRETO

L'Accademia riunitasi in Comitato segreto procedette alla votazione per la nomina a soci corrispondenti dei signori prof. Angelo Genocchi, prof. Giuseppe Marcalli, Prof. Stefano Rossi, Monsignore Bartolomeo Grassi Landi. Vennero tutti eletti a pieni voti.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Ordinari: Conte Ab. F. Castracane, *Presidente*. – Prof. A. Statuti – Prof. F. Ladelci – Dott. M. Lanzi – Prof. M. Azzarelli – P. F. Ciampi – Prof. V. De Rossi Re – P. F. S. Provenzali – Cav. F. Guidi – Cav. G. Olivieri – D. B. Boncompagni – P. G. Lais – Prof. M. S. de Rossi, *Segretario*.

La seduta apertasi legalmente alle ore 5 p. venne chiusa alle ore 7 p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.* — Vol. XX, disp. 1ª (Novembre 1884). Torino 1885. In 8.°
2. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXII, 1884—85. Serie IV, Rendiconti. Vol. I. Fasc. 8. — Roma, 1885. In-4.°
3. *Boletin de la Academia nacional de ciencias en Córdoba.* — T. VII. — Entr. 3ª T. VIII, Entrega 1ª. Buenos Aires, 1884. In 8.°
4. *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de S.t-Pétersbourg.* T. XXIX, — n.° 3. 1. 1884. In-4.°
5. *Bulletin de la Société académique Franco-Hispano-Portugaise de Toulouse.* — T. V, 1884, n. 1, 2. — Toulouse, 1884. In-8.°
6. *Bullettino della Reale Accademia Medica di Roma.* — A. XI, n.° 1. Roma, 1885. In 8.°
7. CARNOY (J. B.) — *La biologie cellulaire.* — Fasc. 1. — Lierre, 1884. In-8.°
8. *Crónica cientifica.* — A. VIII, n. 174—176. Barcelona, 1885. In 8.°
9. GENOCCHI (A.) — *Due lettere di C. F. Gauss pubblicate dal Principe B. Boncompagni.* Torino, 1884. In-8.°
10. —— *Teoremi di Sofia Germain intorno ai residui biquadratici.* Roma, 1884. In-4.°
11. —— *Alcune osservazioni di C. F. Gauss circa le forme quadratiche* YY ± nZZ. — Roma, 1884. In-4.°
12. *Journal de la société physico-chimique russe.* — T. XVII. — n.° 2. — St. Pétersbourg, 1885, in-8.°
13. KUGELGEN (P.) — *Ein blick auf das Unterrichtswasen Russlands im XVIII. Jahrhundert bis 1782 von Graf D. A. Tolstoi.* — St. Petersbourg, 1884. In-8°
14. *La Civiltà Cattolica.* — A. XXXVI, Serie XII, Vol. IX. — quad. 834, Vol. X. quad. 835, 836. — Firenze, 1885. In-8.°
15. LE JOLIS (A.) — *Fleurs anormales de « Cytisus laburnum » et « Digitalis Purpurea ».* — Cherburg (s. a.) in-8.°
16. MANSION (P.) — *Recensione di pubblicazioni di B. Boncompagni.*
17. *Mémoires de l'Académie de Stanislas* 1883. — Anno CXXXIV, Serie V, T. 1. — Nancy, 1884. In-8.°
18. *Memorias de la Real Academia de ciencias naturales y artes de Barcelona.* — N. 1 y 2. (Segunda Época). T. 1. — N. 3 y 4, 5, 6, 7 (Tercera Época) T. 1. n. 8. Barcelona, 1879, 1883—84. In-8.°
19. *Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino.* — Serie Seconda, T. XXXVI. — Torino MDCCCLXXXV, in-4°.
20. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle. Partie technique.* — Deuxième série. T. XI, 3e e 4e livraison. Paris, 1885. In-8.°
21. —— *Partie littéraire.* — Deuxième série, T. XXI, 3e et 4e livraisons. Paris, 1885. In-8.°
22. RAGONA (D.) — *Sul clima di Assab,* 2° articolo. — Modena, 1885. In-8,°
23. *R. Comitato Geologico d'Italia,* 1885. — Bollettino n. 1 e 2. Roma, 1885. In-8.°
24. *Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche* (Sezione della Società Reale di Napoli). A. XXIV, fasc. 1, 2. — Napoli, 1885, in-4.°
25. *Rivista di Artiglieria e Genio.* — A. 1885, Febbraio. Roma, 1885. In-8.°
26. *Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte.* — Jah. VII. — Heft I—IV. — Stuttgart, 1884, in-4.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE VIª DEL 17 MAGGIO 1885

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

SOPRA UNA MEMORIA DEL CH. PROFESSORE P. M. GARIBALDI

DIRETTORE DEL R. OSSERVATORIO DELL'UNIVERSITA' DI GENOVA

INTITOLATA

« VARIAZIONI ORDINARIE E STRAORDINARIE DEL MAGNETE DI DECLINAZIONE » OSSERVATE IN GENOVA NEL PERIODO 1872—84. »

NOTA
DEL P. G. STANISLAO FERRARI S. J.

Ho l'onore di presentare all'Accademia un importante lavoro del Ch. Prof. Garibaldi intorno alle variazioni ordinarie e straordinarie del magnete di declinazione osservate in Genova nel periodo 1872–84. Non mi trattengo qui a darne un sunto generale per ciò che riguarda le variazioni ordinarie poichè esso conferma quanto era già noto dai lavori di Sabine di Wolf e del P. Secchi quanto alla loro correlazione coll'andamento periodico dei massimi e minimi delle macchie solari anzichè coll' andamento dei massimi e minimi della temperatura.

Ciò che in quel lavoro più mi colpì, com'era ben naturale, si fu la parte che concerne alle straordinarie perturbazioni o burrasche magnetiche, conciossiachè volle il Ch. Autore con gentile pensiero cominciare la trattazione di quest'argomento col richiamare l'attenzione dei dotti sopra quanto io scriveva in proposito fino dal 1867 e riprodusse letteralmente (pag. 17–48)

le due leggi che comprendono il risultato delle mie indagini del periodo di 17 anni che cioè: « 1° Allora quando si hanno grandi alternative nelle macchie solari, le perturbazioni magnetiche accadono prossimamente all'epoca della massima e minima escursione che rappresenta il numero delle macchie; 2° negli anni di minimo e di deboli variazioni (non maggiori di uno a tre) nel numero delle macchie, le perturbazioni, oltre all'essere generalmente assai più deboli, avvengono principalmente quando nel Sole, di pulito che era, si formano alcune macchie ».

Non posso a meno di non provare una viva soddisfazione vedendo che i miei deboli sforzi in proposito formano ormai anche a giudizio di molti scienziati nostrani e stranieri, un notissimo patrimonio nella scienza.

Ciò poi che forma il carattere tutto speciale del lavoro del Prof. Garibaldi si è lo studio che esso fece intorno alle relazioni fra le variazioni normali delle declinazioni diurne ed il numero normale delle perturbazioni o burrasche magnetiche e come rilevasi dagli specchi numerici e dalle curve grafiche che riassumono il risultato delle sue ricerche apparisce manifesta la conclusione colla quale pon termine alla sua memoria ed è: « che le » perturbazioni o burrasche magnetiche sono regolate dalla medesima legge » fisica che governa le variazioni dell'ago e che – come queste – hanno » la loro causa e misura nelle macchie od energia solare e si svolgono in » un eguale e comune periodo » (pag. 54).

Un fatto però degno di nota emerge dal lavoro dell'illustre professore il quale non lascia di accennarlo ed è manifesto specialmente dall'andamento della curva grafica (pag. 53) che cioè *tanto* per le declinazioni magnetiche mensili *quanto* per le perturbazioni normali di mese si ha un *massimo* spiccatissimo pel mese di Aprile, a preferenza di ogni altro ed anche dei mesi estivi ne' quali è maggiore la presenza del sole sull'orizzonte.

Questo fatto vien confermato dal quadro che pubblicai nel 1877 pel periodo di 17 anni (pag. 19) sul quale però non feci speciale attenzione occupato com'era a considerare la cosa sott'altro aspetto. Ora però che il veggo sì chiaro nel lavoro del Garibaldi godo di potergli prestare una luminosa conferma aggiungendo al suo periodo 1872–84 il mio periodo 1860–76. Siccome però in questi due periodi si hanno in comune gli anni 1872–76, resta un periodo complessivo di anni 23 che non è certo da disprezzarsi.

Riandando gli annali della scienza su tale argomento trovo che il massimo d'Aprile venne eziandio chiaramente rilevato dal celebre Quetelet (1) nel

(1) Annales de l'Observatoire de Bruxelles Tom. XIII (Sur la Physique du Globe) pag. 144—146.)

disputare le osservazioni di Bruxelles e di Monaco, che vengono confermate da quelle di Airy per l'osservatorio di Greenwich. Il periodo da essi esaminato si estende dal 1841 al 1857 che aggiunto al precedente forma un periodo totale di ben 42 anni e però di somma importanza e tale da costituire veramente una legge.

Il Ch. Prof. Garibaldi (pag. 22) colpito da tale differenza fra i valori di Aprile e quelli assai minori del maggio successivo emise il dubbio « non » forse nel maggio siano preponderanti (son sue parole) fattori tellurici o » cause speciali che vittoriosamente contrastano coll'influenza del sole che » continui ad avvicinarsi aumentando la sua declinazione Nord. »

Considerando invece il Quetelet chè se dalla lunghezza del giorno e della temperatura, potrebbe in qualche modo derivare la prevalenza della *variazione mensile* della declinazione, nei mesi nei quali il sole occupa l'emisfero Nord, pure il *massimo di Aprile* dimostra evidentemente essere per lo meno incompleta la ragione assegnata. Propose quindi questa legge : « la » grandezza della variazione magnetica mensile essere in ragione diretta » della potenza vegetativa della terra » in guisa che la temperatura non possa ritenersi come diretta misura dell'una e dell'altra potenza, la magnetica cioè è la vegetale.

Da quanto si è detto apparisce qual campo vastissimo ancora resti per le profonde investigazioni dei dotti le quali certamente su tale materia debbono estendersi all'esame della relazione fra i fenomeni solari e magnetici, e specialmente intorno al modo di agire del sole rispetto al magnetismo terrestre, alla ricerca cioè di questo vero se il sole sia causa *diretta* ovvero soltanto *indiretta* dei fenomeni del magnetismo terrestre verità ancora in buona parte nascosta alle nostre indagini ma che vogliamo sperare verrà fra non molto svelata dagli sforzi riuniti di tanti scienziati che si dedicarono a quello studio.

Termino questa breve nota col far riflettere essere però un tale studio non esclusivo soltanto della *fisica terrestre*, sibbene doversi fare in accordo coll'*Astronomia-fisica* poichè è ormai indubitato, specialmente dal fatto delle variazioni *secolari* del magnetismo terrestre, e della sua correlazione coi periodi delle macchie solari, che il magnetismo terrestre esige per ispiegazione una causa cosmica e però da cercarsi al di fuori della cerchia ristretta dal nostro globo.

OSSERVAZIONE SU UNA DIATOMEA FOSSILE, RELATIVA AL PROCESSO DI RIPRODUZIONE.

Chiunque intende applicarsi allo studio della Natura, ed in particolar modo se voglia prendere a soggetto di speciali ricerche una serie di forme organiche, dovrà avanti tutto porre ogni cura a riconoscere le leggi biologiche di quelle, non solamente per ciò che riguarda la loro struttura, ma più ancora per riconoscere il processo di riproduzione. Quanto alle Diatomee e alla loro biologia i primi a discorrerne furono Ehrenberg e Kützing, ma l' ignoranza della lingua tedesca mi ha vietato il consultarli nelle pubblicazioni originali. Fortunatamente per me non fu l'istessa cosa con la *Synopsis of the British Diatomaceæ* di Guglielmo Smith e con la *History of Infusoria, including the Desmidiaceæ, and the Diatomaceæ*, di Andrea Pritchard, potendo io decifrare con sufficiente facilità la lingua inglese. Questo mi offrì ancora modo di prendere cognizione di un più recente lavoro su la biologia delle Diatomee del ch. D.r Pfitzer con il titolo « *Untersuchungen uber bau und entwichlung der bacillarieen* » essendone stata data una accurata analisi dall'illustre Naturalista Irlandese Eugenio O'Meara nel *Quarterly Journal of Microscopical science*. Tutti i sunnominati Autori concordano nel dare alle Diatomee la facoltà di moltiplicare per divisione cellulare, mentre che si riproducono per conjugazione. Taluni però riguardano la divisione o temnogenesi quale vera riproduzione, quando quel processo non è altro che la moltiplicazione della cellula e l'estensione della vita individuale, con la quale ha luogo la costituzione e lo sviluppo di qualsiasi tessuto organico, animale o vegetale.

Ma se tutti sono concordi nel riconoscere alle Diatomee i due processi, la moltiplicazione cioè o autofissione, e la riproduzione sessuale o processo di conjugazione, v'è non poco dissenso sul modo con il quale la conjugazione ha luogo, o a dir più vero si è discordi in riguardo al risultato della conjugazione. Alcuni nell'idea preconcetta della divisione e suddivisione della cellula, con la quale vedesi procedere lo sviluppo e l' incremento di qualsiasi tessuto organico, vollero ridurre in ultima analisi a tale processo il risultato della coniugazione, e appoggiati a talune poche osservazioni eseguite su qualche genere e specie di Diatomee immaginarono (duce fra questi il ch. D.r Pfitzer) che la conjugazione di due frustuli di quelle

portasse alla formazione di uno o di due sporangi, nel cui seno avesse luogo la produzione di uno o di due frustuli sporangiali della maggior dimensione, destinati a ricondurre la serie decrescente degli individui, risultanti dalla temnogenesi o autofissione, alla misura tipica, punto di partenza della nuova serie o progenie. Tale ingegnosa teoria, avendo il suo fondamento su qualche osservazione di fatto, incontrò grande favore presso molti distinti Botanici Tedeschi, i quali senza troppo discutere il caso nelle Diatomee accettarono quella teoria, perchè così la riproduzione di quelle risultava omologa allo sviluppo di qualsiasi tessuto organico, nel quale riconoscevasi un semplice aggregato di cellule, costituenti ciascuna altrettante individualità.

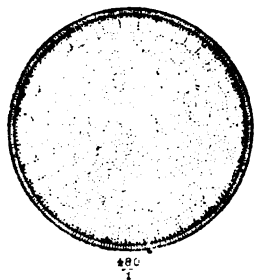
Nella 2.ª sessione del Congresso internazionale botanico tenuto in Firenze nel 1874, mi credetti in dovere di sottoporre al giudizio di quell'autorevolissimo Consesso il mio sentimento contrario a quella teoria, mentre in uno studio così poco seguito della Diatomologia interessa grandemente, che i pochi cultori di tale studio si adoperino ad impedire, che idee non troppo consentanee al vero passino indiscusse, le quali potrebbero venire ripetute da quelli, i quali dovendo far cenno a tali microrganismi, potrebbero ripeterle, sedotti dalla autorità di Quegli, che le emise. In quella solenne occasione pertanto e avanti un consesso di tanta autorità in materia, esposi le mie idee su l'argomento, adducendo numerose prove in confutazione di quella teoria. Fra i diversi argomenti addotti di ragioni intrinseche, dimostrai come l'autofissione, che dovrebbe far seguito e prendere per punto di partenza il frustulo sporangiale risultante dal processo di conjugazione sessuale e dall'auxospora, non possa aver luogo nel più grande numero di generi, cioè 1º in quelli nei quali le due valve sono dissimili come nelle Cocconeidee: 2º in quelle che avendo le due valve eguali, queste però costantemente si dispongono in modo da incrociare gli assi di figura, come i *Campylodiscus*, 3º finalmente quelli, che mai dispongono le due valve in condizione omologa e parallela, come avviene degli *Asteromphalus* e *Asterolampra*, nei quali i raggi delle due valve si alternano in luogo di sovrapporsi. E questo mio argomento viene confermato dal fatto, che fra i molti casi di autofissione o temnogenesi registrati dalla Scienza sin ora non incontrasi un solo caso, che vi faccia eccezione. Il medesimo argomento io confortavo con la testimonianza dell'illustre Micrografo Inglese D.r Wallich, il quale riguarda il frustulo sporangiale quale forma mostruosa, con la quale cessa la serie decrescente. Alla quale opinione si aggiunge la gravissima autorità dell'Americano Professore Hamilton Laurence Smith, il quale

nota come lo *Stauroneis Phœnicenteron*. E, non è altro che la forma sporangiale dello *St. gracilis*. E, al quale quello incontrasi unito, senza che mai si abbiano da osservare forme minori del primo tipo.

Nella medesima circostanza confortai la mia opinione con addurre una osservazione personale, che ebbi la ventura di fare nei primordi dello studio intrapreso. Ricordai dunque il fortunato incontro, che mi si presentò nel primo anno che di proposito mi posi a studiare le Diatomee, quando sotto l'ingrandimento del Microscopio considerava un frustulo di *Podosphœnia* tratto da piccolo acquario marino. Trovavasi quello al punto di emettere una nidiata di forme embrionali rotonde, che dall'interno della cellula madre vidi sortire all'esterno ad una ad una, notando ancora che quelle forme rotonde fra loro eguali erano terminate nettamente da una linea, ciò che dimostrava l'esistenza in quelle di una parete, e che appena sortiti nel momentaneo moto di rotazione presentavano alternamente profilo rotondo o lineare. Sarebbe stato utile il fissare la memoria del fenomeno con un disegno, ma impedito da imperfezione congenita della mia mano dovetti contentarmi di descrivere minutamente ogni stadio del fenomeno, come feci al momento che quello si arrestò, supplendo per tal modo con dettagliatissima descrizione alla mancanza di rappresentazione iconografica. Nè nuova può dirsi quella mia osservazione, essendo essa perfettamente consona a quanto venne veduto dal D.r Rabenhorst su di una *Melosira varians*. Ag. del quale caso ci lasciò una figura, e concorda assolutamente con altra osservazione parallela dell'Irlandese Micrografo Eugenio O'Meara intorno un *Pleurosigma Spencerii*, W. Sm. Ad onta però di queste tre osservazioni esattamente parallele tra loro, nelle quali venne osservata la sortita di molteplici forme rotonde eguali e perfettamente circoscritte, in luogo di riconoscere in questi un caso di riproduzione, per non rinunziare ad una contraria preconcetta idea, fu gratuitamente supposto, che quei corpicciuoli rotondi non fossero altro che piccole Monadine o altri simili infusori aggirantisi attorno la Diatomea.

Io disperavo di pervenire a convincere persone, che stimo altamente, ma che sono a mio credere troppo tenaci in sostenere idee preconcette, quando il caso mi fu propizio nel presentarmi una palpabile prova, che ciò che venne interpretato nei tre sopracitati esempi per un insieme di forme embrionali, era realmente tale. Quantunque la nostra Italia sia molto ricca in depositi di Diatomee specialmente marine, però i giacimenti di queste presentansi molto poveri per varietà di tipi, così che questo mi fa propendere alla

opinione che la identità delle forme sia prova che i diversi giacimenti facciano parte di un banco continuo, che incominciando dalla estrema Sicilia prosegue lungo la Penisola, forse anche oltre l'Italia centrale. Tutta questa formazione appartiene al plioceno, e quindi non è da maravigliare per la uniformità della flora di cotesti depositi. Ora però finalmente le diligenti investigazioni del ch. D.r Dante Pantanelli condussero al rinvenimento di un deposito di formazione molto più antica nell'Appennino Modenese presso Monte Gibbio, e nel Reggiano presso le Quattro Castella e precisamente nel luogo detto La Madonna della Battaglia. Questi due depositi differiscono grandemente dagli altri, perchè in luogo di presentarsi in condizione scistosa costituiscono una massa irregolare di marna silicea, e al dire del Pantanelli sembra appartenere al mioceno inferiore. La flora Diatomacea di quelli grandemente differisce dagli altri depositi Italiani, ed è ricca di nuovi tipi, che ora vado studiando, e che mi daranno argomento ad altra pubblicazione.

Fra le molte rare e nuove forme del deposito del Monte Gibbio, che notai nell'esaminare alcune preparazioni fatte di tale materiale incontrai il tipo, la di cui figura è qui annessa. Questo tipo mi tenne alquanto perplesso su la determinazione della specie, alla quale appartenga. Consultando l'opera iconografica di Adolfo Schmidt su le Diatomee conosciute l'avrei ritenuto analogo alla fig. 31 della Tav. 58 del suo atlante, se non fosse che quella forma proveniente da Mors nel Iutland ne differisce unicamente per una piccola areola irregolare liscia al centro. Però, rileggendo attentamente le definizioni delle diverse specie di *Coscinodiscus* date da Pritchard, nel leggere i caratteri del *C. radiolatus*. E, non parmi potere dubbitare nell'attribuire il nostro tipo a questa specie. A tale specie infatti vengono dall'A. assegnati i seguenti caratteri « Granuli puntiformi, eguali, radianti » Così quantunque io non abbia consultato la figura originale data da Ehrenberg mi ritengo autorizzato a riguardare quel tipo per *C. radiolatus*. E. Ma quello, che più particolarmente attrasse la mia attenzione su questo esemplare, fu il vedere nel perimetro della valva numerosissime impronte di piccole forme rotonde

pressate insieme. La dimensione di tali impronte e più la distribuzione irregolare di quelle, per la quale si mostravano stipate e sovrapponentisi in un punto e in altro vedevansi in ordine più rado, mi dissuase dal riguardarle quale una areolazione della valva radialmente punteggiata. Fui pertanto astretto a cercare altra interpretazione di quella apparenza, e me la suggerì la ricordanza di quanto da me fu veduto nel caso sopraricordato della riproduzione della *Podosphœnia*, analoga alla osservazione di Rabenhorst su di una *Melosira varians*. Ag. e quella di O'Meara su un *Pleurosigma Spencerii*. Sm. Ritenni pertanto, che quelle forme rotonde eguali strette nel perimetro della valva dovessero certamente riguardarsi quali impronte delle forme embrionali rimaste in seno della cellula madre, allor che fu sorpresa da morte.

La preparazione originale, che sottoposi all'esame di persone, che si interessano o anche partecipano ai miei studi, viene gelosamente conservata per farla esaminare da chiunque ne avesse vaghezza, e per farne un fotogramma appena che ne avrò agio. La figura, che viene qui data, fu sotto i miei occhi ritratta con l'aiuto dell'ottima camera lucida di Nachet, e quindi le misure sono della maggiore fedeltà. Però lo stato difettoso dell'esemplare fossile mi persuase di far supplire dal disegnatore alcune parti obliterate, e perciò nel disegno non si può esattamente verificare la circostanza della distribuzione ineguale delle forme rotonde contenute. Ma il non conoscersi in alcun *Coscinodiscus* l'esistenza di tali areole rotonde insieme alla granulazione, e più la grandissima analogia (per non dirla identità) con quanto venne in tre diversi casi e da tre diversi osservatori notato e riferito, rende poco meno che evidente la summentovata interpretazione.

Posto questo però, spontaneo presentasi un insegnamento, che ritengo completamente nuovo alla Scienza, il quale pure positivamente contradice una mia asserzione, che ritenevo indiscutibile. Nella memoria da me presentata al Congresso Internazionale Botanico in Firenze, discorrendo della condizione organica, in cui si trova la silice, che costituisce la parete della cellula diatomacea, la quale condizione permette alla medesima parete l'accrescere e il distendersi come dimostrai con numerosi esempi, credetti potere avanzare la proposizione, non essere cioè assolutamente necessaria la presenza della silice in qualunque stadio della vita delle Diatomee e nominatamente nello stato embrionale. Ma il vedere rimasta nella valva la forma evidente della numerosa prole del frustulo genitore, attesta l'esistenza di un velo siliceo, che già costituiva la parete delle nuove Diatomee. Un inse-

gnamento così nuovo e inatteso esige però la conferma di ulteriori osservazioni di altri casi per essere autorizzati a generalizzarlo.

Nè una tale conferma dovrà essere attesa lungo tempo, specialmente per quelli, che si danno più particolarmente all'esame di preparazioni di Diatomee fossili, mentre non dovrà riescire tanto raro un caso simile a quello da me osservato di una Diatomea sorpresa dalla morte al momento di dare alla luce la nuova prole. Ed in fatti in seguito alla surriferita fortuita osservazione ho richiamato alla mente quanto più volte ebbi sott'occhi senza sapermi rendere conto di quanto vedevo. In replicate volte mi avvenne, che nell'esaminare preparazioni da me fatte di Diatomee fossili mi si parassero innanzi taluni agglomeramenti di minutissime e tenuissime forme silicee rotonde, eguali tra loro, e a contorno perfettamente definito, senza potervi distinguere particolari caratteri di struttura da poter dire a qual genere o a quale specie appartenessero. Per analogia con il caso sopraccennato sembrami dover ritenere con la maggior verosimiglianza che quelli agglomeramenti fossero da riguardare quali nidiate di giovani Diatomee, che erano in seno alla cellula madre nel momento di sortire alla luce, quando subitamente venne interrotta la vita vegetale di quella, o della cisti in grembo alla quale ebbero origine e il loro primo sviluppo.

Da tutto questo sorge spontaneo l'insegnamento a quelli che si dilettano nel contemplare con l'aiuto del Microscopio le maraviglie della Natura e del Creato, quanto cioè si debba da essi porre attenzione nell'osservazione di ogni minima cosa e nel valutare qualunque lieve circostanza, in ciò che si para allo sguardo.

Dissi appositamente osservare e non dissi vedere o riguardare, mentre il riguardare e il vedere è il semplice far uso della facoltà visiva, quando l'osservare implica la simultaneità dell'atto di vedere alla operazione mentale, con la quale si confronta quanto si vede con ciò, che se ne conosceva. L'attenta considerazione soltanto ci porta ad estendere le nostre cognizioni confermandole o pure modificandole; quella è il necessario requisito di chiunque studia la Natura, ma è la dote necessaria più particolarmente a quegli, che prese a speciale soggetto di studio organismi così maravigliosamente piccoli come sono le Diatomee; le quali non potendo viventi venire isolate e poste a parte in condizione di regolare sviluppo, non ci lasciano speranza di conoscerne i speciali fenomeni biologici, se non in seguito di fortuite osservazioni.

Ab. Francesco Castracane.

COMUNICAZIONI

Boncompagni, D. B. – *Presentazione*:

Il ch. sig. Principe D. B. Boncompagni presentò all'Accademia, da parte dell'autore, una lettera scrittagli dal sig. Dott. Gustavo Eneström, in data dei 29 Aprile 1885, intitolata: *Lettre sur un théorème de Goldbach*. In questa lettera è riportato un passo di una lettera di Leonardo Euler a Cristiano Goldbach, in data dei 30 Giugno 1742, nel quale l'Euler dice essergli stato comunicato dal Goldbach il teorema, che ogni numero pari è la somma di due numeri primi.

Provenzali, P. F. S. – *Presentazione di una sua nota*: (1)

Il ch. P. Provenzali tornando sulla questione se le radiazioni solari possano produrre qualche azione chimica nelle grandi profondità sottomarine, dimostrò che i risultati delle recenti esperienze fatte nella rada di Villefranche dai sig. Fol e Serrazin non solo tali da potersene assolutamente inferire che al di là di 400 metri alcun raggio chimico non penetra nell'acqua del mare. I principali fatti recati dal disserente a prova del suo assunto furono il diverso potere assorbente dell'acqua per i diversi raggi che costituiscono le radiazioni solari, e l'attitudine che hanno alcuni di questi raggi di agire chimicamente sulle sostanze organizzate e non sui composti minerali o anche organici fuori dell'influsso della vita. Inoltre fece notare che trattandosi di radiazioni già molto indebolite dall'assorbimento, il tempo di 10′ che durò ciascuna delle suddette sperienze, non basta perchè dalla mancanza di effetti chimici sensibili si possa con certezza conchiudere la totale assenza di raggi capaci di produrre questi effetti.

Statuti, A. – *Presentazione di un catalogo di crostacei*: (2)

Il ch: sig. Ingegnere A. Statuti, tanto a suo nome che del socio corrispondente sig. Biagio Donati, presentò all'Accademia sotto il titolo di « *Fauna* » *Carcinologica della Provincia Romana* » la prima parte di un loro catalogo metodico e sinonimico dei crostacei marini, terrestri e fluviali, che vivono nella nostra regione, compilato da essi in base ai sistemi di classifica più recenti.

Questa prima parte comprende i crostacei del litorale di Civitavecchia: nella seconda sarà dato il complemento coll'aggiunta di quelli che si rinvengono nel resto del litorale fino a Terracina, compresi, ben inteso, i corsi di acqua Pontini.

---

(1) Questa nota è stata svolta nella memoria sul medesimo argomento pubblicata nel fascicolo della sessione I^a del 21 dicembre 1884.

(2) Tale catalogo verrà pubblicato in uno dei seguenti fascicoli.

Il Disserente anzi tutto fece notare che non esisteva fin qui veruna opera speciale, relativa cioè alla nostra provincia, che pur abbraccia una distesa di lido assai ragguardevole (circa 220 chilometri), sopra questa classe di animali apteri, dei quali è noto che il nostro Mediterraneo è ricco oltremodo. Dato poi un cenno sull'importanza che hanno i crostacei nell'alimentazione dell'uomo, aggiunse che quantunque lo studio da essi eseguito sopra le specie che vivono presso noi abbia a considerarsi come un lavoro d'interesse puramente locale; tuttavia, inteso come una contribuzione alla Fauna della nostra provincia, potrà tornare di una qualche utilità, se non altro allo scopo di far conoscere quali siano le produzioni del nostro paese.

Sottopose quindi all'Accademia le tavole delle figure di tutti i crostacei del litorale di Civitavecchia, che sono compresi nella memoria esibita: quali figure tuttochè disegnate e colorite dal vero con molta precisione ed esattezza dal nominato socio corrispondente sig. Donati, non vennero intercalate nel testo per la semplice ragione che riferendosi per la massima parte ad animali già noti e che trovansi già figurati e descritti nelle grandi opere magistrali di Storia Naturale, possono sempre riscontrarsi nelle opere suddette; delle quali, come è di uso, non si è omessa per ogni singola specie la relativa citazione per comodo di chi amasse a suo bell'agio consultarle.

Infine il disserente richiamò l'attenzione dell'Accademia sopra quattro specie di crostacei viventi, che per i loro caratteri distintivi non sembrano perfettamente corrispondere con quelle finora descritte. A migliore intelligenza di ciò gli autori del catalogo hanno inserto nel medesimo tanto le figure quanto le descrizioni di queste specie, intendendo di sottoporle al giudizio degli scienziati per decidere se realmente possono accettarsi come *specie nuove*, o piuttosto come semplici *varietà* locali.

Grassi Landi, Mr. B. – *Presentazione di un suo opuscolo*:

Il ch. Monsignor Bartolomeo Grassi Landi presentò il suo recente lavoro sopra « *L'armonia dei suoni col vero corista o diapason normale* ».

De Rossi, Prof. M. S. – *Presentazione di opuscoli di soci*:

Il segretario presentò da parte dell'autore socio corrispondente sig. E. Catalan una nota a stampa intitolata: *Sur des formules relatives aux intégrales Eulériennes*: e da parte dell'autore socio corrispondente sig. prof. D. Ragona un suo opuscolo intitolato: *Il Fohen del 6 Marzo* 1885.

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

Lettere di ringraziamento del Prof. Cerebotani e del prof. Genocchi per la nomina a soci corrispondenti.

COMITATO SEGRETO

Il Presidente diede relazione dell'udienza pontificia accordata al Comitato Accademico per la presentazione dei due volumi degli Atti, relativi agli anni XXXV e XXXVI. Riferì quindi le parole di somma benevolenza, con le quali il Santo Padre si espresse verso la nostra Accademia ed il Suo Volere di promuovere e patrocinare sempre più l'attività dei lavori accademici.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI: Conte Ab. F. Castracane, *Presidente*. - Principe D. B. Boncompagni - P. F. Ciampi - Comm. C. Descemet - P. F. S. Provenzali - Dott. M. Lanzi - P. G. S. Ferrari - P. G. Foglini - Prof. V. De Rossi Re - Cav. G. Olivieri - Prof. F. Ladelci - Cav. A. Statuti - Prof. M. S. de Rossi, *Segretario*.

CORRISPONDENTI: Mons. B. Grassi Landi.

La seduta apertasi legalmente alle ore $5\frac{1}{4}$ p. venne chiusa alle ore $7\frac{1}{2}$ p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *American Chemical Journal* — Vol. 6, n.° 3. (July 1884). Baltimore, in 8.°
2. *American Journal of Mathematics.* — Vol. VII. — N. 3. — (April 1885) Baltimore, in-4.°
3. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.* — Vol. XX, disp. 3 e 4. Torino 1885. In 8.°
4. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXII, 1884—85. Serie IV, Rendiconti. Vol. I. Fasc. 9—11. — Roma, 1885. In-4.°
5. *Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli.* — 3ª Serie. — Vol. III. — Napoli, 1884, in-4.°
6. *Atti della Società crittogamologica italiana.* — A. XXVIII. — Serie Seconda, Vol. III. — Disp. IV, — Varese, 1885. In-8.°
7. CATALAN (E.) — *Sur des formules relatives aux intégrales Eulériennes.* Paris, 1884, in-8.°
8. *Crónica cientifica.* — A. VIII, n. 177—178. Barcelona, 1885. In 8.°
9. GRASSI LANDI Mons. B. — *L'armonia dei suoni col vero corista o diapason normale.* Roma, 1885, in-8.°
10. *La Civiltà Cattolica.* — A. XXXVI, Serie XII, Vol. X. — quad. 837, 838. — Firenze, 1885. In-8.°
11. ONETTI (F.) — *Sull'uso del tabacco da fumare.* — Sanremo, 1885, in-8.°
12. RAGONA (D.) — *Il « Foehn » del 6 Marzo 1885.* — Modena 1885, in-8.°
13. *Rivista di Artiglieria e Genio.* — A. 1885, Marzo. Roma, 1885. In-8.°
14. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* — XL—LIV. Berlin, 1884, in-4.°
15. *The American Journal of Philology.* Vol. IV, 3. Whole N. 15. — Baltimore, 1883, in-8.°
16. TURAZZA (D.) — *Memorie del Lorgna, dello Stratico e del Boscovich relative alla sistemazione dell'Adige e piano d'avviso del Lorgna per la sistemazione di Brenta.* — Padova, 1885, in-4.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE VIIª DEL 21 GIUGNO 1885

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE

DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

TRASFORMAZIONE DEL BINOMIO

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}.$$

NOTA

DEL PROF. MATTIA AZZARELLI

1. La risoluzione dell'equazione di grado $2m$ derivativa del secondo grado da origine ad una funzione irrazionale di grado m di un binomio in parte razionale, ed in parte irrazionale di secondo grado, ossia data l'equazione:

$$x^{2m}+px^m+q=0$$

si ha:

$$x^m=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

e quindi, tenendo conto della sola sua determinazione numerica,

$$x=\sqrt[m]{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}.$$

Qui ci proponiamo di considerare semplicemente il caso elementare di $m=2$, ovvero l'équazione:

$$x^4+px^2+q=0$$

che dà:

$$x=\sqrt{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}$$

2. Prima di venire alla trasformazione di questa funzione procureremo riconoscere, per maggiore chiarezza, quali sieno quelle funzioni binomie il quadrato delle quali si riduca ad una parte razionale ed un altra irrazionale, cioè alla forma:

$$A + \sqrt{B};$$

e quali sieno quelle funzioni i quadrati delle quali sono formati di due parti irrazionali.

Abbiamo

$$a) \qquad [m + \sqrt{n}]^2 = m^2 + n + 2m\sqrt{n} = A + \sqrt{B}.$$

quando si ponga

$$m^2 + n = A, \quad 4m^2n = B,$$

$$b) \quad [\sqrt{m} + \sqrt{n}]^2 = m + n + 2\sqrt{mn} = A + \sqrt{B}$$

se facciasi

$$m + n = A, \quad 4mn = B.$$

$$c) \quad [\sqrt{m + \sqrt{n}} + \sqrt{m - \sqrt{n}}]^2 = 2m + 2\sqrt{m^2 - n} = A + \sqrt{B}.$$

ponendo

$$2m = A, \quad 4(m^2 - n) = B.$$

$$d) \quad [\sqrt{\sqrt{m} + n} + \sqrt{\sqrt{m} - n}]^2 = 2\sqrt{m} + 2\sqrt{m - n^2} = \sqrt{m_1} + \sqrt{n_1}$$

posto

$$4m = m_1, \quad 4(m - n^2) = n_1$$

e per la (b) otterremo ancora

$$[(\sqrt{\sqrt{m} + n} + \sqrt{\sqrt{m} - n})^2]^2 = (\sqrt{m_1} + \sqrt{n_1})^2 = A + \sqrt{B}.$$

$$e) \quad [\sqrt{\sqrt{m} + \sqrt{n}} + \sqrt{\sqrt{m} - \sqrt{n}}]^2 = 2\sqrt{m} + 2\sqrt{m - n}$$

e quindi per la stessa (b) troveremo

$$[(\sqrt{\sqrt{m} + \sqrt{n}} + \sqrt{\sqrt{m} - \sqrt{n}})^2]^2 = A + \sqrt{B}.$$

Da questa esposizione risulta che i quadrati delle funzioni a), b), c) si compongono sempre di binomi dei quali una parte è razionale, e l'altra irrazionale, ma i quadrati di quelle corrispondenti a d), e) hanno per loro quadrati binomi le cui parti sono ambedue irrazionali, e le loro potenze quarte sono della forma considerata.

3. Riconosciute le principali forme di quelle funzioni che nei loro quadrati, è potenze quarte danno binomi composti di una parte razionale e di

un altra irrazionale di secondo grado, passeremo alla trasformazione della funzione

$$\sqrt{-\frac{p}{2}\mp\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}$$

supponendo primieramente che si tratti di una quantità reale, cioè che sia:

$$\frac{p^2}{4}-q>0.$$

Sia per comodo

$$-\frac{p}{2}=a,\ \frac{p^2}{4}-q=b$$

la funzione che dovremo considerare sarà:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}.$$

4. Il metodo che viene seguito in tutti i corsi moderni consiste nel porre

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y} \qquad (1)$$

e quindi quadrando la (1), si pongono

$$x+y=a;\quad 2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$$

e quadrata la seconda si hanno le due equazioni coesistenti

$$x+y=a,\quad xy=\frac{b}{4},$$

che, per la composizione delle equazioni di secondo grado, chiamata u la incognita simbolica, si ha:

$$u^2-au+\frac{b}{4}=0$$

dalla quale immediatamente

$$u=\frac{a}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b}.$$

onde

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2},\quad y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$$

e la (1) diventa:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{a+\sqrt{a^2-b}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b}}\right] \qquad (2)$$

nel cui secondo membro si hanno due funzioni pariforme alla proposta, e dove giova notare che x ed y sono razionali soltanto lorchè è un quadrato esatto la differenza

$$a^2 - b,$$

ed in questo caso si ottiene un risultato semplice perchè, se rappresenteremo per c^2 essa differenza troveremo allora:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + c}{2}} + \sqrt{\frac{a - c}{2}},$$

Il secondo membro della (2) è tale che, fatto di esso il quadrato, riproduce il radicando del primo membro, dunque esso membro secondo è la radice seconda dal dato radicando, e perciò dal binomio $a + \sqrt{b}$ si può estrarre la radice seconda quando la funzione

$$a^2 - b$$

sia un quadrato esatto.

8. Pervenuti alla (2) dobbiamo notare che il primo membro è sempre reale, ed il secondo lo è fin tanto che si conserva

$$a^2 - b > 0$$

ovvero

$$a > \sqrt{b}$$

Se avesse luogo la condizione

$$a < \sqrt{b}$$

come si verifica nella soluzione di molte equazioni biquadratiche derivative del secondo grado, per esempio

$$x^4 - 14x^2 - 63 = 0$$

per la quale risulta

$$x = \pm \sqrt{7 \pm \sqrt{49 + 63}};$$

allora considerando il segno positivo pel radicando, il primo membro della (2) è reale ed il secondo immaginario, giacchè il quadrato dalla parte razionale risulta minore del quadrato della irrazionale, cioè

$$49 - 112 < 0.$$

Ma non potendo essere una quantità al tempo stesso reale ed immaginaria, nel secondo membro la immaginarietà deve essere soltanto apparente. Di fatti se poniamo la (2) sotto la seguente forma:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \frac{\sqrt{b - a^2}}{a}\sqrt{-1}} + \sqrt{1 - \frac{\sqrt{b - a^2}}{a}\sqrt{-1}}\right]$$

e per comodo fatto

$$\sqrt{b-a^2}=q$$

avremo

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}}+\sqrt{1-\frac{q}{a}\sqrt{-1}}\right].$$

E perchè

$$\sqrt{1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}}=\left(1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{1-\frac{q}{a}\sqrt{-1}}=\left(1-\frac{q}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

sviluppando colle leggi del binomio di Newton sarà:

$$\left(1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1+\frac{1}{2}.\frac{q}{a}\sqrt{-1}-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}.\frac{q^2}{a^2}-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\frac{q^3}{a^3}\sqrt{-1}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}.\frac{q^4}{a^4}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-4\right)}{5!}\frac{q^5}{a^5}\sqrt{-1}-\ldots.$$

ovvero

$$\left(1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{2!}.\left(\frac{q}{2a}\right)^2+\frac{1.3.5}{4!}\left(\frac{q}{2a}\right)^4-\frac{1.3.5.7.9}{6!}\left(\frac{q}{2a}\right)^6+\ldots\ldots$$

$$+\left[\frac{q}{2a}-\frac{1.3}{3!}\left(\frac{q}{2a}\right)^3+\frac{1.3.5.7}{5!}\left(\frac{q}{2a}\right)^5-\ldots\ldots\right]\sqrt{-1}.$$

Ora dal binomio

$$1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}$$

si passa all'altro col porre $-\frac{q}{a}$ in luogo di $+\frac{q}{a}$, onde avremo immediatamente

$$\left(1-\frac{q}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{q}{2a}\right)^2 + \frac{1.3.5}{4!}\left(\frac{q}{2a}\right)^4 - \frac{1.3.5.7.9}{6!}\left(\frac{q}{2a}\right)^6 + \dots$$

$$- \left[\frac{q}{2a} - \frac{1.3}{3!}\left(\frac{q}{2a}\right)^3 + \frac{1.3.5.7}{5!}\left(\frac{q}{2a}\right)^5 \dots\dots\right]\sqrt{-1}.$$

sommando otterremo:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}} + \sqrt{1-\frac{q}{a}\sqrt{-1}}\right]$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{2}}\left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{q}{2a}\right)^2 + \frac{1.3.5}{4!}\left(\frac{q}{2a}\right)^4 - \frac{1.3.5.7.9}{6!}\left(\frac{q}{2a}\right)^6 + \dots\dots\right]$$

ove il secondo membro è reale ma è dato da una serie della quale non sempre può assegnarsi il suo valore numerico approssimato perchè non può dimostrarsi sempre la sua convergenza, quantunque abbia segni alternativi nel qual caso basterebbe che fosse almeno decrescente.

6. La trasformazione della (2) può eseguirsi ancora impiegando le funzioni goniometriche, ed anzi in questo caso può assegnarsi il suo valore numerico con quel grado di approssimazione che può desiderarsi.

7. Prima di dare questo metodo crediamo utile porre il seguente

Lemma. – La radice seconda di un binomio immaginario della forma:

$$\cos a + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\, a$$

si ottiene dividendo l'arco per 2.

Si ponga

$$\sqrt{\cos a + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\, a} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.\ \sqrt{-1},$$

ove x, y sieno quantità reali: quadrando ne risultano:

$$x - y = \cos a$$

$$2\sqrt{xy} = \mathrm{sen}\, a$$

ovvero

$$x^2 - 2xy + y^2 = \cos^2 a$$

$$4xy = \mathrm{sen}^2 a$$

che sommate ed estrattane la radice seconda si ottiene

$$x+y=1.$$

Essendo pertanto coesistenti le due

$$x+y=1,\quad x-y=\cos a$$

ne dedurremo subito

$$x=\frac{1+\cos a}{2},\quad y=\frac{1-\cos a}{2}$$

ma

$$\frac{1+\cos a}{2}=\cos^2\frac{a}{2};\ \frac{1-\cos a}{2}=\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}$$

dunque

$$\sqrt{\cos a+\sqrt{-1}\operatorname{sen} a}=\cos\frac{a}{2}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{a}{2}.$$

A questo risultato si può giungere ancora ragionando come siegue.
Si ponga

$$\sqrt{\cos\alpha+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha}=x+y\sqrt{-1}$$

dalla quale quadrando si deducono

$$x^2-y^2=\cos\alpha\quad x^2y^2=\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\alpha,$$

e se poniamo

$$y^2=-z^2$$

avremo

$$x^2+z^2=\cos\alpha,\quad x^2z^2=-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\alpha$$

e quindi, per la composizione delle equazioni di secondo grado, sarà

$$u^2-u\cos\alpha-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\alpha=0$$

dalla quale deduciamo

$$u=\frac{1}{2}\cos\alpha\pm\frac{1}{2}$$

ovvero

$$x^2=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)=\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$y^2=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)=\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

ed in fine

$$x = \cos\frac{\alpha}{2},\quad y = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.$$

Questi valori possono assegnarsi ancora nel modo seguente che notiamo perchè ci sarà utile in seguito.

Riprese l'equazioni

$$x - y^2 = \cos\alpha,\quad xy = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

noteremo che dalle funzioni circolari si ha

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha,\ \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

di qui pel semplice confronto ne deduciamo

$$x = \cos\frac{\alpha}{2},\quad y = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.$$

Dunque da un binomio della forma

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha$$

si estrae la radice seconda dividendo l'arco per l'indice della radice –. Questa verità ha luogo per qualunque radice come vedremo al § 13.

8. Dopo ciò si riprenda

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}} + \sqrt{1-\frac{q}{a}\sqrt{-4}}\right]. \qquad (3)$$

Si ponga

$$1 + \frac{q}{a}\sqrt{-1} = r\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi)$$

dalla quale

$$r\cos\varphi = 1,\quad r\operatorname{sen}\varphi = \frac{q}{a} \qquad (4)$$

che sono sufficienti per la determinazione di r e φ. A questo fine quadrando e sommando abbiamo:

$$r^2 = 1 + \frac{q^2}{a^2} = \frac{a^2+q^2}{a^2}$$

e perchè $q^2 = b - a^2$ sarà:

$$r = \frac{1}{a}\sqrt{b}$$

e quindi dalle (4)

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{b}}, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{q}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b-a^2}}{\sqrt{b}},$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{b-a^2}}{a}$$

che ci fa conoscere il valore numerico dell'angolo φ. Pel lemma promesso avremo dunque

$$\sqrt{1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}} = \sqrt{r}\left[\cos\frac{\varphi}{2} + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right]$$

$$\sqrt{1-\frac{q}{a}\sqrt{-1}} = \sqrt{r}\left[\cos\frac{\varphi}{2} - \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right]$$

e da queste deduciamo

$$\sqrt{1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}} + \sqrt{1-\frac{q}{a}\sqrt{-1}} = 2\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}$$

e quando per la r si ponga il suo valore, la (3) si muta in

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{2}\sqrt{b}\cos\frac{\varphi}{2}.$$

che, oltre essere reale, può calcolarsi facilmente per logaritmi.

9. Il metodo presentato dai primi analisti per la trasformazione della quantità

$$\sqrt{a+\sqrt{b}},$$

che vale tanto pel caso di

$$a^2 - b > 0 \quad \text{ed} \quad a^2 - b < 0,$$

trovasi a lungo esposto nella storia delle Matematiche del Cossali.

Noi crediamo far cosa utile di notarlo, giacchè di esso non si parla in

verun corso elementare, e d'altronde esso è molto semplice, dipendendo da un principio elementarissimo.

10. Qualunque sia il segno della quantità

$$m - n$$

è certo che sempre ha luogo

$$(m - n)^2 > 0$$

e quindi

$$m^2 + n^2 - 2mn > 0$$

la quale richiede che sia

$$m^2 + n^2 > 2\,mn\,;$$

dunque il seguente:

Principio. – Nel quadrato di un binomio, qualunque sieno le sue parti, cioè tanto razionali, quanto irrazionali, o l'una razionale e l'altra irrazionale, la somma dei quadrati delle due parti è sempre maggiore del doppio prodotto delle parti medesime.

10. Dopo ciò sia proposta, per essere trasformata, la funzione solita

$$\sqrt{a + \sqrt{b}}.$$

Quando nel binomio $a + \sqrt{b}$ si domanda la sua radice seconda, questa si deve considerare come la espressione ridotta del quadrato di un binomio, le due parti del quale sono incognite. Dunque pel principio stabilito, la parte maggiore del proposto binomio

$$a + \sqrt{b}$$

deve essere formata della somma dei quadrati delle due parti incognite del binomio radice, e la parte minore deve eguagliare il doppio prodotto di queste medesime due parti incognite.

Si ponga ora:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

ove x ed y possono essere tanto razionali, quanto irrazionali, quadrando, e posto essere

$$a > \sqrt{b}$$

avremo

$$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}$$

e quindi pel principio stabilito, le due

$$a = x + y, \quad \sqrt{b} = 2\sqrt{xy} \qquad (5)$$

delle quali, come è già noto, deduciamo:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{a+\sqrt{a^2-b}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-b}}\right]:$$

Ma se è

$$a < \sqrt{b}$$

in luogo delle (5) dovremo porre

$$x + y = \sqrt{b}, \quad 2\sqrt{xy} = a$$

dalle quali, quadrando è sottraendo, si ha:

$$x^2 - 2xy + y^2 = b - a^2$$

e quindi

$$x - y = \sqrt{b - a^2}.$$

Dunque per la determinazione delle x, ed y abbiamo due equazioni di primo grado, le quali danno

$$x = \frac{\sqrt{b} + \sqrt{b-a^2}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{b-a^2}}{2}.$$

che sostituiti in

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

risulta la quantità reale

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\sqrt{b}+\sqrt{b-a^2}} + \sqrt{\sqrt{b}-\sqrt{b-a^2}}\right].$$

11. Se per esempio si domandasse la radice seconda della quantità

$$\sqrt{2+\sqrt{5}}$$

essendo qui

$$a = 2, \quad \sqrt{b} = \sqrt{5}, \quad b - a^2 = 1$$

risulterebbe

$$\sqrt{2+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\sqrt{5}+1} + \sqrt{\sqrt{5}-1}\right]$$

12. Resta ora che prendiamo a trasformare la funzione

$$x = \sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

pel caso che abbiasi

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

onde ritenute le denominazioni già stabilite sarà

$$x = \sqrt{a \pm \sqrt{b}\sqrt{-1}}$$

e posto

$$\sqrt{a + \sqrt{b}\sqrt{-1}} = m + n\sqrt{-1}$$

ove m, n devono essere due incognite reali. Quadrando, pel principio di omogeneità dovremo avere:

$$m^2 - n^2 = a, \quad 2mn = \sqrt{b}$$

le quali quadrate e sommate danno:

$$m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = a^2 + b$$

da cui

$$m^2 + n^2 = \sqrt{a^2 + b},$$

che coesistendo con:

$$m^2 - n^2 = a$$

si avrà:

$$m^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b} + a}{2}$$

$$n^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b} - a}{2}$$

e quindi

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b} + a}{2}}$$

$$n = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b} - a}{2}}$$

e perciò

$$\sqrt{a+\sqrt{b}\sqrt{-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\sqrt{a^2+b}+a}+\sqrt{-1}\sqrt{\sqrt{a^2+b}-a}\right]$$

Dunque la radice seconda di un numero complesso è un altro numero complesso determinato nella sua forma.

11. Termineremo col dimostrare che il noto teorema dovuto a Moivre, del quale abbiamo già fatto uso, per l'esponente intero,

$$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha)^m=\cos m\alpha+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}m\alpha$$

vale ancora pel caso dell'esponente fratto.

Nel nostro ragionamento procederemo per induzione. Abbiamo già veduto (7) essere

$$\sqrt{\cos\alpha+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha}=\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}.$$

Ora porremo

$$\sqrt[3]{\cos\alpha+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha}=x+y\sqrt{-1}$$

essendo x, y reali.

Elevando alla terza potenza avremo

$$\cos\alpha+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha=x^3+3x^2y\sqrt{-1}-3xy^2-y^3\sqrt{-1}$$

dalla quale le due seguenti

$$\cos\alpha=x^3-3xy^2$$

$$\mathrm{sen}\alpha=3x^2y-y^3$$

che elevate al quadrato e sommate, dopo semplici riduzioni, ci danno

$$\cos^2\alpha+\mathrm{sen}^2\alpha=x^6+2x^4y^2+3x^2y^4+y^6$$

e quindi

$$(x^2+y^2)^3=1$$

e tenuto conto della sola radice reale avremo

$$x^2+y^2=1.$$

la quale, come conseguenza delle due superiori equazioni, deve coesistere con esse, onde nella prima eliminato y^2 e nell'altra x^2, otterremo

$$\cos\alpha=4x^3-3x$$

$$\mathrm{sen}\alpha=3y-4y^3$$

ovvero

$$4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0$$

$$4y^3 - 3y + \operatorname{sen}\alpha = 0.$$

Ora dalle funzioni circolari abbiamo

$$\operatorname{sen}3m = 3\operatorname{sen}m - 4\operatorname{sen}^3 m$$

$$\cos 3m = 4\cos^3 m - 3\cos m$$

e fatto

$$3m = \alpha, \quad m = \frac{\alpha}{3}$$

ne deduciamo le seguenti

$$4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3} - \cos\alpha = 0$$

$$4\operatorname{sen}^3\frac{\alpha}{3} - 3\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} + \operatorname{sen}\alpha = 0.$$

Se confrontiamo ordinatamente queste due equazioni con quelle espresse per x ed y riconosceremo essere

$$x = \cos\frac{\alpha}{3}, \quad y = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{3},$$

Dunque

$$\sqrt[3]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{3} + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3}.$$

Se si prende a considerare

$$\sqrt[4]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha}$$

essendo allora

$$\sqrt[4]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha} = \sqrt{\sqrt{\cos\alpha + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha}}$$

e perchè

$$\sqrt{\cos\alpha + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

avremo

$$\sqrt[4]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha} = \sqrt{\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

e quindi

$$\sqrt[4]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{4} + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{4}.$$

Si ponga ora

$$\sqrt[5]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\alpha} = x + y\sqrt{-1}$$

e si elevi alla 5ª potenza, otteniamo

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\alpha = x^5 + 5x^4y\sqrt{-1} - 10x^3y^2 - 10x^2y^3\sqrt{-1} + 5yx^4 + y^5\sqrt{-1}$$

dalla quale le due seguenti

$$\cos\alpha = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$$

$$\operatorname{sen}\alpha = 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5$$

che quadrate e sommate, dopo semplici riduzioni, danno:

$$x^{10} + 5x^8y^2 + 10x^6y^4 + 10x^4y^6 + 5x^2y^8 + y^{10} = 1$$

ovvero,

$$(x^2 + y^2)^5 = 1,$$

e tenuto conto della radice reale è:

$$x^2 + y^2 = 1$$

e quindi ne deduciamo prontamente

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - \cos\alpha = 0$$

$$16y^5 - 20y^3 + 5y - \operatorname{sen}\alpha = 0$$

Ma le funzioni circolari ci danno

$$16\cos^5 m - 20\cos^3 m + 5\cos m - \cos 5m = 0$$

$$16\operatorname{sen}^5 m - 20\operatorname{sen}^3 m + 5\operatorname{sen} m - \operatorname{sen} 5m = 0$$

e posto

$$5m = \alpha, \quad m = \frac{\alpha}{5}$$

otterremo

$$16\cos^5\frac{\alpha}{5} - 20\cos^3\frac{\alpha}{5} + 5\cos\frac{\alpha}{5} - \cos\alpha = 0$$

$$16\operatorname{sen}^5\frac{\alpha}{5} - 20\operatorname{sen}^3\frac{\alpha}{5} + 5\operatorname{sen}\frac{\alpha}{5} - \operatorname{sen}\alpha = 0$$

e dal confronto di queste con l'equazioni date per x, e per y ne deduciamo

$$x = \cos\frac{\alpha}{5}, \quad y = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{5}$$

Dunque

$$\sqrt[5]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{5} + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\frac{\alpha}{5}.$$

Per la radice 6^a, abbiamo

$$\sqrt[6]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha} = \sqrt{\sqrt[3]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha}}$$

ma

$$\sqrt[3]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{3} + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{3}$$

dunque

$$\sqrt[6]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha} = \sqrt{\cos\frac{\alpha}{3} + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{3}}$$

ed in fine

$$\sqrt[6]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{6} + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{6}.$$

Continuando il medesimo ragionamento concluderemo in generale essere

$$\sqrt[m]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{m} + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{m}$$

Ora dico che se questa relazione ha luogo per l'indice m del radicale, ha luogo ancora per l'indice $m + 1$.

Di fatti si ponga

$$\sqrt[m+1]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha} = \cos z + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen} z$$

elevando alla potenza di grado $m + 1$ risulta

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha = \cos(m+1)z + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}(m+1)z$$

dalla quale

$$\cos\alpha = \cos(m+1)z,\quad \mathrm{sen}\alpha = \mathrm{sen}(m+1)z$$

Gli archi α, $(m+1)z$ avendo il seno e coseno eguali in valore e segno, dunque sono contermini e tra le differenti eguaglianze ha luogo ancora

$$\alpha = (m+1)z \quad \text{da cui} \quad z = \frac{\alpha}{m+1}.$$

Dunque

$$\sqrt[m+1]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{m+1} + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{m+1}.$$

Ora la nostra relzione ha luogo per

$$m = 2, = 3, = 4, = 5, \ldots\ldots$$

dunque essa vale per tutti i valori interi e positivi della m.

COMUNICAZIONI

Tuccimei, Prof. G. — *Presentazione di una sua nota* (1):

Il ch. sig. prof. G. Tuccimei lesse una nota col titolo: *Contribuzione alla geologia dell'interno di Roma*, nella quale rendeva conto dei terreni venuti in luce in diversi punti della città ad occasione delle demolizioni e fondazioni di edifizii. Citò il rinvenimento di una sabbia silicea, giallastra, grossolana, trovata circa all'ordinata 27m, in un cavo a via del Boschetto, nella valle tra il Viminale e l'Esquilino. Mostrò come questa sabbia doveva essere la continuazione di quella rinvenuta dall'A. sotto l'Oppio, nello scavo del collettore municipale, e rappresentata in *h* nella sezione geologica dell'Esquilino già da lui pubblicata. Sotto questa sabbia comparve una ghiaia a ciottoli irregolari e voluminosi, alcuni calcarei, altri silicei. L'origine alluvionale di questi banchi è confermata da vestigia fossili di molluschi terrestri trovati nello stesso cavo, ma ad un livello inferiore. Il Brocchi trovò sotto la stessa via del Boschetto sabbia mista a nodi di travertino, ma il punto da lui citato è lontano da quello dell'attuale cavo, cioè trovasi presso al versante opposto che scende dal Viminale. Qui poi la presenza del travertino è confermata da alcuni cavi eseguiti in via Clementina, dove è apparso allo scoperto sotto al terreno di scarico: 1° un banco di tufo granulare di circa 1m di spessore: 2° uno di tufo terroso rossastro di circa 2m: 3° una sabbia calcare giallo-bruna qua e là concrezionata, di appena 0m, 40: 4° una argilla turchina omogenea, che continuava a 6m dal piano stradale. In tre pozzi poi praticati sullo stesso luogo si è trovato alla quota di 28m in 29m sul mare un banco di travertino durissimo a concrezioni tubiformi. Questo probabilmente è addossato ai terreni precedenti, nella loro parte inferiore, mentre la superiore apparisce scoperta sopra al livello del piano stradale, la cui pendenza è fortissima. Alcuni anni fa il prof. Keller osservò lo stesso banco di travertino a pochi passi di distanza, cioè alla gradinata di via dei Zingari, e il Brocchi trovò concrezioni isolate nella stessa via Clementina, ma in un punto più declive di quello in questione.

Più importante è la sezione venuta in luce sulla destra del Tevere all'ordinata 49m sul colle Vaticano, e precisamente nel giardino della Pigna, dove si cavano le fondazioni per la colonna da erigere ivi in memoria del

---

(1) Questa nota è stata pubblicata nel vol. I delle Memorie della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei.

Concilio ecumenico. Sotto a uno scarico di appena 1m, si è trovato: 1º una sabbia fina, argillosa, simile al limo che depone il Tevere nelle sue piene: 2º una ghiaia minuta, incoerente, mista a sabbia silicea e con molti elementi vulcanici: 3º una sabbia silicea grossolana con cristallini quasi intieri di augite, granuli di magnetite, ecc.: 4º altra ghiaia con stratarelli neri, ricchi di granuli magnetici e tracce vulcaniche più abbondanti. In questa si trovarono pure frammenti di Diatomee: 5º finalmente un bel tufo granulare, bigio, omogeneo. L'A. mostrò come questa formazione addossata alle assise plioceniche, sia uno dei più recenti depositi alluvionali dell'interno di Roma; come i detriti vulcanici contenutivi sieno da ritenersi d'origine laziale; come le ghiaie per la loro composizione e giacitura ricordino quelle di Tor di Quinto e della vallata dell'Aniene. Citò le osservazioni del Breislak, dal Brocchi e del Ponzi sullo stesso lato del Tevere, mostrando come di addossamenti alluvionali a quell'altezza, sopra i terreni pliocenici sulla destra del Tevere, non si avessero fino ad ora che vaghe indicazioni.

Ragona, Prof. D. – *Presentazione di una sua memoria* (1):

Il socio corrispondente ch. sig. prof. Domenico Ragona per mezzo del Segretario presentò all'Accademia una sua memoria, nella quale l'A. applica un nuovo metodo alla ricerca delle leggi della frequenza dei venti relativamente all'orizzonte di Modena. Divide il suo lavoro in due parti, concernenti il periodo annuale e il periodo diurno. Riguardo al periodo annuale dimostra che i venti dividonsi in due classi. La prima comprende quei venti che hanno nel corso dell'anno tre massimi e tre minimi di frequenza. La seconda quelli che hanno nello stesso periodo due massimi e due minimi di frequenza. Di ciascuna delle classi mette in chiaro le relazioni con altri fenomeni così della meteorologia, come del magnetismo terrestre. Riguardo al periodo diurno l'A. dimostra, che in tutto l'anno vi è in esso periodo un tipo fondamentale della frequenza dei venti. Questo tipo fondamentale diurno presenta nel corso del giorno tre istanti di massima e tre istanti di minima frequenza. Gli otto venti principali seguono esattamente nelle loro fasi di frequenza o gli istanti del tipo fondamentale ovvero gli istanti intermedii. In ultimo luogo stabilisce le relazioni tra il tipo fondamentale di frequenza e le fasi diurne così della velocità del vento, come delle oscillazioni dell'ago magnetico di declinazione.

(1) Tale lavoro viene inserito nel vol. IIº delle Memorie della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei.

De Rossi, Prof. M. S. – *Considerazioni su di una forma di moti del suolo*:

Il Prof. Michele Stefano de Rossi richiamò l'attenzione degli adunati sulla erroneità dell'opinione generale che si ha intorno agli studi moderni geodinamici, considerandoli come pure esercitazioni scientifiche senza pratiche applicazioni. Ricordò d'aver su questo tema tenuto una apposita conferenza in Torino durante l'ultima esposizione nazionale. Disse poscia volere nell'odierna seduta considerare un punto speciale e nuovo di applicabilità all'edilizia di una proprietà o forma riconosciuta nei movimenti sismici del suolo. Fece notare come oltre ai lenti movimenti detti microsismici sempre insensibili ed ai terremoti istantanei talora sensibili e talora insensibili, avvengano altri veri terremoti grandiosi, quantunque insensibili per effetto della lentezza delle onde terrestri. Considerò peraltro gli effetti e la potenza di queste onde, non che la loro relativa frequenza; lo che dimostrò non poter essere indifferente per gli edifici e dovere invece lentamente agire per sconnetterli, lesionarli, alterarne la verticalità. Svolse le prove da lui raccolte circa questi fatti, fra le quali mise in luce ciò che generalmente non si avverte, la determinazione cioà delle frane, sia nelle cave, sia negli edifici in costruzione; le quali quantunque preparate dall'incuria o da altre condizioni statiche locali, ricevono poi la spinta finale da un terremoto insensibile o da un movimento del suolo dei sopra descritti. Conchiuse che queste sue riflessioni armonizzano, o per dir meglio completano le considerazioni proposte dal Mercalli in un suo recente opuscolo intitolato: *Le case che si sfasciano ed i terremoti.*

L'autore di questo scritto considera il pericolo al quale si espongono Roma e Milano coll'improvvisare nuovi quartieri costruiti poco solidamente ed eccessivamente elevati, nei quali disgraziatamente spesseggiano parziali rovine durante anche il periodo della stessa lavorazione.

L'autore teme che la medesima incuria si avrà nelle vaste costruzioni, che conseguiranno lo sventramento di Napoli. Per conseguenza egli vede in queste tre città necessario un provvedimento edilizio per tutelare la sicurezza degli abitanti contro i danni di possibili forti terremoti, dai quali la storia dimostra non essere punto esenti nè Milano, nè Roma, nè molto meno la vulcanica Napoli.

De Rossi, Prof. M. S. – *Presentazioni diverse di Soci*:

Il Segretario presentò da parte del socio ordinario Sig. Principe D. B.

Boncompagni un esemplare del *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*, agosto 1884. Presentò inoltre un opuscolo del socio corrispondente A. Certes, intitolato: « De l'emploi des matières » colorantes dans l'étude physiologique et histologique des infusoires vi- » vants, » ed un lavoro a stampa del socio corrispondente prof. Pietro M. Garibaldi sulle « Variazioni ordinarie e straordinarie del magnete di » declinazione diurna osservate in Genova nel periodo 1872-84 ».

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

Lettere di ringraziamento del Prof. G. Mercalli e Prof. Stefano Rossi, per la loro nomina a soci corrispondenti.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI: Prof. M. Azzarelli. - Prof. F. Ladelci. - Cav. G. Olivieri. - Prof. G. Tuccimei. - Prof. M. S. De Rossi, Segretario.

CORRISPONDENTI: Mons. B. Grassi Landi.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Académie Commerciale catholique de Montreal. Année académique* 1873—74. Montréal, 1874. in-8.°
2. *A Few of the Many Points of Interest noted in a Tour of Canada.* Toronto 1884, in-8.°
3. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.* Vol. XX, disp. 5ª. — Torino, 1885. in-8.°
4. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXII, 1884—85, — Serie IV. — Rendiconti. Vol. I. — Fasc. 12°. Roma, 1885. In-4.°
5. *Boletin de la Academia nacional de ciencias en Córdoba.* — T. VII. — Entrega 4ª. — Buenos Aires, 1885. In 8.°
6. *Bullettino della R. Accademia medica di Roma.* — A. XI. — n. 2. — Roma, 1884. In 8.°
7. *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche.* — T. XVII. — Agosto 1884. — Roma, 1884. In-4.°
8. *Canadian Pacific Railway eastern division.* Montreal, 1882 in-8.°
9. CERTES (A.) — *De l'emploi des matières colorantes dans l'étude physiologique et histologique des infusoires vivants.* — Paris, 1885, in-8.°
10. *Crónica cientifica.* — A. VIII. N. 179, 180. — Barcelona, 1885. In-8.°
11. EKHOLM (N.) et HAGSTROM (K. L.) — *Mesures des hauteurs et des mouvements des nuages.*
12. GARIBALDI (P. M.) — *Variazioni ordinarie e straordinarie del magnete di declinazione diurna osservata in Genova nel periodo* 1872—84. — Genova 1885. in-8.°
13. *Journal de la société physico-chimique russe.* — T. XVII, n.° 4, 5. S.t Pétersbourg 1885. In-8.°
14. *La Civiltà Cattolica.* A. XXXVI, serie XII, Vol. X, quad. 839, 840. Firenze 1885. In-8.°
15. LIOY (P.) — *Il Dottor Beggiato.* — *Commemorazione.* — Vicenza, 1885, in-8.°
16. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — *Partie littéraire.* — Deuxième série. T. XXI. — XLIIIe de la collection. — Ve livraison. — Mai — Paris, 1885. In-8.°
17. —— *Partie technique.* — IIe série, — T. XI. — XLVe de la collection. — Ve livraison. Mai. — Paris, 1885. In-8.°
18. *R. Comitato Geologico d'Italia,* 1885. — Bollettino n. 3 e 4. Roma, 1885. In-8.°
19. *Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche* (Sezione della Società Reale di Napoli). A. XXIV, fasc. 3.° Marzo 1885. — Napoli, 1885, in-4.°
20. *Rendiconto delle sessioni dell'Accademia reale delle scienze dell'Istituto di Bologna.* Anno 1884—85. — Bologna, 1885. In-8.
21. *Rivista di Artiglieria e Genio.* — Aprile 1885. — Roma, 1885. in 8.°
22. *The Canadian Antiquarian ande Numismatic journal.* — Vol. V, n.° 3: — Vol. VIII, n.° 2. — Montreal 1877, 1879. — in-8.°
23. *The Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society.* — Vol. IV. (N. S.) — Part 5. Dublin, 1884. In-8.°
24. *The scientific Transactions of the Royal Dublin Society.* Vol. III. (Serie II). IV, V, VI. Dublin, 1884—85. In-4.°

INDICE DELLE MATERIE
DEL VOLUME XXXVIII
(1884-1885)

MEMORIE E NOTE

COMUNICAZIONI

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

COMITATO SEGRETO

Cromo-lit. Spithöver

Cromo-lit. Spithöver

Cromo-lit. Spithöver

Cromo-lit. Spithöver

Cromo-lit. Spithöver

CIRRI

Aut. Est. Prim. Inv.

CUMOLI

Aut. Est. Prim. Inv.

S
T
t
t
t'
t'
t'
t
t
T
v''
v''
A
A'
V
V
B
v'
v'
R
A'''
A''
S'